

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MECÁNICA DE LA FRACTURA APLICANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

Gemma Rodríguez (\*), Berardi Sensale (\*) e Ignacio Iturrióz (\*\*)

(\*)Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, URUGUAY.

(\*\*) Universidade Passo Fundo, Passo Fundo, BRASIL.

### RESUMEN

En este trabajo se trata la aplicación del Método de los Elementos de Contorno Dual al estudio de problemas de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, bajo condiciones de modo mixto.

El cálculo del factor de intensidad de tensiones es realizado por a partir del desplazamiento de abertura de fisura en puntos ubicados muy cerca de la punta de la fisura o por medio del método de descomposición de la integral  $J$ , la cual se calcula en un camino circular con centro en la punta de cada fisura.

Finalmente se analizan algunos ejemplos en los que los resultados obtenidos muestran una muy buena concordancia con los valores disponibles en la bibliografía..

### ABSTRACT

The present work is concerned with the application of the Dual Boundary Element Method for linear elastic crack problems under mixed-mode conditions.

The stress intensity factors evaluation is carried out by the Crack Opening Displacement at collocation points extremely close to the crack tip or by the  $J$ -integral decomposition method which is applied on a circular path, defined around each crack tip.

Finally several examples are analysed and the computed results are in excellent agreement with values from the literature.

### INTRODUCCIÓN

En este siglo, con la sofisticación de los componentes estructurales, el colapso por fisuración se torna más frecuente y muchas veces catastrófico. Además de eso la sustitución de los componentes estructurales es cada vez más onerosa. Las fisuras surgen a partir de defectos internos o impurezas del material durante la etapa de fabricación y, consecuentemente, la

existencia de estos defectos no puede ser evitada. Ante este hecho consumado, se vuelve imperativo calificar y prever el comportamiento de una fisura, por lo que surgió entonces la ciencia llamada Mecánica de la Fractura.

La Mecánica de la Fractura trata cualificar y, principalmente, cuantificar la gravedad de la fisuración, con el objetivo de prever la vida útil de un componente estructural o evitar situaciones catastróficas.

El parámetro más importante creado por la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica (MFLE) fue el Factor de Intensidad de Tensión ( $K$ ), que cuantifica la magnitud del campo de tensión en la punta de la fisura permitiendo la previsión del comportamiento del cuerpo fisurado mediante comparación con la magnitud crítica, ésto es la magnitud máxima soportada por una determinada configuración física y geométrica del componente estructural fisurado. El factor de intensidad  $K$  será estudiado en este trabajo.

La Mecánica de la Fractura es aplicable a una gran cantidad de casos prácticos y por eso se hicieron tablas del factor de intensidad de tensión,  $K$ , para gran cantidad de cargas y geometrías. Pero, con la sofisticación y osadía progresiva del mundo moderno, se hicieron necesarias aplicaciones más complejas de esta ciencia. En un medio continuo, solo excepcionalmente es posible obtener una solución analítica exacta del campo de tensión y deformación de un cuerpo fisurado y como los manuales no pueden abarcar todas las configuraciones de geometría y carga posibles, surgieron entonces métodos aproximados de estimar el valor del  $K$ . Algunos de ellos usan los valores ya tabulados de  $K$ , tal como el método de superposición, de la distribución de tensión local, o método compuesto, etc... Otro método aproxima  $K$  a partir de la concentración de tensiones en entalladuras, extrapolando para la situación límite cuando el radio en el contorno de la punta de la entalladura tiende a cero. Pero, algunos de estos métodos solo pueden ser aplicados a configuraciones simples. Surgió entonces la necesidad de usar métodos más generales que pudiesen ser aplicados a cualquier configuración de carga y geometría. Dentro de las técnicas que más se destacan está el Método de los Elementos Finitos (Finite Elements Method, FEM) y el Método de los Elementos de Contorno (Boundary Elements Method, BEM), ambos ampliamente usados. Las soluciones numéricas, aunque aproximadas, se tornaron herramientas imprescindibles en la previsión del comportamiento estructural de piezas fisuradas.

El Método de los Elementos de Contorno, por exigir la discretización sólo del contorno, facilita la modelización en las cercanías de la singularidad, o sea de la punta de la fisura, pero se restringe a problemas cuya ecuación diferencial tenga soluciones fundamentales conocidas. La potencia del BEM está en su capacidad de representar con precisión soluciones con gradientes muy importantes en cuerpos elásticos y también de proveer soluciones cuasi analíticas dentro de este enfoque.

En ésto existen dos obstáculos principales: el hecho de que hayan dos superficies coplanares en la definición física de una fisura, que genera singularidad en el sistema de ecuaciones e impide la aplicación directa del BEM, y la representación del campo de tensiones, singular, en la extremidad de la fisura. En la medida de lo posible la evolución de los dos enfoques serán abordados separadamente.

Dentro del Método de los Elementos de Contorno, según Portela et al. [1], fue Watson [2], en 1986, el que introdujo la formulación mixta basada en la ecuación de los desplazamientos y su derivada en la dirección normal. El presentó problemas bi-dimensionales con fisuras inmersas en el medio. La base teórica de la formulación mixta fue presentada, en 1988, por Hong y Chen [3] en una formulación general mixta que incorpora la ecuación integral para desplazamientos y fuerzas de superficie.

Problemas con modo de fisuración mixto se pueden resolver mediante una formulación mixta evitando el uso de las subregiones que introducen un contorno artificial en el problema, lo que puede ocasionar errores debido a la aproximación en el dominio. Dentro de esta técnica cada ecuación integral sería aplicada a una superficie diferente de fisura.

Las dificultades en la aplicación de la ecuación integral para fuerza de superficie, también llamada como formulación hiper-singular, reside en las integraciones fuertemente singulares sobre el contorno [4]

En lo relativo a la aplicación de la formulación mixta a cuerpos fisurados, Portela et al. [1], 1992, presentaron una implementación numérica efectiva de la formulación hipersingular para problemas bi-dimensionales y aclararon algunas de las dificultades provenientes de esta aplicación a las superficies de las fisuras. El trabajo está limitado a fisuras descargadas. El punto nodal de definición de la punta de la fisura se suprime mediante la utilización de elementos discontinuos. No fue adoptada ninguna medida especial para representar correctamente el campo de deformaciones en el extremo de la fisura. El estudio no aproxima formalmente el punto fuente de las caras de la fisura y suprime la posibilidad de cargar la fisura estas problemas fueron resueltos por Guimaraes [4].

Los métodos de energía, integral J, el uso de elementos especiales, tipo "quarter-point" o con funciones de interpolación especiales, resuelven o esquivan la singularidad del campo de tensiones en la punta de la fisura. Casi siempre estos métodos precisan ser usados concomitantemente con la formulación mixta, o con cualquier otra que supere las singularidades provenientes de que hay dos caras de fisura coincidentes.

El concepto de la integral J se debe a Rice [5], y se basa en la invariancia de la integral J a lo largo de cualquier camino de integración que rodee la punta de la fisura. La integral J es equivalente a la variación de la energía de deformación en los análisis elásticos lineales. Su aceptación fue inmediata y abrió un camino importante en el análisis elasto-plástico de fisuras, tanto en el ámbito numérico como en el experimental. Siendo la integral J un enfoque energético, las discretizaciones refinadas de la punta de la fisura no son necesarias, debido a la pequeña contribución que los campos de tensión y deformación tienen en la energía de deformación total del cuerpo.

El campo de tensión en la punta de la fisura varía con  $(l/r)^{1/2}$  y el del desplazamiento con  $(r)^{1/2}$ . Modelar la región fisurada con funciones de forma usuales, donde la variación es polinomial, no da soluciones precisas, solo que, hipotéticamente, fueran definidas mallas extremadamente refinadas en la región crítica. Los elementos especiales fueron creados inicialmente para ser usados en el método de los elementos finitos. La mayoría modifica la función de interpolación con el objetivo de representar correctamente el comportamiento de los campos de tensión y deformación en las proximidades de la punta de la fisura. Varias

funciones de interpolación fueron creadas con esta idea, para ser usadas con elementos lineales, cuadráticos y cúbicos, semi-circulares o curvos. Una buena lista de estos trabajos puede ser obtenida en Aliabadi y Rooke [6].

### FORMULACION HIPERSINGULAR (DBEM)

La ecuación integral de contorno en un punto P, en desplazamientos es dada por:

$$c_{ij} u_j(P) = \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (1)$$

donde  $u_{ij}^*$  y  $t_{ij}^*$  son los tensores asociados a las soluciones fundamentales [7];  $u_j, t_j$  y  $b_j$  los vectores desplazamiento, tensión y densidad de fuerzas de masa;  $c_{ij}$  un tensor que depende de la geometría del contorno en el punto considerado P que vale  $\delta_{ij}/2$  si la variación del contorno es suave. El símbolo  $\int$  representa una integral de valor principal de Cauchy.

La ecuación integral hipersingular sobre un contorno que tiene variación suave se puede escribir [4] como:

$$0.5 t_j(P) = \int_{\Gamma} U_{ij}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^* b_j d\Omega \quad (2)$$

donde los tensores  $U_{ij}^*$  y  $T_{ij}^*$  provienen de la derivación de las soluciones fundamentales para obtener el tensor deformación, de la aplicación de la ley de Hooke para calcular el tensor de tensiones y del uso de la ecuación de Cauchy para obtener el vector tensión. El símbolo  $\int$  representa una integral de valor principal de Hadamard.

### EVALUACIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

El problema de propagación de fisuras en un medio continuo, origen de la Mecánica de la Fractura, exige un tratamiento numérico especial con regiones que presentan un fuerte gradiente de tensiones que imposibilitan la utilización tradicional de las técnicas computacionales. Por esta razón, fueron propuestos elementos especiales que contienen singularidades en sus funciones de interpolación [6] y técnicas como la integral J de Rice [5], que permite transformar la región de interés de la punta de la fisura a una curva que envuelve la misma, fuera del área numéricamente inestable del dominio. La formulación de Rice admite solo cargas en el contorno y permite obtener la variación de energía potencial con respecto a un incremento en la fisura a partir del estado de tensiones y variación de los desplazamientos en un camino arbitrariamente ubicado en el dominio, desde que este contenga el vértice de la fisura. En este camino se evalúa una integral de línea, la integral J, asociada al factor de intensidad de tensión para el problema. La extensión del trabajo de Rice a los efectos de incluir cargas de dominio presupone una redefinición de la ecuación para la

disminución de energía potencial, resultando una integral definida en el dominio envuelto por el camino elegido.

En este trabajo se siguió la estrategia indicada por Portela [1] para modelar la fisura; o sea, se utilizan elementos "quarter point" en la punta de la fisura, los bordes de la fisura son modelados con elementos cuadráticos discontinuos, mientras que en el resto del contorno se usan elementos cuadráticos continuos, excepto en la intersección del contorno con la fisura donde se emplean elementos cuadráticos discontinuos. Se calcula el factor de intensidad de tensiones de dos maneras, mediante el desplazamiento de la abertura de la fisura COD, y mediante la integral J de Rice

#### Calculo del factor de intensidad de tensiones mediante el COD

Para calcular el factor de intensidad de tensiones, se utilizó la fórmula de un punto tomada de la comparación directa entre el desplazamiento del nodo central y las expresiones de Irwin [6]:

$$K_I = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \Delta u_2 \sqrt{2\pi/\rho} \quad (3)$$

$$K_{II} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \Delta u_1 \sqrt{2\pi/\rho} \quad (4)$$

donde  $\rho$  es la distancia entre el nodo central del elemento y la punta de la fisura,  $\Delta u_i$  la abertura de la fisura, E el modulo de Young y  $\nu$  el coeficiente de Poisson.

#### Calculo del factor de intensidad de tensiones mediante la integral J

La integral J es un método efectivo para determinar el factor de intensidad de tensiones, porque el Método de los Elementos de Contorno, permite calcular con precisión el campo elástico.

Considerando un sistema de coordenadas locales  $x_1, x_2$  en la punta de la fisura, y donde la fisura se sitúa a lo largo del eje  $x_1$ , se define la integral J como [5]:

$$J_k = \int_{\Gamma} (W n_k - t_j u_{j,k}) d\Gamma \quad (5)$$

donde  $\Gamma$  gama es un contorno arbitrario que rodea la punta de la fisura, W la energía de deformación,  $n_i$  el versor normal al camino gama,  $u_i$  el vector desplazamiento y  $t_i$  el vector densidad de fuerzas de contacto.

La relación entre las componentes de la integral J y el factor de intensidad de tensiones viene dado por

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E}, J_2 = -\frac{2K_I K_{II}}{E} \quad (6)$$

done  $E'$  es el modulo de elasticidad  $E$  para estado plano de tensiones y es  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$  para estado plano de deformaciones.

La aplicación de la ecuación anterior a problemas de fisuración en el modo mixto, se ve en la dificultad de poder desacoplar los modos I y II del factor de intensidad de tensiones a partir de los componentes de la integral  $J$ .

Kitaga et.[8] al. proponen un procedimiento simple basado en la descomposición del campo elástico en sus partes simétrica y antisimétrica el cual permite desacoplar el factor de intensidad de tensiones para un problema de modo mixto.

En este procedimiento, la integral  $J_1$  se representa como la suma de las siguientes integrales:

$$J_1 = J_1^I + J_1^{II} \quad (7)$$

donde los superíndices indican el correspondiente modo de deformación. Para que esta representación sea posible, alcanza con introducir la siguiente representación del campo elástico:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^I \\ \sigma_{22}^I \\ \sigma_{12}^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma'_{11} \\ \sigma_{22} + \sigma'_{22} \\ \sigma_{12} - \sigma'_{12} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^{II} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma'_{11} \\ \sigma_{22} - \sigma'_{22} \\ \sigma_{12} + \sigma'_{12} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

y

$$\begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u'_1 \\ u_2 - u'_2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - u'_1 \\ u_2 + u'_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

en donde

$$\sigma'_{ij}(x_1, x_2) = \sigma_{ij}(x_1, -x_2) \quad (10)$$

y

$$u'_i(x_1, x_2) = u_i(x_1, -x_2) \quad (11)$$

Las ecuaciones (8) y (9) llevan a la siguiente descomposición del campo elástico:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II}, \quad u_i = u_i^I + u_i^{II} \quad (12)$$

Cuando las dos últimas ecuaciones se introducen en la definición de la integral  $J$  se obtiene la ecuación (7) donde las componentes de la integral  $J$  quedan dadas por :

$$J_i^M = \int_{\Gamma} (W^M n_i - t_j^M u_{,i}^M) d\Gamma \quad (13)$$

para  $M=I$  o  $M=II$ .

Finalmente se concluye que:

$$J_I^I = \frac{K_I^2}{E}, \quad J_I^{II} = \frac{K_{II}^2}{E} \quad (14)$$

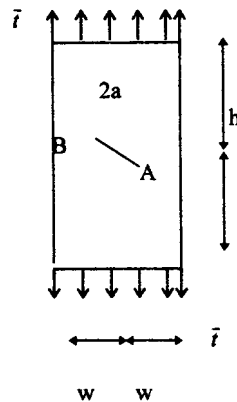
## RESULTADOS

### Placa rectangular con una fisura central inclinada

Este problema fue analizado por Portela et al.[1] y Saez et al.[9] se trata de una placa rectangular con una fisura central bajo el efecto de una tensión uniforme de tracción, aplicada en sus dos lados opuestos como se muestra en la siguiente figura,

La fisura tiene longitud  $2a$  y esta inclinada  $45$  grados con respecto a los lados de la placa, se estudio el problema para distintas relaciones entre le longitud  $2a$  de la fisura y el ancho  $2w$  de la placa.

Se empleo una discretizacion con 48 elementos de variación cuadratica de los cuales 16 se distribuyeron en la fisura en las relaciones 0,1-0,2-0,3 y 0,4 a partir de la punta de la fisura y en forma simétrica respecto del centro.



En la tabla siguiente se solución dada por Murakami [10] para el factor de intensidad de tensiones en el punto B, con las soluciones obtenidas en este trabajo mediante el COD, y la integral J, para 5 caminos diferentes dados por circunferencias con centro en la punta de la fisura y que pasan por los nodos 3,4,5,8, y 12 a partir de la punta de la fisura.

a/w	$K_I / (\bar{i} \sqrt{\pi c})$ en B						
	exacto	COD	J(3)	J(4)	J(5)	J(8)	J(12)
0,2	0,518	0,5203	0,55092	0,51865	0,51868	0,51854	0,51853
0,3	0,541	0,543	0,57551	0,5412	0,54121	0,54106	0,54105
0,4	0,572	0,5746	0,60858	0,57247	0,57248	0,57233	0,57231
0,5	0,612	0,6152	0,65167	0,6125	0,61249	0,61233	0,61234
0,6	0,661	0,6654	0,66689	0,66177	0,66172	0,66155	0,66202

a/w	ERRORES (%)						
	exacto	COD	J(3)	J(4)	J(5)	J(8)	J(12)
0,2	0,0	0,44	6,35	0,125	0,13	0,1	0,1
0,3	0,0	0,37	6,38	0,04	0,04	0,01	0,01
0,4	0,0	0,45	6,4	0,08	0,08	0,06	0,05
0,5	0,0	0,53	6,48	0,082	0,08	0,05	0,06
0,6	0,0	0,67	0,89	0,116	0,11	0,08	0,15

a/w	$K_{II} / (\bar{i} \sqrt{\pi c})$ en B						
	exacto	COD	J(3)	J(4)	J(5)	J(8)	J(12)
0,2	0,507	0,5091	0,48141	0,50639	0,50758	0,50743	0,50742
0,3	0,516	0,518	0,48954	0,51524	0,51648	0,51632	0,5163
0,4	0,529	0,5305	0,50128	0,52781	0,52908	0,52892	0,52891
0,5	0,546	0,5469	0,51659	0,54431	0,54565	0,54548	0,54549
0,6	0,567	0,5675	0,55027	0,56515	0,56659	0,5664	0,56691

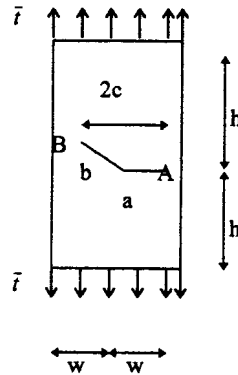
a/w	ERRORES (%)						
	exacto	COD	J(3)	J(4)	J(5)	J(8)	J(12)
0,2	0,0	0,4	-5,05	-0,12	0,114	0,085	0,08
0,3	0,0	0,39	-5,13	-0,15	0,093	0,062	0,06
0,4	0,0	0,28	-5,24	-0,22	0,015	-0,015	-0,017
0,5	0,0	0,165	-5,39	-0,31	-0,064	-0,095	-0,093
0,6	0,0	0,088	-2,95	-0,33	-0,072	-0,105	-0,016

#### Placa rectangular con una fisura central quebrada

El segundo ejemplo analizado, el cual también fue estudiado por Portela et. al.[1] y Saez et. al. [9] se trata de una placa rectangular traccionada, conteniendo una fisura quebrada como se muestra en la siguiente figura.



Se empleó una discretización con 50 elementos de variación cuadrática de los cuales 18 se distribuyeron en la fisura en las relaciones 0,1-0,2-0,3 y 0,4 a partir de la punta de la fisura en B, y 0,33-0,27-0,2-0,13 y 0,07 en A.



$K_I / (\bar{i}\sqrt{\pi c})$  en B

	Exacto	COD	J(3)	J(4)	J(5)	J(8)	J(12)
0.4	0.574	0.5755	0.57756	0.57587	0.57547	0.57541	0.57474
0.6	0.568	0.568	0.57125	0.5708	0.57061	0.56951	0.56899

ERRORES (%)

0.4		0.26	0.62	0.33	0.26	0.25	0.13
0.6		0.00	0.57	0.49	0.46	0.27	0.17

$K_{II} / (\bar{i}\sqrt{\pi c})$  en B

	Exacto	COD	J(3)	J(4)	J(5)	J(8)	J(12)
0.4	0.607	0.6079	0.61043	0.60836	0.60905	0.60904	0.60908
0.6	0.627	0.6283	0.6316	0.63038	0.63127	0.63012	0.6304

ERRORES (%)

0.4		0.15	0.57	0.22	0.34	0.33	0.34
0.6		0.21	0.73	0.54	0.68	0.50	0.54

$K_I / (\bar{i}\sqrt{\pi c})$  en A

	Exacto	COD	J(3)	J(4)	J(5)	J(8)	J(12)
0.4	0.990	0.9956	0.98304	0.99328	0.99216	0.99249	0.99237
0.6	0.986	0.9933	0.98013	0.99023	0.98913	0.98947	0.98936

ERRORES (%)

0.4		0.57	-0.70	0.33	0.22	0.25	0.24
0.6		0.74	-0.60	0.43	0.32	0.35	0.34

$$K_{II} / (\bar{r}\sqrt{\pi c}) \text{ en A}$$

	Exacto	COD	J(3)	J(4)	J(5)	J(8)	J(12)
0.4	0.033	0.0343	0.03411	0.03378	0.03382	0.03384	0.03465
0.6	0.030	0.0311	0.03102	0.03076	0.03079	0.03081	0.0304

**ERRORES (%)**

0.4		4.00	3.36	2.36	2.48	2.54	5.00
0.6		3.67	3.40	2.53	2.63	2.70	1.33

**REFERENCIAS**

- [1] Portela, A. y Aliabadi, M.H.-*The Dual Boundary Element Method: effective implementation for crack problems*. Int.Journ.Numer.Methods Eng.,vol.33,1269-1287, 1992
- [2] Watson,J.O.- *Hermitiancubic and singular elements for plane strain*. in Developments in .Boundary Elements 4, Elsevier Applied Science Publishers, Barking,U.K. ,1986
- [3] Hong,H. and Chen, J.- *Derivations of integral equations of elasticity*. J. Eng. Mech. ASCE, 114,1028-1044, 1988
- [4]Guimaraes, S. and Telles, J.C.F.-*On the hyper-singular boundary-element formulation for fracture-mechanics applications*. Engng.Anal.Boundary Elements,13 ,353-363 ,1994.
- [5] Rice,J. ,R.- *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration otches and cracks*. J. Appl. Mech. ASME, 35, 379-386 (1968)
- [6] Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P.- *Numerical Fracture Mechanics*. Computational Mechanics Publications, Southampton (1991).
- [7] Kane, J.H. - *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice-Hall, Inc., (1994).
- [8] Kitagawa, H., Okamura, H. and Ishikawa, H. - *Application of J-integral to mixed-mode crack problems*, trans. JSME, No 760-13, 46-48 (1976)
- [9] Saez, Z., Gallego, R. y Dominguez, J.- *Hypersingular quarter-point boundary elements for crack problems*. Int. Journ. Numer. Methods Eng., vol.38, 1681-1701, (1995).
- [10] Murakami, Y. *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, Oxford, (1987).