

**MANCAL RADIAL DE DESLIZAMENTO: DETERMINAÇÃO DE RAMOS DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS E PONTOS DE BIFURCAÇÃO COMPLEXOS**

**Mário C. Ricci, Petrônio N. de Souza**

Divisão de Mecânica Espacial e Controle, DEM/INPE

CEP 12201-970 - São José dos Campos, Brasil - E-mail: mcr@dem.inpe.br

**RESUMO**

O sistema não linear, de grande interesse prático, que é focalizado nesse trabalho é o mancal radial de deslizamento (figura 1). Esse tipo de mancal consiste de um rotor que gira dentro de um cilindro oco (anel externo) de raio interno ligeiramente maior que o raio do rotor e com o espaço entre eles sendo preenchido por um fluido lubrificante. O sistema pode ser descrito por uma equação diferencial ordinária (edo) de quarta ordem onde as forças geradas pelo fluido são soluções aproximadas de equações diferenciais parciais. Esse sistema revela um comportamento rico e complexo mesmo no caso mais simples (rotor perfeitamente balanceado, sistema autônomo sem excitação). Rigorosos vínculos geométricos são impostos sobre a excursão do centro do rotor relativamente ao centro do anel externo no intuito de se evitar o contato entre ambos o que resultaria na falha do sistema. Um dos objetivos do trabalho é investigar áreas potencialmente perigosas no espaço de parâmetros que possam levar o rotor a atingir o anel externo. Essa pesquisa, portanto, fornece dados que garantem que a excursão do rotor permanece estável ou numa órbita fechada de extensão limitada. São analisados mancais longos sobre a influência do carregamento e da cavitação. Para tanto, partindo da aproximação de Reynolds para o mancal longo, o trabalho utiliza de *métodos numéricos para problemas de bifurcação*, para calcular pontos de bifurcação complexos (ou de Hopf), e de *métodos numéricos de continuação*, para obter ramos de soluções periódicas que emanam de soluções estacionárias. São mostradas, também, a *amplitude* e a *frequência* das soluções periódicas em função da velocidade angular do rotor para carregamentos leve, médio e pesado.

**ABSTRACT**

In the mechanical engineering moving system's field the radial journal bearing is one of the great interest. It consists of a circular inner cylinder (the rotor) that turns inside a hollow cylinder of slightly larger radius (the stator). The cavity between the cylinders is filled with a lubricant and any load carried by the rotor must be supported by the fluid forces exerted by the lubricant on the rotor. The system can be described by a set of four first order's nonlinear ordinary differential equations which the fluid forces are approximate solution of partial differential equations and shows a great richness of behavior same at the simplest case of cavitation model, autonomous, unforced and balanced-mass rotor system. Rigorous geometrical constraints are impose on the moving of the rotor's center about stator's center to avoid the contact between them. Otherwise, the contact could well result in bearing failure. Starting from the Reynolds approximation for the long bearing the paper uses of numerical methods for bifurcation problems to calculate Hopf bifurcation points and to obtain branching of periodic orbits that emanate from stationary solutions. The paper also shows the *amplitude* and *frequency* of periodic solutions as a function of rotor's angular velocity for the low, medium and high loads.

## NOTAÇÃO

$A$	amplitude adimensional de órbitas periódicas, $\equiv y_1(0) - y_1(\bar{t}_c)$ .
$c$	folga radial, $\equiv r_e - r_r$ , [m].
$e$	excentricidade do rotor em relação ao anel externo, [m].
$F_r, F_t$	componentes das forças hidrodinâmicas nas direções radial e transversal, [N].
$h_r$	espessura do filme de lubrificante, $\equiv c(1 + \varepsilon \cos \theta)$ , [m].
$L$	comprimento axial do mancal, [m].
$M$	metade da massa do rotor, [Kg].
$p$	distribuição de pressão circunferencial, [Nm <sup>-2</sup> ].
$p_c$	pressão de contorno, [Nm <sup>-2</sup> ].
$r_e, r_r$	raio do anel externo e do rotor, [m].
$S$	número de Sommerfeld, $\equiv 1/\pi\bar{W} = \eta\omega_r L r_r (r_r/c)^2 / \pi W$ .
$t$	tempo, [s].
$\bar{t}$	tempo adimensional, $\equiv t(W/2Mc)^{1/2}$ .
$\bar{t}$	tempo adimensional e normalizado, $0 \leq \bar{t} \leq 1$ .
$\bar{t}_c$	valor arbitrário mas fixo de $\bar{t}$ , $0 < \bar{t}_c < 1$ .
$W$	força constante (para um mancal descarregado $W = Mg$ ), [N].
$y, y_t$	vetor de soluções e elementos do vetor de soluções de um sistema de edo's de 1ª ordem.
$\varepsilon$	relação adimensional entre a excentricidade e a folga, $\equiv e/c$ .
$\eta$	viscosidade do lubrificante (considerada constante), [Nsm <sup>-2</sup> ].
$\theta$	ângulo medido a partir da máxima folga radial, [rd].
$\phi$	posição angular absoluta da linha de centros em relação à vertical, [rd].
$\omega_r$	velocidade angular absoluta do rotor em torno do seu centro, [rds <sup>-1</sup> ].
$\bar{\omega}$	freqüência orbital adimensional das soluções periódicas.
$\bar{\omega}_r$	velocidade angular adimensional absoluta do rotor, $\equiv \omega_r(2Mc/W)^{1/2}$ .
$\equiv$	símbolo de definição.

## índices

$\cdot$	$\equiv d/dt$ .
$'$	$\equiv d/d\bar{t}$ ou $\equiv d/d\bar{t}'$ .
$\bar{\quad}$	significa adimensionalidade.
$\circ$	prescrição de valores iniciais.
$\circ$	indica valores estacionários.

## EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Para descrever o movimento do rotor em relação a um referencial fixo (figura 1) considera-se que a massa do rotor esteja equanimemente dividida entre dois mancais idênticos e que o movimento seja simétrico nos dois mancais dada a distribuição uniforme de massa. Analisando um dos mancais é como se o centro de massa se comportasse como uma partícula de massa  $M$ , situada em  $O'$ , enquanto o centro do mancal permanece fixo em  $O$ . A posição de  $O'$  relativamente a  $O$  pode ser dada em coordenadas polares como  $(e, \phi)$  e as equações de movimento na direção da linha que passa pelos

centros do anel externo e do rotor (direção radial) e na direção normal à linha dos centros (direção transversal) são [1]

$$M(\ddot{e} - e\dot{\phi}^2) = F_r + W \cos \phi \quad (1a)$$

e

$$M(e\ddot{\phi} + 2\dot{e}\dot{\phi}) = F_t - W \sin \phi. \quad (1b)$$

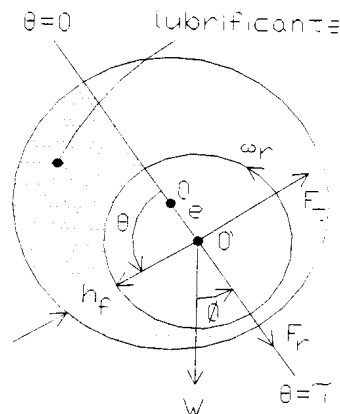


Figura 1: Um rotor, sujeito a um carregamento externo  $W$ , onde o lubrificante ocupa a metade convergente da cavidade.

Para calcular  $F_r$  e  $F_t$  é conveniente começar com a equação (2) que governa a distribuição de pressão para mancais radiais hidrodinâmicos infinitamente longos [3],

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h_f^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 12cr_e^2 \left[ \varepsilon \cos \theta + \varepsilon \sin \theta \left( \dot{\phi} - \frac{\omega_r}{2} \right) \right]. \quad (2)$$

Tem-se observado rupturas no filme de óleo, onde ele passa a escoar em forma de estrias na parte divergente do movimento devido à formação de bolhas de ar, perdendo, desta forma, a capacidade de sustentar forças hidrodinâmicas. A este fenômeno dá-se o nome de *cavitação*. Vários pesquisadores se debruçaram sobre esse tema (p.e., [2] e [6]) de fundamental importância na determinação do comportamento. Entretanto, esse assunto ainda representa um desafio. Nesse trabalho, para simplificar os cálculos, utiliza-se de um modelo de cavitação chamado de filme- $\pi$ . Esse modelo supõe que o lubrificante ocupa a metade convergente da cavidade enquanto a outra metade é ocupada pela cavitação (figura 1).

Considerando o mancal longo com o modelo de cavitação filme- $\pi$ , integrando (2) duas vezes em relação a  $\theta$  com  $p(\theta = 0) = p(\pi \leq \theta \leq 2\pi) = p$ , tem-se

$$\frac{p - p_0}{6\eta \left(\frac{r_c}{c}\right)^2} = (\omega_r - 2\dot{\phi}) \frac{\varepsilon \sin \theta}{2 + \varepsilon^2} \left( \frac{2 + \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) + \dot{\varepsilon} \left\{ \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon \sin \theta}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{1/2} (1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3\varepsilon \sin \theta}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{1/2} (1 + \varepsilon \cos \theta)} - \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)} \cos^{-1} \left( \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) \right] + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right) \right\}. \quad (3)$$

A equação (3) fornece a pressão gerada pelo filme de óleo sob carregamento dinâmico desde que sejam conhecidas a velocidade radial de compressão do lubrificante,  $\dot{\varepsilon}$ , e a velocidade rotacional  $(\omega_r - 2\dot{\phi})$ , para qualquer relação de excentricidade  $\varepsilon$ . As forças geradas pelo filme podem ser calculadas a partir da equação (3) e são dadas por

$$F_r = \frac{6\eta L r_c \left(\frac{r_c}{c}\right)^2 \varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} \left[ \pi(\omega_r - 2\dot{\phi})(1 - \varepsilon^2)^{1/2} + 4\dot{\varepsilon} \right] \quad (4a)$$

e

$$F_t = -6\eta L r_c \left(\frac{r_c}{c}\right)^2 \left[ \frac{\dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \left( \pi - \frac{16}{\pi(2 + \varepsilon^2)} \right) + \frac{2\varepsilon^2(\omega_r - 2\dot{\phi})}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} \right]. \quad (4b)$$

Utilizando  $\varepsilon$ ,  $\bar{t}$  e  $\bar{\omega}_r$  obtêm-se as equações do movimento (1) na forma adimensional

$$\varepsilon'' - \varepsilon\phi'^2 = \frac{-12\pi S}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \left[ \frac{2\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{2 + \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\phi'}{\bar{\omega}_r} \right) + \frac{\varepsilon'}{\bar{\omega}_r} \left( \pi - \frac{16}{\pi(2 + \varepsilon^2)} \right) \right] + 2 \cos \phi \quad (5a)$$

e

$$\varepsilon\phi'' + 2\varepsilon'\phi' = \frac{12\pi S\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} \left[ \pi \left( 1 - \frac{2\phi'}{\bar{\omega}_r} \right) (1 - \varepsilon^2)^{1/2} + \frac{4\varepsilon'}{\bar{\omega}_r} \right] - 2 \sin \phi. \quad (5b)$$

### RAMOS DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Para determinar ramos de soluções (estacionárias e periódicas) de (5) em função do parâmetro  $\bar{\omega}_r$ , via métodos de continuação, deve-se reescrever o sistema em equações de primeira ordem. O interesse é buscar soluções periódicas de frequência orbital desconhecida e as seguintes modificações em (5) devem ser realizadas. As soluções periódicas devem satisfazer

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(0) &= \varepsilon(T), \\
 \varepsilon'(0) &= \varepsilon'(T), \\
 \phi(0) &= \phi(T), \\
 \phi'(0) &= \phi'(T),
 \end{aligned}
 \quad T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}. \quad (6)$$

Em (6) o comprimento do intervalo varia com a frequência. Isto pode ser evitado com uma transformação para o intervalo unitário,  $0 \leq \bar{t} \leq 1$ , fazendo

$$\begin{aligned}
 T\bar{t} &= \bar{t}, & y_3(\bar{t}) &\equiv \phi(\bar{t}), \\
 y_1(\bar{t}) &\equiv \varepsilon(\bar{t}), & y_4(\bar{t}) &\equiv \phi'(\bar{t}), \\
 y_2(\bar{t}) &\equiv \varepsilon'(\bar{t}), & &
 \end{aligned} \quad (7)$$

Isso leva ao seguinte problema do valor de contorno em dois pontos [5]

$$y'_i = f_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (8a)$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned}
 r_1 &= y_1(0) - y_1(1) = 0, & r_5 &= y_2(0) = 0, \\
 r_2 &= y_2(0) - y_2(1) = 0, & r_6 &= \begin{cases} y_3(0) - \bar{\omega}_r^* = 0, \\ y_6(0) - \bar{\omega}^* = 0, \\ y_1(0) - \varepsilon^* = 0, \end{cases} \\
 r_3 &= y_3(0) - y_3(1) = 0, & & \\
 r_4 &= y_4(0) - y_4(1) = 0, & &
 \end{aligned} \quad (8b)$$

onde  $' \equiv d/d\bar{t}$  e as funções  $f_i$  são dadas em (10a).

Pretendendo-se calcular a solução de (5), para um dado valor  $\bar{\omega}_r = \bar{\omega}_r^*$ , deve-se resolver (8) com a primeira condição de contorno de  $r_6$ . O valor de  $\bar{\omega}$  será dado por  $\bar{\omega} = y_6$ . Para calcular a solução de (5), para um prescrito valor  $\bar{\omega} = \bar{\omega}^*$ , deve-se resolver (8) com a segunda condição de contorno de  $r_6$ . O valor de  $\bar{\omega}_r$  será dado por  $\bar{\omega}_r = y_3$ . Finalmente, para calcular a solução de (5), para um prescrito valor  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , deve-se resolver (8) com a terceira condição de contorno de  $r_6$ . O valor de  $\bar{\omega}_r$  será dado por  $\bar{\omega}_r = y_3$ , e o valor de  $\bar{\omega}$  por  $\bar{\omega} = y_6$ .

Uma alteração em (8) é conveniente quando se deseja calcular ciclos limite próximos de um ponto de bifurcação. Isto é feito com a introdução de um incremento (amplitude) que é prescrita por uma condição de contorno. O novo problema de valor de contorno a ser resolvido para calcular órbitas periódicas é o seguinte [5]

$$\begin{aligned}
 y'_i &= f_i, & i &= 1, \dots, 6, \\
 y'_7 &= f_7, & \text{para } \bar{t} < \bar{t}_c, \\
 y'_7 &= 0, & \text{para } \bar{t} \geq \bar{t}_c,
 \end{aligned} \quad (9a)$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned}
 r_1 &= y_1(0) - y_1(1) = 0, & r_5 &= y_2(0) = 0, \\
 r_2 &= y_2(0) - y_2(1) = 0, & r_6 &= y_1(0) - y_7(0) = 0, \\
 r_3 &= y_3(0) - y_3(1) = 0, & r_7 &= y_1(0) - y_7(1) - A = 0, \\
 r_4 &= y_4(0) - y_4(1) = 0,
 \end{aligned} \tag{9b}$$

onde as funções  $f_i$  são dadas em (10a).

Cada solução de (9) para  $A \neq 0$  é uma solução periódica de (5). A questão agora é determinar os valores de  $A$  a serem adotados. Tendo em vista que o procedimento (9) deve ser pensado como uma forma de transição de soluções estacionárias para soluções periódicas, para os fins deste trabalho o valor  $A = 0.05$  foi utilizado satisfatoriamente para obter a "primeira" solução periódica e, a partir de então, o restante do ramo periódico foi obtido resolvendo (8).

### PONTOS DE BIFURCAÇÃO DE HOPF [4]

A estrutura das soluções de muitos problemas descritos por edo's não lineares pode se alterar de uma forma dramática em certos pontos críticos do parâmetro chamados *pontos de bifurcação*. Um ponto de bifurcação de Hopf (ou um ponto de bifurcação complexo) é um ponto crítico onde soluções periódicas brotam de soluções estacionárias, com amplitudes que, partindo da amplitude *nula* no ponto de bifurcação, crescem a medida que o parâmetro aumenta (bifurcação *supercrítica*) ou diminuem (bifurcação *subcrítica*). Um ponto crítico é calculado resolvendo (5) e sua linearização simultaneamente. O sistema de cálculo de pontos de bifurcação é dado a seguir [5]

$$\begin{aligned}
 y_1' &= f_1 = \frac{2\pi}{y_6} y_2, \\
 y_2' &= f_2 = \frac{2\pi}{y_6} \left[ y_1 y_4^2 + 12S \left( \frac{16 - \pi^2(2 + y_1^2)}{y_5(1 - y_1^2)^{3/2}(2 + y_1^2)} y_2 - \frac{2\pi y_1^2}{(2 + y_1^2)(1 - y_1^2)} \left( 1 - \frac{2y_4}{y_5} \right) \right) + 2 \cos y_3 \right], \\
 y_3' &= f_3 = \frac{2\pi}{y_6} y_4, \\
 y_4' &= f_4 = \frac{2\pi}{y_6} \left[ \frac{12\pi^2 S}{(1 - y_1^2)^{1/2}(2 + y_1^2)} \left( 1 - \frac{2y_4}{y_5} \right) + \frac{48\pi S y_2}{y_5(2 + y_1^2)(1 - y_1^2)} - \frac{2}{y_1} (y_2 y_4 + \sin y_3) \right], \\
 y_5' &= f_5 = 0 & (y_5 &\equiv \bar{\omega}_r), \\
 y_6' &= f_6 = 0 & (y_6 &\equiv \bar{\omega}), \\
 y_7' &= f_7 = \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_8, \\
 y_8' &= f_8 = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} y_7 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} y_8 + \frac{\partial f_2}{\partial y_3} y_9 + \frac{\partial f_2}{\partial y_4} y_{10}, \\
 y_9' &= f_9 = \frac{\partial f_3}{\partial y_4} y_{10}, \\
 y_{10}' &= f_{10} = \frac{\partial f_4}{\partial y_1} y_7 + \frac{\partial f_4}{\partial y_2} y_8 + \frac{\partial f_4}{\partial y_3} y_9 + \frac{\partial f_4}{\partial y_4} y_{10},
 \end{aligned} \tag{10a}$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned}
 r_1 &= y_1(0) - y_1(1) = 0, & r_6 &= y_8(0) - y_8(1) = 0, \\
 r_2 &= y_2(0) - y_2(1) = 0, & r_7 &= y_9(0) - y_9(1) = 0, \\
 r_3 &= y_3(0) - y_3(1) = 0, & r_8 &= y_{10}(0) - y_{10}(1) = 0, \\
 r_4 &= y_4(0) - y_4(1) = 0, & r_9 &= y_8(0) = 0, \\
 r_5 &= y_7(0) - y_7(1) = 0, & r_{10} &= y_7(0) - 1 = 0.
 \end{aligned} \tag{10b}$$

## RESULTADOS

Em seguida serão apresentados os resultados obtidos resolvendo os problemas do valor de contorno descritos nas seções anteriores. Os problemas estão implementados em FORTRAN e rodam em um computador DEC-AXP-2100-M4/200 OpenVMS da Divisão de Mecânica Espacial e Controle do INPE (DMC/INPE).

Pressupondo que a geometria, o carregamento e o lubrificante não se alterem numa determinada aplicação, dependendo da velocidade angular do rotor, a grosso modo, os seguintes comportamentos qualitativos foram observados. O centro do rotor em regime permanente a) tende para uma solução estacionária  $(\varepsilon_0, \phi_0)$  para baixos valores de  $\bar{\omega}_r$ ; b) oscila numa órbita fechada para valores médios de  $\bar{\omega}_r$ ; c) oscila em direção ao choque com o anel externo para altos valores de  $\bar{\omega}_r$ .

Então, para alguma velocidade crítica,  $\bar{\omega}_{rc}$ , o rotor começa adquirir movimentos oscilatórios com uma dada frequência desconhecida e a seguinte estratégia foi utilizada na obtenção dos resultados: Fixado um valor de  $S(\varepsilon_0)$  o ponto de bifurcação complexo de (5) foi obtido resolvendo (10) para um valor estimado da frequência  $\bar{\omega}$ . A primeira solução periódica foi obtida resolvendo (9) para  $A = 0.05$  e, a partir de então, o restante do ramo periódico foi obtido, num processo de continuação, resolvendo (8) com  $r_6 = y_8(0) - \bar{\omega}_r^*$ . Para cada valor da velocidade um TPBVP ("Two Point Boundary Value Problem") é resolvido e, portanto, centenas de TPBVP's são resolvidos para se determinar um ramo de soluções. A rotina SOLVER foi desenvolvida para resolver um TPBVP através do método dos múltiplos tiros [5].

O espaço de parâmetros do problema consiste de uma estreita faixa no semi-plano direito do plano  $(\varepsilon_0, \bar{\omega}_r)$  com  $0 < \varepsilon_0 < 1.0$ . Neste espaço há uma curva formada por pontos de bifurcação de Hopf, i.e.,  $\bar{\omega}_{rc}(\varepsilon_0)$ , e esta curva, mostrada na figura 2, pode ser dividida em três sub-regiões de comportamento distintos. A primeira (terceira) sub-região compreende  $0 < \varepsilon_0 < 0.15$  ( $0.72 < \varepsilon_0 < 0.79$ ) onde a curva  $\bar{\omega}_{rc}(\varepsilon_0)$  é constituída de *pontos de bifurcação complexos subcríticos*. Ou seja, para valores de  $\bar{\omega}_r$  um pouco abaixo de  $\bar{\omega}_{rc}$  ocorrem órbitas periódicas instáveis.

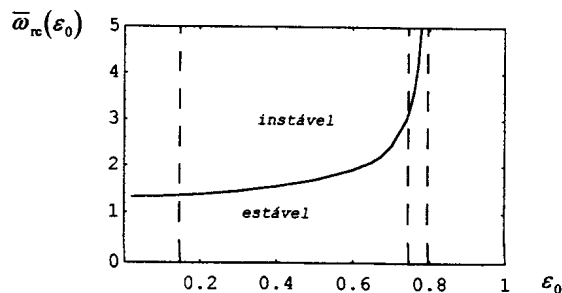


Figura 2: Curva  $\bar{\omega}_{rc}(\varepsilon_0)$  formada por pontos de bifurcação de Hopf.

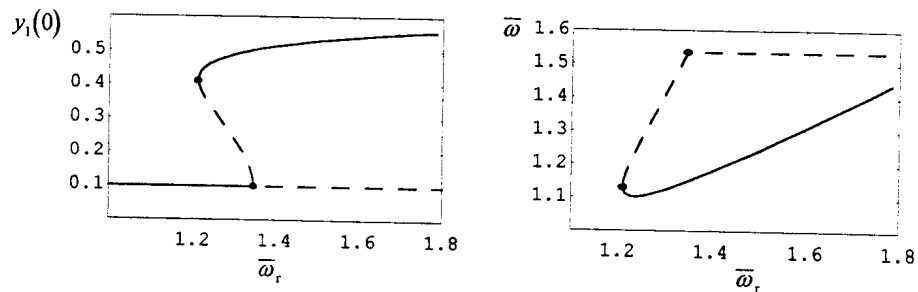


Figura 3: Máxima excentricidade,  $y_1(0) = \varepsilon(0)$ , e a frequência,  $\bar{\omega}$ , das soluções periódicas em função de  $\bar{\omega}_r$ .  $S = 0.33703$ ,  $\phi_0 = 1.5069$ ,  $\varepsilon_0 = 0.1$ . Linha cheia (tracejada) representa soluções estáveis (instáveis).

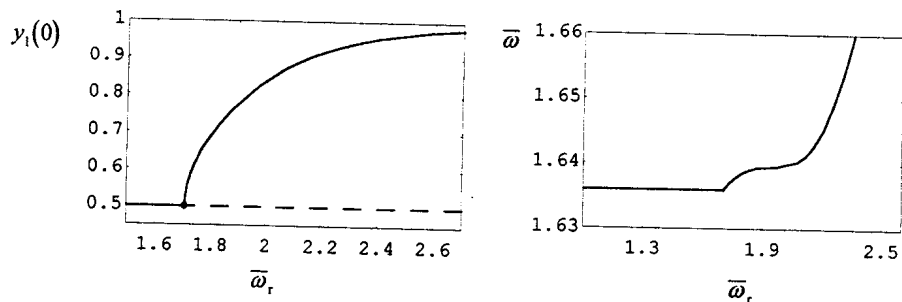


Figura 4:  $y_1(0)$  e  $\bar{\omega}$  em função de  $\bar{\omega}_r$ .  $S = 0.06177$ ,  $\phi_0 = 1.2186$ ,  $\varepsilon_0 = 0.5$ .

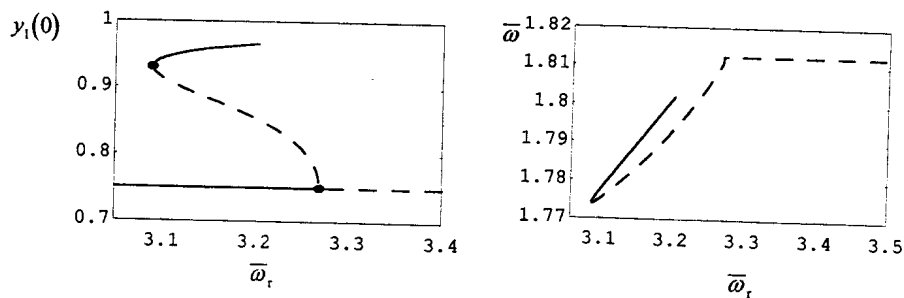


Figura 5:  $y_1(0)$  e  $\bar{\omega}$  em função de  $\bar{\omega}_r$ .  $S = 0.03094$ ,  $\phi_0 = 0.9455$ ,  $\varepsilon_0 = 0.75$ .

As figuras 3 e 5 mostram o máximo afastamento e a frequência orbitais, do centro do rotor em relação ao anel externo, para as sub-regiões consideradas, onde observa-se uma superfície de órbitas periódicas ao redor do eixo do parâmetro  $\bar{\omega}_r$ , e a presença concomitante de órbitas estáveis e instáveis para um mesmo valor do parâmetro.



A segunda sub-região compreende  $0.15 < \varepsilon_0 < 0.72$  onde a curva  $\bar{\omega}_{rc}(\varepsilon_0)$  é constituída de *pontos de bifurcação complexos supercríticos*. A figura 4 mostra o máximo afastamento e a frequência orbitais para esta sub-região.

Uma quarta sub-região compreende  $0.79 < \varepsilon_0 < 1$  onde o mancal é completamente estável para qualquer condição inicial e operacional. A presença desta sub-região atesta a potencialidade dos mancais hidrodinâmicos em suportar carregamentos unidirecionais pesados.

Finalmente, a figura 6 apresenta a síntese qualitativa dos resultados. O retângulo central representa o espaço de parâmetros do sistema  $(\varepsilon_0, \bar{\omega}_r)$  onde pode-se observar a curva  $\bar{\omega}_{rc}(\varepsilon_0)$  e três curvas operacionais representando carregamentos leve, médio e pesado. É possível observar ainda as curvas representando a máxima excentricidade das órbitas fechadas em função da velocidade do rotor. Tais curvas partem da intersecção das curvas operacionais com a curva  $\bar{\omega}_{rc}(\varepsilon_0)$ . Ao redor do retângulo central estão as trajetórias do centro do rotor em relação ao centro do anel externo, onde linhas tracejadas unem pontos operacionais no espaço de parâmetros as suas respectivas trajetórias resultantes. A figura 6 está fora de escala pois o objetivo é apenas o de ilustrar as possíveis soluções qualitativas do problema.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pela cobertura dos gastos com locomoção, inscrição e estadia do primeiro autor no X ENIEF sem a qual estaria inviabilizada a participação no evento.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] **Brindley, J., Elliot, L., McKay, J.T.** *The Role of Cavitation in Whirl Instability in a Rotor Bearing: 1. The  $\pi$ -film Model*, ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 50, pp.877-885, 1983.
- [2] **Dowson, D., Taylor, C.M.** *Cavitation in Bearings*, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 11, pp.35-66; 1979.
- [3] **Hamrock, B.J.** *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, NASA RP-1255, aug 1991.
- [4] **Hopf, E.** *Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differentialsystems*, Bericht der Mathematisch-Physischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, vol. 94, pp.1-22, 1942.
- [5] **Ricci, M.C.** *Aplicação de Métodos Numéricos de Continuação e de Bifurcações ao Problema do Mancal Hidrodinâmico Liso. Longo, Com e Sem a Presença de Cavitação*, Tese de Doutorado em Ciência Espacial/Mecânica Espacial e Controle, INPE, São José dos Campos, 1997.
- [6] **Savage, M.D.** *Cavitation in Lubrication. I. On Boundary Conditions at Fluid-Cavity Interfaces*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 80, pp.743, 1977.

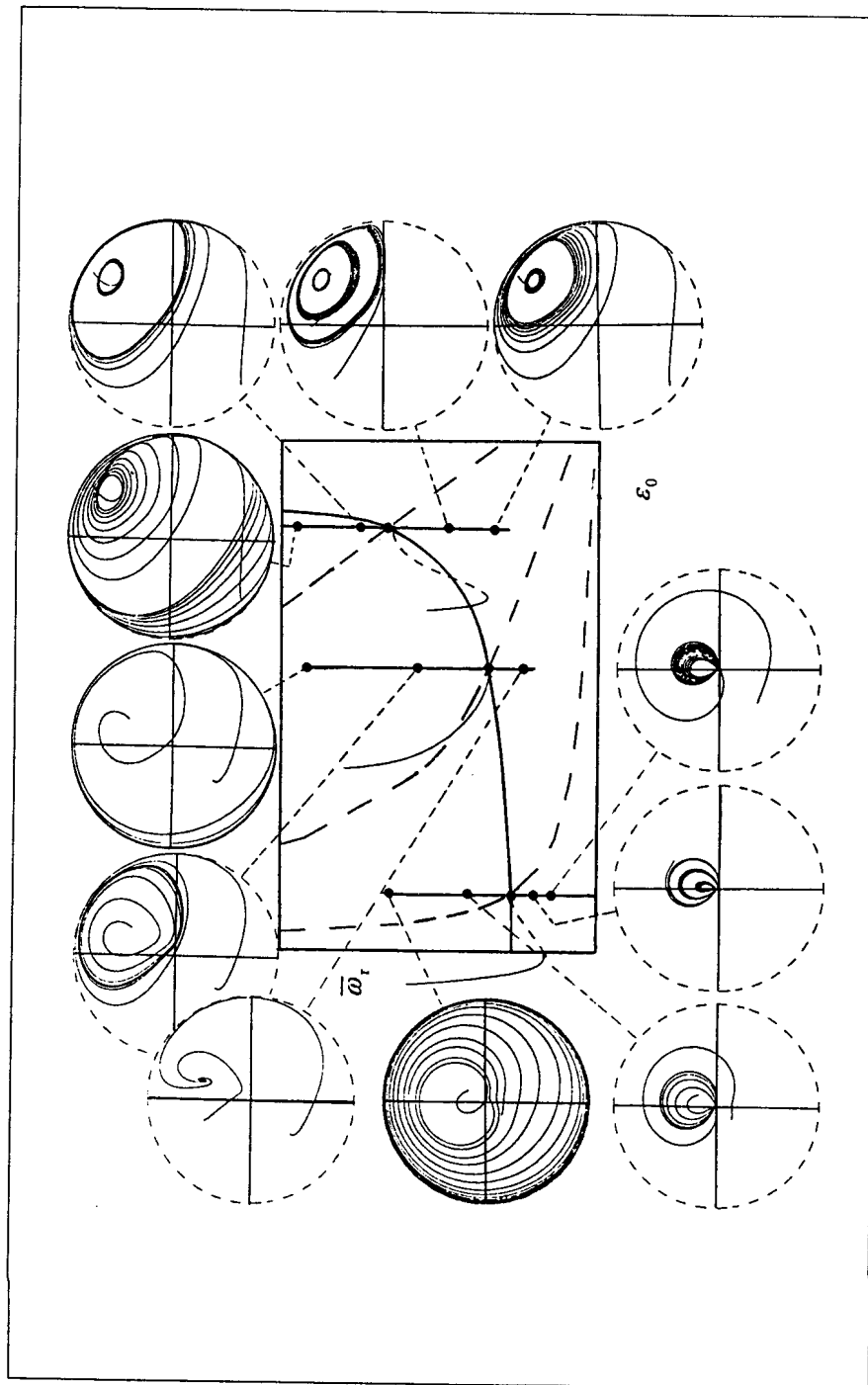


Figura 6: Sumário dos resultados para o mancal hidrodinâmico liso, longo sob cavitação filme- $z$  e carregamento constante.