

## SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO DIRETA DE GRANDES VÓRTICES

Adriane P. Petry Armando M. Awruch

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia,  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Sarmento Leite, 425, 90050-170, Porto Alegre, RS, Brasil

### RESUMO

Este trabalho aborda a análise de escoamentos incompressíveis e turbulentos através da simulação direta de grandes vórtices, empregando o método de elementos finitos e o modelo de Smagorinsky<sup>[1]</sup> para pequenas escalas. Apresenta-se resultados de simulações do escoamento sobre um degrau obtidos através da solução das equações de Navier-Stokes sem o modelo (desprezando os efeitos das pequenas escalas), bem como empregando o modelo de Smagorinsky, considerando e desprezando os termos de Leonard e termos cruzados. Estes são comparados entre si e com resultados experimentais e numéricos de outros autores, mostrando-se condizentes com os valores esperados para cada caso.

### ABSTRACT

The analysis of incompressible turbulent flow employing the large eddy simulation technique, using finite element method and Smagorinsky's<sup>[1]</sup> subgrid-scale model, is presented in this work. Results of flow simulations on a backward-facing step, obtained through the solution of Navier-Stokes equations without the turbulence model (neglecting small scales effects), as well as using the Smagorinsky's model, considering and neglecting Leonards and cross terms, are presented. These results are compared with experimental and numerical results of other authors, and good agreements can be observed.

### INTRODUÇÃO

A análise de escoamentos turbulentos é um tema de reconhecido interesse em diversas áreas da engenharia. A simulação numérica de escoamentos tornou-se uma importante ferramenta de análise e projeto em campos tão variados como aerodinâmica de edificações, dispersão de poluentes e projeto de turbomáquinas. A motivação deste trabalho está no desenvolvimento de técnicas computacionais para resolver problemas envolvendo escoamentos turbulentos, sobre geometrias complexas, incluindo a correta determinação de pontos de separação e recolamento, para aplicação na otimização de formas aerodinâmicas.

A simulação de grandes vórtices é um enfoque de análise de escoamentos turbulentos adequada à abordagem dos problemas propostos. Este método resolve diretamente as grandes escalas da turbulência e emprega modelos apenas para representar os efeitos das escalas inferiores à resolução da malha. O esquema resultante é bastante independente do problema, pois são as escalas maiores (resolvidas diretamente) que possuem maior relação com o domínio e condições de contorno, enquanto as escalas menores (que são modeladas) têm caráter mais universal.

Este trabalho apresenta resultados da investigação do emprego do método de elementos finitos para análise de escoamentos turbulentos, através de técnicas de simulação direta de grandes vórtices aplicadas a um modelo bidimensional. É importante ressaltar que a simulação direta dos grandes vórtices da turbulência está implicitamente relacionada a modelos tridimensionais, em virtude do caráter tridimensional do fenômeno a ser representado. Contudo, esta investigação desenvolveu-se empregando um modelo bidimensional, com o objetivo de reduzir os recursos de programação e processamento nesta etapa inicial. Feita esta ressalva, emprega-se a expressão *simulação de grandes vórtices* no restante do trabalho, para simplificar a denominação mais adequada a estas análises, ou seja, análises bidimensionais de escoamentos turbulentos empregando técnicas de simulação de grandes vórtices,

As equações para análise de um escoamento incompressível, transiente e bidimensional empregadas em um programa de elementos finitos, apresentadas nas referências [2] e [3], foram reformulada para o contexto da simulação de grandes vórtices. O método<sup>[2],[3]</sup> baseia-se no conceito de pseudo-compressibilidade e emprega um esquema explícito de integração. Para modelar o tensor de Reynolds das escalas inferiores à resolução da malha foi utilizado o modelo de Smagorinsky<sup>[1]</sup>. Os termos de Leonard e cruzados, apresentados por diversos autores<sup>[4],[5]</sup> como negligenciáveis, foram modelados em função do campo de grandes escalas.

Visando investigar os resultados e a metodologia para implantação do modelo, bem como a importância dos termos de Leonard e termos cruzados, três sistemas de simulação de escoamentos foram desenvolvidos. O sistema original<sup>[2],[3]</sup> de solução das equações de Navier-Stokes, desprezando completamente os efeitos de escalas inferiores à resolução da malha, o segundo sistema empregando o modelo de Smagorinsky<sup>[1]</sup> para efeitos de pequenas escalas e desprezando os termos de Leonard e termos cruzados e um terceiro sistema modelando todos os termos relativos às pequenas escalas

Primeiramente, com o objetivo de validar os resultados, desenvolveu-se a simulação de escoamentos sobre um degrau caracterizados por baixos números de Reynolds, empregando o segundo sistema descrito anteriormente. Posteriormente são apresentados os resultados de simulações obtidas através dos três sistemas descritos, para o escoamento sobre um degrau em canal aberto, com alto número de Reynolds. Os resultados são comparados entre si e com dados experimentais<sup>[6]</sup> e numéricos<sup>[4],[5],[7],[8]</sup> de outros autores para problemas semelhantes.

Os problemas foram processados em um computador CRAY-YMP (Centro Nacional de Supercomputação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil), fazendo uso da característica de processamento vetorial do equipamento.

### ALGORITMO NUMÉRICO

As equações para análise do escoamento turbulento através da simulação de grandes vórtices foram deduzidas a partir das equações do escoamento bidimensional, considerando a hipótese de pseudo-compressibilidade apresentadas nas referências [2] e [3]. Aplica-se um operador de média espacial (filtro) às equações de Navier-Stokes e da continuidade. Desta operação resultam termos não resolvidos pela malha, tensões de Reynolds de escalas inferiores à malha (Sub Grid Scale Reynolds Stress), termos de Leonard<sup>[9]</sup> e termos cruzados. Estes termos são modelados a partir dos resultados dos campos de grandes escalas.

A primeira etapa desta aproximação é a decomposição das variáveis de campo  $u$  em componentes correspondentes às grandes escalas  $\bar{u}$  e às escalas inferiores a resolução da malha  $u'$ .

$$u = \bar{u} + u' \quad (1)$$

A componente  $\bar{u}$  é definida como a convolução entre a variável  $u$  e uma função de filtro  $G(x)$ :

$$\bar{f}(x) = \int G(x-x') f(x') dx \quad (2)$$

Emprega-se uma função filtro clássica, função "box":

$$G(x-x') = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_i} & \text{para } |x_i - x'_i| < \frac{\Delta_i}{2} \\ 0 & \text{para } |x_i - x'_i| > \frac{\Delta_i}{2} \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\Delta_i$  é a dimensão do filtro na direção  $i$ , e  $n=2$  para o caso bidimensional e  $n=3$  para o caso tridimensional.

Aplicando a operação de filtro sobre as equações que governam o escoamento<sup>[2][3]</sup>, e considerando que as operações matemáticas de filtro e derivadas parciais são comutativas, obtêm-se as equações de conservação de massa e quantidade de movimento para o escoamento turbulento:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \rho c^2 \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -L_{ij} - C_{ij} - \overline{v'_i v'_j} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} \right) + F_i$$

onde:

$i, j=1, 2$  (escoamentos bidimensionais)

$v_i$  - componente, correspondente às grandes escalas, do vetor de velocidade na direção  $x_i$

$\bar{p}$  - pressão, componente correspondente às grandes escalas

$\rho$  - massa específica

$\nu$  - coeficiente de viscosidade cinemática

$\lambda$  - coeficiente de viscosidade volumétrica

sendo  $L_{ij}$  os termos de Leonard,  $C_{ij}$  os termos cruzados e  $\overline{v'_i v'_j}$  as componentes do tensor de Reynolds das escalas inferiores à resolução da malha. Estes resultam da aplicação da operação de

filtro sobre os termos não lineares da equação de conservação de quantidade de movimento, sendo definidos a seguir.

Pode-se escrever:

$$\overline{v_i v_j} = \overline{\overline{v_i v_j}} + \overline{v'_i v'_j} + \overline{v'_i \overline{v_j}} + \overline{\overline{v_i} v'_j} \quad (5)$$

onde os caracteres do lado esquerdo representam as variáveis de campo originais, a barra superior indica médias espaciais das variáveis de campo e o apóstrofe indica as respectivas componentes inferiores à resolução da malha. Sendo os termos de Leonard<sup>[9]</sup> e termos cruzados definidos como:

$$L_{ij} = \overline{\overline{v_i v_j}} - \overline{\overline{v_i}} \overline{\overline{v_j}} \quad C_{ij} = \overline{\overline{v_i} v'_j} + \overline{v'_i \overline{v_j}} \quad (6)$$

Para representar os efeitos do tensor de Reynolds das pequenas escalas emprega-se o modelo de Smagorinsky<sup>[1][4]</sup> Este é um modelo de viscosidade turbulenta, que relaciona as componentes ij do tensor de tensões de Reynolds de escalas inferiores, ao tensor correspondente do campo de grandes escalas, conforme a seguinte expressão:

$$\overline{v'_i v'_j} = \nu_t S_{ij} = \frac{1}{2} \nu_t \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

onde  $\nu_t$  a viscosidade turbulenta para as escalas inferiores à malha, definida como:

$$\nu_t = C_s^2 (S_{ij} S_{ij})^{1/2} \Delta^2 \quad (8)$$

sendo que,  $\Delta$  é uma escala associada com o filtro utilizado para definir o campo de grandes escalas e  $C_s$  é um parâmetro que varia entre 0.1 e 0.22<sup>[10]</sup>. Neste trabalho, utiliza-se  $\Delta^2 = \Delta x \Delta y$  e  $C_s = 0.2$ .

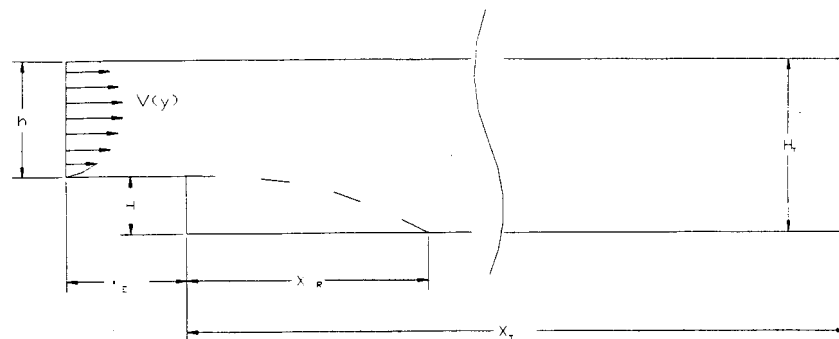
Para aproximação dos termos de Leonards e cruzados, emprega-se a seguinte expressão<sup>[10][11]</sup>:

$$C_{ij} + L_{ij} = \frac{\Delta_k^2}{12} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} \quad (9)$$

As equações (4) são resolvidas empregando o Método de Elementos Finitos, utilizando um elemento quadrilátero bilinear e um método explícito para integração no tempo<sup>[2],[3]</sup>.

## APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

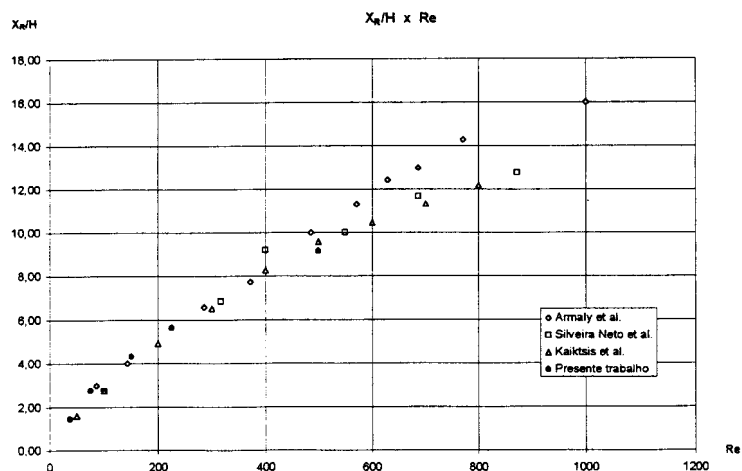
Nesta investigação foram processadas simulações numéricas do escoamento sobre um degrau em duas configurações diferentes. A Figura 1 apresenta um esquema dos problemas processados, identificando as dimensões características que serão definidas a seguir.



**Figura 1** - Esquema do domínio e dimensões características do escoamento sobre o degrau.

### Validação do Método Numérico

Primeiramente apresenta-se a simulação do escoamento sobre o degrau com baixos números de Reynolds, em regime laminar e bidimensional. Este estudo tem por finalidade a validação do programa de simulação numérica desenvolvido, pois existem diversos resultados experimentais<sup>[6]</sup> e numéricos<sup>[8],[5]</sup> publicados. Neste escoamento uma importante característica a ser verificada é a relação entre o número de Reynolds e o comprimento de recolamento  $X_R$ .



**Figura 2** - Relação entre comprimento de recolamento ( $X_R/H$ ) e número de Reynolds ( $Re$ ):  $\diamond$ , resultados experimentais de Armaly et al.<sup>[6]</sup>;  $\square$ , simulação numérica de Silveira Neto et al.<sup>[5]</sup>;  $\Delta$ , simulação numérica de Kaiktsis et al.<sup>[8]</sup>;  $\bullet$ , resultados do presente trabalho.

As dimensões do problema (figura 1) são:  $H=0.94$ ,  $h=1$ ,  $X_E=1$  e  $X_T=30$ . Como condições de contorno, empregou-se um perfil de velocidades ( $v_1=V(y)$ ,  $v_2=0$ ) parabólico completamente

desenvolvido na entrada e velocidades nulas ( $v_1=v_2=0$ ) nas paredes superior e inferiores. Como condições iniciais, empregou-se, na primeira simulação, um escoamento igual a velocidade média de entrada para todo o domínio, nas simulações seguintes empregou-se o último campo de pressões e velocidades calculado para o número de Reynolds anterior. O número de Reynolds é definido em função de  $h$  e da velocidade máxima do perfil de velocidades na entrada. Empregou-se uma resolução de  $20 \times 10$  ( $X_E \times h$ ) na entrada e  $40 \times 300$  ( $H_T \times X_T$ ) na região posterior ao degrau. Os resultados foram obtidos através do código com modelo de Smagorinsky, desprezando os termos de Leonard e termos cruzados.

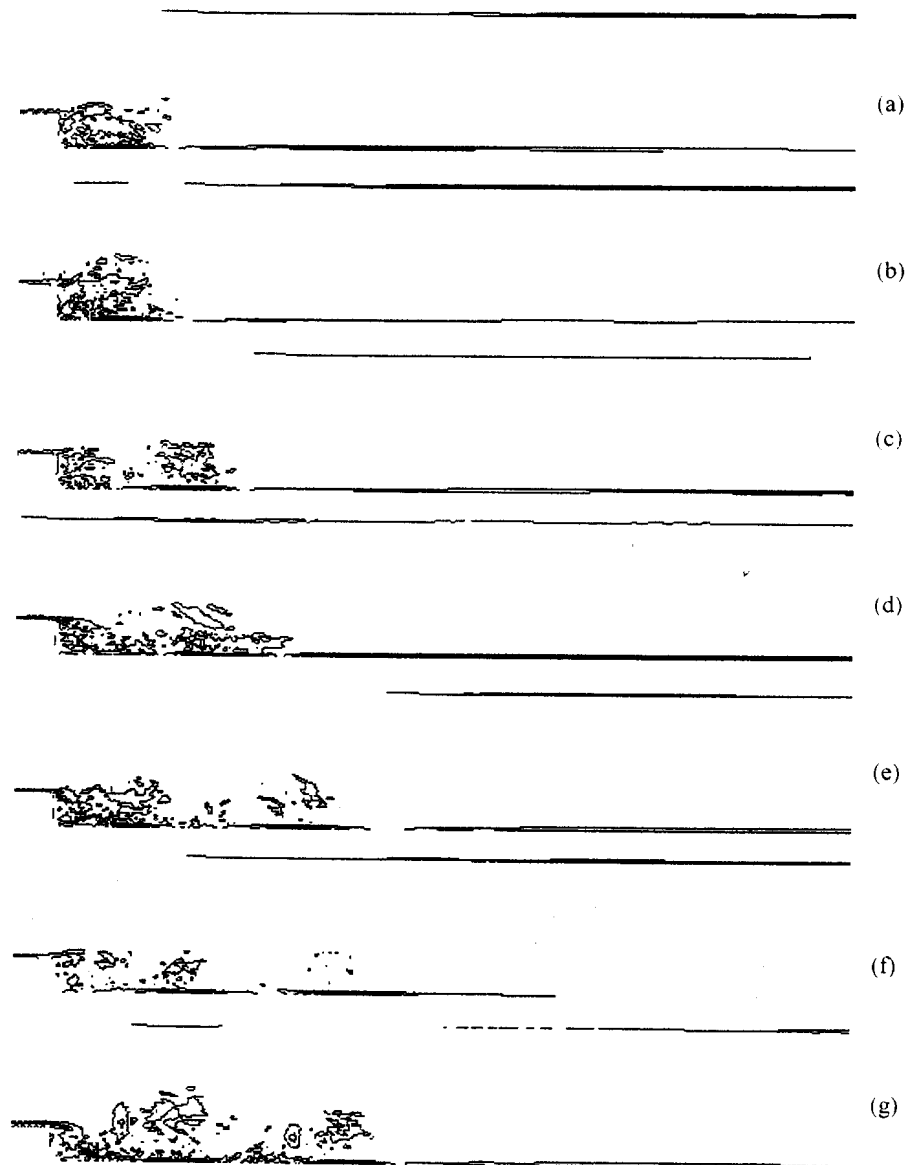
Este problema é semelhante ao estudado experimentalmente por Armaly, et al.<sup>[6]</sup>, tendo sido empregado na validação dos resultados apresentados por Silveira Neto, et al.<sup>[5]</sup> e Kaiktsis et al.<sup>[8]</sup>. A Figura 2 apresenta os resultados obtidos para a relação  $X_R/H \times Re$ , juntamente com os apresentados pelas referências [6], [5] e [8], é possível observar a concordância dos resultados com os valores esperados. Foram analisados escoamentos caracterizados por números de Reynolds até 500, a partir desta ordem de  $Re$ , o comprimento de recolamento passa a ser subestimado por simulações bidimensionais. O afastamento da realidade física decorre da importância de efeitos tridimensionais nesta faixa de Reynolds, como afirmam os autores nas referências [5] e [8] e confirma o trabalho de Williams e Baker<sup>[11]</sup>.

#### Simulação do escoamento sobre um degrau em canal aberto

Este segundo escoamento é caracterizado por um alto número de Reynolds, ( $Re=40.000$ ). O problema é similar ao processado por Ortega e Azevedo<sup>[4]</sup>, sendo  $H=3$  cm  $h=3H$ ,  $X_E=3H$ ,  $X_T=30H$ , o número de Reynolds é definido com base em  $H$  e  $V_{max}$  (velocidade máxima do perfil de velocidades na entrada). Como condições de contorno empregou-se um perfil de velocidades de camada limite ( $v_1=V(y)$ ,  $v_2=0$ ) na entrada, velocidade nula nas paredes inferiores e ( $v_1=V_{max}$ ,  $v_2=0$ ) no contorno superior. A malha empregada é similar a encontrada em [4] ( $64 \times 32$  ( $X_E \times h$ ) na entrada e  $84 \times 302$  ( $H_T \times X_T$ ) na região posterior ao degrau).

Esta configuração foi resolvida empregando os três sistemas descritos no parágrafo sobre o algoritmo numéricos. Utiliza-se a seguinte nomenclatura para identificar os resultados das simulações nos próximos parágrafos: *NSI* - solução das equações (4) considerando  $\overline{v'_i v'_j} = 0$ ,  $L_{ij}=0$  e  $C_{ij}=0$ ; *LESI* - solução das equações (4), empregando o modelo de Smagorinsky para  $\overline{v'_i v'_j}$  e  $L_{ij}=0$  e  $C_{ij}=0$ ; *LES2* - solução das equações (4), empregando o modelo de Smagorinsky e a aproximação dada pela equação (10) para os termos  $L_{ij}$  e  $C_{ij}$ .

As figuras 3, 4 e 5 apresentam o campo de vorticidade em diferentes instantes de tempo ( $\hat{t} = tH/V_{max}$ ) para as três simulações do problema, verifica-se a grande semelhança dos resultados obtidos nas simulações que empregam o modelo de Smagorinsky (*LESI* e *LES2*), também semelhantes aos resultados apresentados na referência [4]. De acordo com o esperado, a simulação *NSI* não conduziu a bons resultados, apesar da malha refinada. Outros parâmetro, além da topologia do escoamento apresentada nas figuras 3, 4 e 5, confirmam esta observação. O número de Strouhal foi obtido do histórico de velocidades de um ponto distante ( $X_R+H$ ) do degrau. Para a simulação *NSI* encontrou-se um valor de 0.033; bastante distante dos valores publicados por outros autores, 0.15<sup>[4]</sup>, 0.09<sup>[5]</sup> e 0.07 (valor experimental referido em [5]). Para as simulações *LESI* e *LES2* obteve-se  $St=0.077$ , mais condizente com os valores publicados. Nos casos *LESI* e *LES2*, a velocidade de transporte dos turbilhões formados após o degrau foi da ordem de  $0,5V_{max}$ , de acordo com o esperado<sup>[7]</sup>. Para a



**Figura 3** - Distribuição de vorticidade, resultados da simulação *NSI* (desprezando os termos relativos a efeitos às escalas inferiores à resolução da malha), em diferentes instantes de tempo: (a),  $\hat{t} = 15$ ; (b),  $\hat{t} = 25$ ; (c),  $\hat{t} = 35$ ; (d),  $\hat{t} = 45$ ; (e),  $\hat{t} = 55$ ; (f),  $\hat{t} = 65$ ; (g),  $\hat{t} = 75$ .

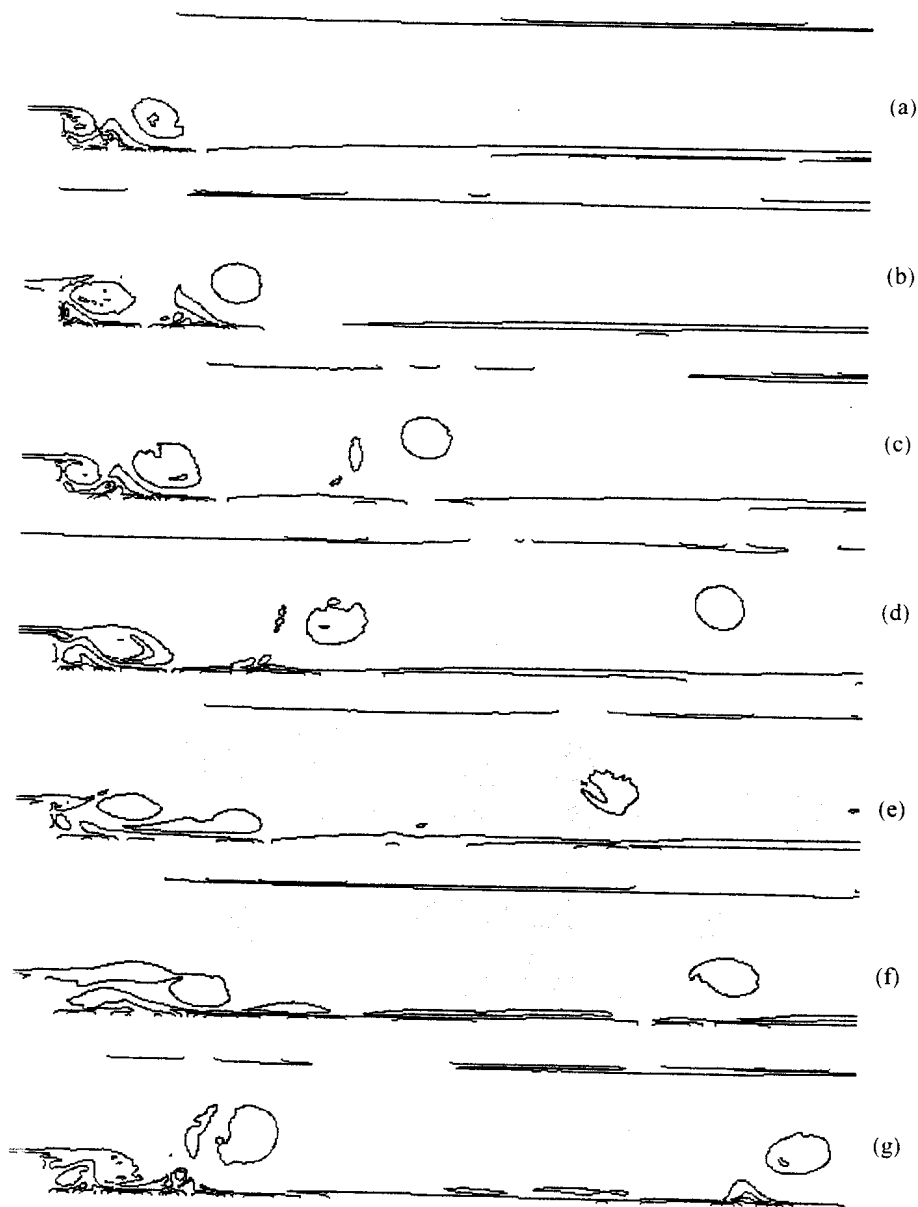
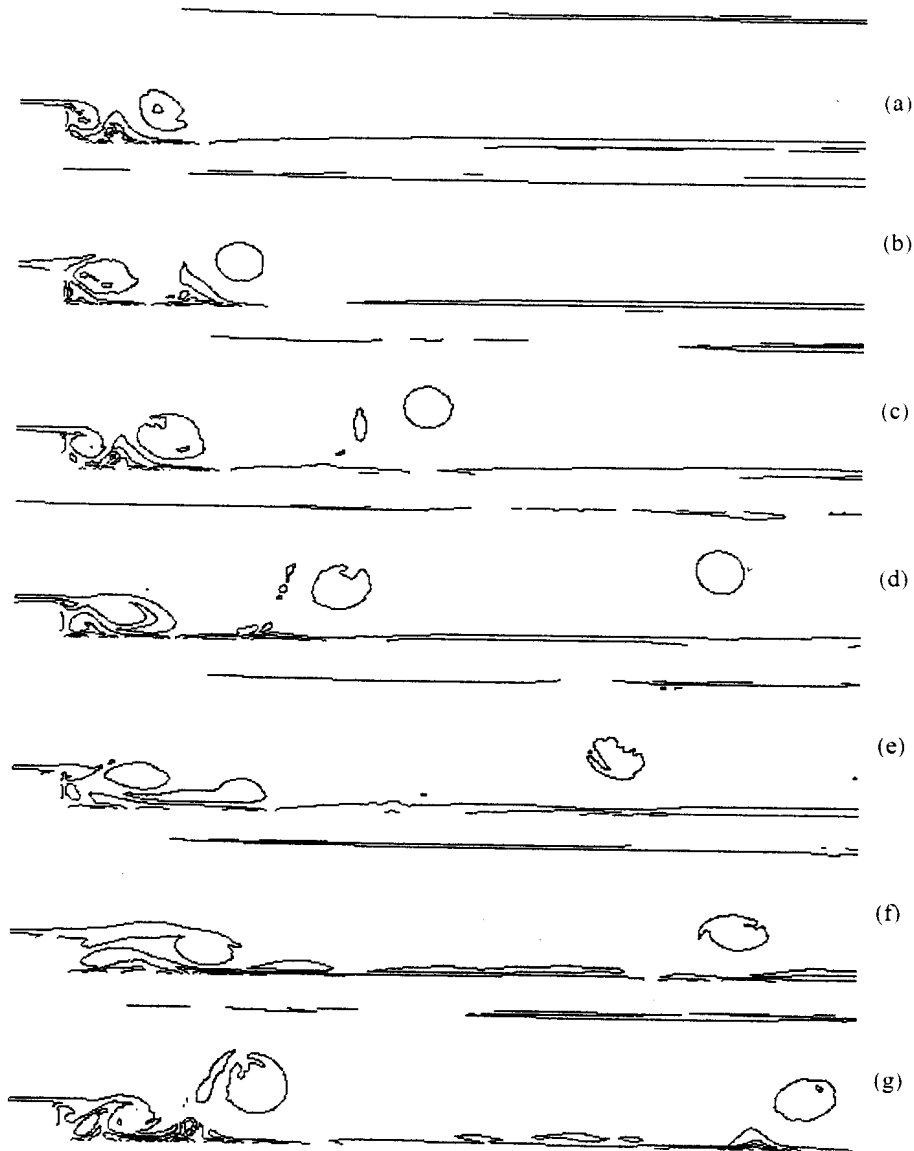


Figura 4 - Distribuição de vorticidade, resultados da simulação *LES* (empregando o modelo de Smagorinsky e desprezando os termos de Leonard e cruzados), em diferentes instantes de tempo: (a),  $\hat{t} = 15$ ; (b),  $\hat{t} = 25$ ; (c),  $\hat{t} = 35$ ; (d),  $\hat{t} = 45$ ; (e),  $\hat{t} = 55$ ; (f),  $\hat{t} = 65$ ; (g),  $\hat{t} = 75$ .





**Figura 5** - Distribuição de vorticidade, resultados da simulação *LES2* (considerando todos os termos das equações (4)), em diferentes instantes de tempo: (a),  $\hat{t} = 15$ ; (b),  $\hat{t} = 25$ ; (c),  $\hat{t} = 35$ ; (d),  $\hat{t} = 45$ ; (e),  $\hat{t} = 55$ ; (f),  $\hat{t} = 65$ ; (g),  $\hat{t} = 75$ .

simulação *NSI* obteve-se um valor de  $0.15V_{\max}$ , além desta baixa velocidade de deslocamento é possível verificar na figura 3 que os turbilhões não se mantêm. O comprimento de recolamento é conhecido experimentalmente<sup>[6]</sup>, sendo esperado um valor próximo a  $7H$ , para este número de Reynolds. No caso *NSI*, obteve-se uma região de recirculação muito alongada,  $X_R=10H$ , as simulações *LES1* e *LES2* apresentaram uma correta previsão de  $X_R$ , sendo  $7.3H$  e  $7.2H$ , respectivamente.

### CONCLUSÕES

Os resultados das simulações empregando o modelo de Smagorinsky para pequenas escalas estão de acordo com valores numéricos e experimentais publicados por outros autores. Os termos de Leonard e termos cruzados tiveram pouca influência nos resultados práticos, mas aumentam (em torno de 20%) o tempo de processamento, sendo vantajoso negligenciá-los. A má qualidade dos resultados das simulações desprezando os efeitos das pequenas escalas confirmam a necessidade do uso de modelos para representá-los. Os resultados obtidos encorajam a continuidade das pesquisas, sendo a próxima etapa a implementação desta metodologia em um sistemas de análise de escoamentos tridimensionais.

### REFERÊNCIAS

- [1] Smagorinsky, J. *General Circulation Experiments with the primitive Equations: I - The Basic Experiment*, 1963
- [2] Petry, A.P. *Análise Numérica da Interação Fluido-Estrutura através do Método de Elementos Finitos*, Dissertação de Mestrado, CPGEC, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 1993.
- [3] Petry, A.P., Awruch, A.M. *Solução das Equações de Navier-Stokes Transientes Usando um Método Explícito*. ENIEF 92, Anais, pp. 214-222, San Carlos de Bariloche, Argentina, setembro de 1992.
- [4] Ortega, M.A., Azevedo, J.L.F. *Large Eddy Simulation of an Open Flow Along a Backward-Facing Step*, Fourth Pan American Congress of App.Mech.-PACAM IV, Buenos Aires, Argentina, January, 1995.
- [5] Silveira Neto, A., Grand, D., Métais, O., Lesieur, M. *A Numerical Investigation of Coherent Vortices in Turbulence Behind a Backward-Facing Step*, J. of Fluid Mechanics, v. 256, pp. 1-25, 1993.
- [6] Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F., Schönung, B. *Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow*, J. of Fluid Mechanics, v. 127, pp. 473-496, 1983
- [7] Silveira Neto, A., Grand, D., Lesieur, M. *Simulation Numérique bidimensionnelle d'un écoulement turbulent stratifié derrière une marche*, Int.J. Heat Mass Transfer, v. 34, n.8, pp. 1999-2011, 1991.
- [8] Kaiktsis, L., Karniadakis, G., Orzag, S.A. *Onset of three-dimensionality, equilibria, and early transition in flow over a Backward-Facing Step*, J. of Fluid Mechanics, v. 231, pp. 501-528, 1991.
- [9] Leonard, A. *Energy Cascade in Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows*, Advances in Geophysics, 18A, p.237-248, 1974.
- [10] Findikakis, A.N., Street, R.L. *Mathematical Description of Turbulent Flows*, Journal of Hydraulics Division, ASCE, V108, No.HY8, paper 17265, pp.887-903, 1982.
- [11] Williams, P.T., Baker, A.J. *Numerical Simulations of Laminar Flow over a 3D Backward-Facing Step*, Int.J. for Numerical Methods in Fluids, v.24, pp. 1159-1183, 1997.