Mecánica Computacional, Volumen XVIII - pp. 329-338
Compilado por: E. Dari, C. Padra y R. Saliba
San Carlos de Bariloche, noviembre de 1997

EXPERIMENTOS NUMERICOS SOBRE EL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ APLICADO A PLACAS DOBLEMENTE CONEXAS

Daniel R. Avalos, Hilda A. Larrondo,
Depto. de Física, Facultad de Ingeniería, U.N.M.D.P.
7600 - Mar del Plata
Patricio A.A. Laura, Raúl E. Rossi.
Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET),
Depto. de Ingeniería (UNS)
8000 - Bahía Blanca
A R G E N T I N A

RESUMEN.

Debido a requerimientos operacionales es común el practicar orificios que permitan el paso de conductos, cables, etc. en losas o placas (sea en aplicaciones de ingeniería civil, mecánica y naval como también en paneles de equipos electrónicos y plaquetas de circuitos impresos). Dichos orificios alteran las características estructurales del sistema en cuestión. En este trabajo se determinan las frecuencias fundamentales de vibración de placas isótropas rectangulares simplemente apoyadas con orificios rectangulares de bordes libres mediante el método energético y se muestra muy buen acuerdo con autovalores determinados mediante el método de elementos finitos. También se hace referencia a resultados obtenidos por los autores en el caso de placas ortótropas.

ABSTRACT.

Numerical experiments are performed on the determination of the fundamental frequency of transverse vibration of simply supported rectangular plates having rectangular holes with free edges. This constitutes a rather common technological situation since holes are practiced in plates or slabs due to operational conditions, namely passage of conduits or ducts, electric conductors, etc.
Satisfying exactly the governing natural boundary conditions at the hole edges is practically an impossible task. This study reviews numerical experiments where the displacement function is expanded into a double Fourier series which constitutes the exact solution when the plate is simply connected. Satisfactory convergence is achieved when the plate is doubly connected.

INTRODUCCIÓN.

Sea el caso de una placa rectangular con tres bordes empotrados y el cuarto libre, Figura 1.
Es conocido el hecho de que Poisson intentó resolver el problema considerando las tres condiciones mecánicas

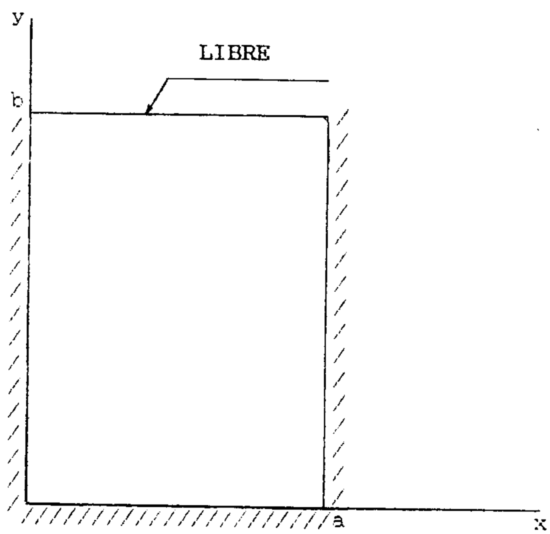

FIGURA 1 - Placa rectangular con tres bordes empotrados y el cuarto: libre.

"evidentes" en el cuarto borde, o sea requiriendo que:

$$M_y = Q_y = M_{yx} = 0 \qquad (y = b) \qquad (1)$$

donde M_y = momento flector en la dirección y

Q_y = esfuerzo de corte en $y = b$

M_{yx} = momento torsor en $y = b$

Dado que el conjunto de simplificaciones utilizadas en la derivación de la clásica ecuación de Lagrange-Sophie Germaine, conduce a una ecuación diferencial a derivadas parciales de cuarto orden, el intento de utilizar (1) conduce a un sistema diferencial sobredeterminado.
Fueron Lord Kelvin y Kirchhoff quienes resolvieron el equívoco substituyendo a (1) por:

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{y=b} = 0 \qquad (2a)$$

$$Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}\Bigg|_{y=b} = -D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y}\right]\Bigg|_{y=b} = 0 \qquad (2b)$$

donde (2b) constituye una equiparación mecánica del problema ($Q_y = M_{yx} = 0$) válida, por el principio de St Venant, a distancias del borde mayores que el espesor de la placa.
A pesar de la simplificación mecánica y por ende, matemática del problema, no resulta sencillo, encontrar funciones coordenadas que permitan satisfacer idénticamente las condiciones (2). Por esto constituye una práctica común, en problemas de vibraciones y, al utilizar el método de Rayleigh - Ritz, emplear la aproximación:

$$W(x,y) \simeq W_a(x,y) = \sum_n \sum_m A_{nm} W_{nm}(x,y) \qquad (3)$$

donde W_{nm} es el producto de "funciones - viga" que satisfacen idénticamente, las ecuaciones de vibraciones libres de vigas prismáticas.
En el caso de la Figura 1, X_n satisface las condiciones de borde de una viga doblemente empotrada mientras que Y_n las de una viga empotrada - libre.
Se hace entonces evidente que en el caso de una placa donde se practica un orificio cuyos bordes permanecen libres (Figura 2) las dificultades analíticas son considerablemente mayores que en la situación analizada previamente.
Se reseñan algunas soluciones obtenidas por los autores para placas simplemente apoyadas, tanto isótropas como ortótropas, con orificios rectangulares o circulares y teniendo en cuenta la presencia de masas (motores o máquinas) montadas elásticamente sobre el sistema estructural en estudio [1,2].

Solución Analítica Aproximada.

Es sumamente simple. Consiste en utlizar la solución exacta válida para la placa simplemente conexa que, en el caso de modos normales de vibración queda expresada en términos de la solución de Navier:

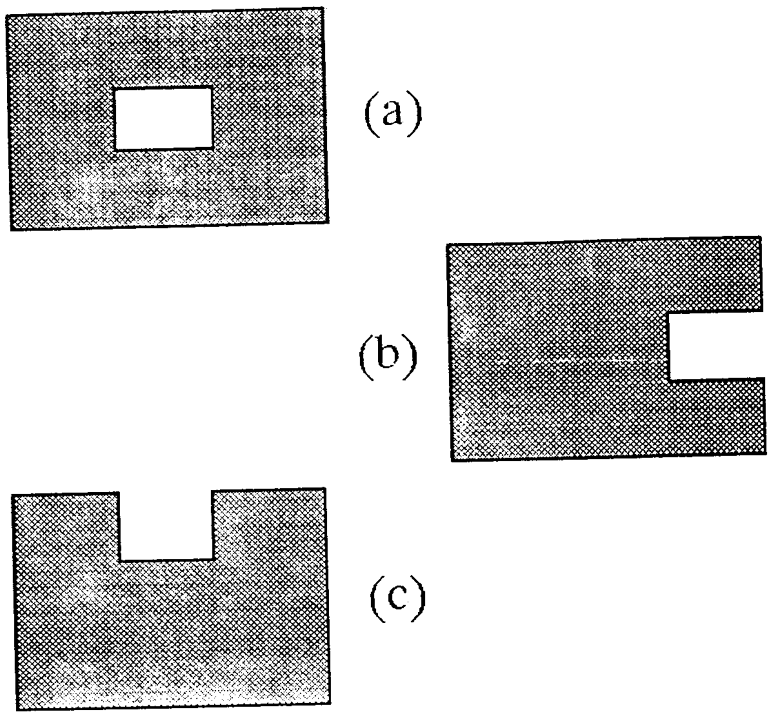

FIGURA 2: Placa simplemente apoyada con orificios [1].

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \qquad (4)$$

donde $W(x,y)$ = amplitud de desplazamiento.
Uno deduce de la funcional correspondiente a la placa llena, que en el caso de isotropía es:

$$J[W] = \frac{D}{2}\int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}$$

$$- \frac{\rho h \omega^2}{2} \int_0^a \int_0^b W^2 \, dxdy \qquad (5)$$

la funcional subsidiaria, $J_s[W]$, que corresponde al orificio. La condición

$$\frac{\partial}{\partial A_{nm}} \left(J[W] - J_s[W] \right) = 0 \qquad (6)$$

conduce, en última instancia, a un determinante ecuación en las frecuencias naturales del sistema. El procedimiento es lícito en virtud de que la metodología de Rayleigh–Ritz no requiere satisfacer las condiciones naturales del sistema (las condiciones en el contorno del orificio). Dado que (4) constituye un conjunto completo de funciones, al incrementar el orden del determinante - ecuación, se convergerá a los autovalores exactos [3-4].

Resultados Numéricos.

Las determinaciones numéricas fueron efectuadas tomando el coeficiente de Poisson (ν) igual a 0.3 en el caso de placas isótropas.
La Tabla I contiene valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_1 = \sqrt{\rho h/D}\ \omega_1 a^2$ en el caso de placas cuadradas con orificios cuadrados concéntricos. Se muestran los valores obtenidos utilizando ecuaciones-determinantes (401x401) y (901/901) y los resultados calculados mediante un código de elementos finitos basado en el elemento desarrollado por Bogner y colaboradores [5].
El acuerdo es excelente en todos los casos y también lo es para las configuraciones (b) y (c) mostradas en la Figura 2, Tablas II y III respectivamente.
Del análisis de la Tabla I se deduce que para pequeños orificios el parámetro Ω_1 disminuye pero luego aumenta, con respecto a la placa sólida, a partir de a_1/a = 1/3 y para a_1/a igual a 0.5 el valor de Ω_1 es prácticamente un 20% más alto que el valor correspondiente a la placa sólida. Este fenómeno, rigidización dinámica, es de interés tecnológico en diversas aplicaciones [6-7].
El enfoque discutido en estas Secciones ha sido extendido en la Referencia [2] de modo de poder tratar el problema de vibraciones de una placa rectangular ortótropa, caracterizada por rigideces D_1, D_2 y D_k, en la cual se ha

efectuado un orificio rectangular o circular y que sostiene una masa vinculada elásticamente a la placa o losa, Figura 3. Cuando gobiernan otras combinaciones de condiciones de borde será necesario aproximar a la función amplitud de desplazamiento mediante otras funciones coordenadas, por ejemplo funciones-vigas.
En el caso de una placa anisótropa, caso general, y de considerable interés tecnológico, se hace necesario plantear la funcional anisótropa [8]

$$J[W] = \frac{1}{2}\iint\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 + 2\,D_{12}\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + 4\,D_{66}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2 + 4\left(D_{16}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]dx\,dy - \frac{\rho h\omega^2}{2}\iint W^2\,dx\,dy \qquad (7)$$

Al resolver la funcional (7) utilizando funciones-viga solo es posible satisfacer las condiciones esenciales ya que aún en el caso más simple - el correspondiente a placas isótropas y ortótropas con los cuatro bordes simplemente apoyados - no es factible satisfacer idénticamente la condición de momento normal al borde igual a cero, ya que para una placa anisótropa esta condición se expresa en la forma

$$M_x\Big|_{x=0,a} = -\left(D_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\,D_{16}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)\Bigg|_{x=0,a}$$

$$M_y\Big|_{y=0,b} = -\left(D_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\,D_{26}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)\Bigg|_{y=0,b}$$

resultando inmediato el comprobar que las funciones $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\ \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b}$ no satisfacen la condición de nulidad de los momentos normales a los bordes.
El tema será estudiado a corto plazo por los autores.

AGRADECIMIENTOS.

El presente estudio ha sido auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Técnica (Universidad Nacional de Mar del Plata y Universidad Nacional del Sur) y por el CONICET (PIA 6002/96).

REFERENCIAS.

1. D.R. Avalos, H.A. Larrondo, P.A.A. Laura and R.E. Rossi.1997. Journal of Sound and Vibration 202, 585-592. Transverse vibrations of simply supported rectangular plates with rectangular cutouts carrying an elastically mounted concentrated mass.

2. D.R. Avalos, H.A. Larrondo and P.A.A. Laura. 1997. Instituto de Mecánica Aplicada, CONICET (Bahía Blanca,

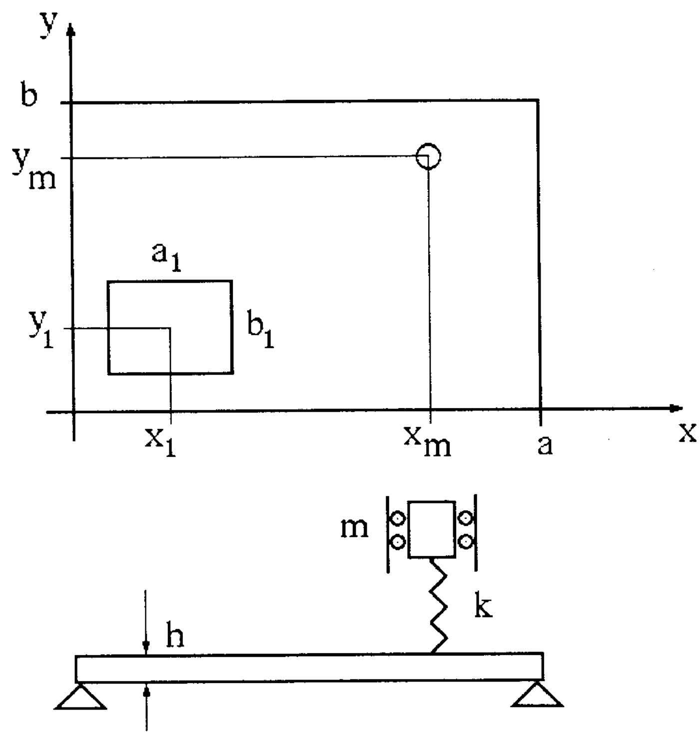

FIGURA 3: Placa simplemente apoyada con un orificio, soportando una masa montada elásticamente sobre la losa o placa [2].

Argentina). Publicacion N° 97-17. Transverse vibrations of simpply supported orthotropic plates with rectangular and circular cutouts carrying an elastically mounted concentrated mass.

3. L.V. Kantorovich and V.I. Krylov. Approximate Methods of Higher Analysis (P. Noordhoff, Ltd. Groningen, 1964).

4. S.G. Mikhlin. Variational Method in Mathematical Physics (Pergamon Press, 1964).

5. F.K. Bogner, R.L. Fox and L.A. Schmidt. 1966. Matrix methods in structural mechanics AFFDL-TR-66-80, 397-443. The generation of inter-element compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas.

6. P.A.A. Laura, R.E. Rossi and M.J. Maurizi.1991. The Shock and Vibration Digest 23, 3-7. Dynamic stiffening of structural elements.

7. P.A.A. Laura, L.Ercoli and S. La Malfa. 1995. Acustica 81, 196-197. Dynamic stiffening of a printed circuit board.

8. S.G. Lekhnitskii. 1968. Anisotropic Plates Gordon and Breach Science Publishers, New York, N.Y.

a_1/a	Método Analítico		Elementos Finitos (144 elementos)
	401 x 401	901 x 901	
0.1	19.517	19.486	19.463
1/6	19.268	19.228	19.205
0.2	19.205	19.168	19.147
0.3	19.512	19.481	19.463
1/3	19.819	19.790	19.772
0.4	20.815	20.788	20.773
0.5	23.519	23.491	23.473

TABLA I - Valores de Ω_1 en el caso de placas cuadradas con perforaciones cuadradas concéntricas [1], Figura 2(a).

b/a	a_1/a	Método Analítico		Elementos Finitos (144 elementos)
		401 x 401	901 x 901	
1	0.1	19.72	19.72	19.72
1	0.2	19.54	19.52	19.52
1	0.3	19.14	19.12	19.13
2/3	0.1	32.06	32.05	32.05
2/3	0.2	31.82	31.81	31.81
2/3	0.3	31.37	31.35	31.35

TABLA II - Valores de Ω_1 en el caso de placas rectangulares con orificios rectangulares, Figura 2(b) [1].
NOTA: $a_1/a = b_1/b$.

b/a	a_1/a	Método Analítico		Elementos Finitos (144 elementos)
		401 x 401	901 x 901	
1/2	0.1	49.27	49.23	49.21
1/2	0.2	47.89	47.79	47.70
1/2	0.3	44.55	44.38	44.26
1/2	0.4	41.42	41.26	41.13
1/2	0.5	40.50	40.36	40.25

TABLA III - Valores de Ω_1 en el caso de placas rectangulares con orificios rectangulares, Figura 2(c) [1].
NOTA: $a_1/a = b_1/b$.