

## CARGA LIMITE DE CASCAS ESTRUTURAIS COM FORMAS REVERSAS

**Maria del Pilar A M Rodríguez Carneiro Gomes**

Departamento de Estruturas da FAU, Programa de Engenharia Civil da COPPE  
Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Cidade Universitária, Ilha do Fundão, 21941-590 Rio de Janeiro, Brasil  
E-mail: pilar@coc.ufrj.br

### RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar a importância da determinação previa da carga limite de cascas reversas em função de sua forma, de suas dimensões e das tensões efetivas dos materiais empregados em sua construção. A carga limite é determinada por um programa de computador que realiza análises geometricamente não lineares baseado no método dos elementos finitos. O programa utiliza elementos de casca do tipo Serendipity, Heterosis ou Lagrangiam. As estruturas das cascas discretizadas em elementos finitos com diferentes espessuras são apresentadas a um programa de computador. Os resultados da análise através do programa em conjunto com a utilização dos números  $\pi$ , determinados pela análise dimensional, permitem o desenvolvimento dos gráficos que tornam possível a determinação da carga limite de cascas semelhantes. Os gráficos e os exemplos de aplicação dos mesmos são incluídos neste trabalho.

### ABSTRACT

The objective of this work is the determination of the limit load of reversal shell structures in correspondence with its thickness and the material that will be used, at the beginning of the analysis. The limit load is determined by a computer program for geometrically non linear analysis based on Finite Element Method. This software uses quadratic elements of shells like Serendipity, Heterosis or Lagrangiam. Shell structures discretized into finite elements with different thickness are presented to a computer program. The results of this program analysis and the usage of the  $\pi$ -numbers described through the dimensional analysis allow the development of graphics that make it possible to determinate the limit load of similar shells. The graphics and the examples of its application are included in this work.

### INTRODUÇÃO

O projeto de cascas é facilitado se for feita a escolha da espessura adequada em função do tipo de casca e do material a ser utilizado.

Através de um programa de computador baseado no método dos elementos finitos é possível registrar, numa análise incremental iterativa, as cargas com os respectivos deslocamentos que permitem traçar gráficos que possibilitam a visualização da carga limite que provoca a ruptura de um determinado tipo de casca.

O programa discretiza os elementos em camadas ao longo da espessura.. As análises podem ser física ou geometricamente não lineares. A integração pode ser reduzida ou seletiva.

Com os recursos da análise dimensional, são escolhidas as grandezas com as quais podem ser preparados os ábacos adimensionais que fornecem a carga limite para cascas de diferentes formas, em função das dimensões e das tensões do material. A carga limite obtida através da análise varia em função da espessura adotada. Utilizando a carga limite é possível escolher, com a ajuda dos ábacos, a espessura ideal para um determinado tipo de casca em função de suas dimensões e do tipo de material a ser empregado, o que permite a otimização do projeto.

São incluídas neste trabalho, as bases da análise dimensional que mostram como é feita a preparação dos ábacos para a determinação da carga limite de cascas reversas. São dados exemplos de determinação da carga limite através da aplicação dos ábacos a cascas com formas semelhantes às analisadas neste trabalho.

### MÉTODOS

A técnica descrita neste trabalho pode ser utilizada para qualquer tipo de casca. O objetivo deste trabalho é mostrar sua aplicação em cascas que apresentam formas reversas. Estas são as estruturas onde uso dos gráficos para cascas similares pode resolver o problema da espessura facilmente.

A carga limite é determinada pelo programa de computador descrito em [1]. A análise dimensional é feita através do uso dos números  $\pi$ , como descrito em [4] e [5].

### MODELO DE CAMADAS

Os elementos são discretizados em camadas ao longo da espessura. Se a casca é formada de uma série de camadas, do mesmo material ou de materiais diferentes, cujas propriedades e tensões são funções descontínuas, deve ser feita uma integração apropriada, através da espessura. Nos problemas de não-linearidade material, o perfil das tensões na direção da espessura deve ser conhecido num razoável número de pontos, onde as leis constitutivas são satisfeitas.

Nos problemas de cascas protendidas, a não-linearidade do concreto comprimido, fissuração e armação necessitam de uma representação conveniente ao longo da espessura. Na presente formulação de elementos finitos, todos estes casos são considerados de uma maneira simples e efetiva usando a técnica de divisão em camadas, onde um esquema de integração nos pontos médios é adotado para cada camada.

As camadas são numeradas seqüencialmente, começando na superfície inferior da casca. Cada camada possui pontos de tensão em sua superfície média. As componentes da tensão da camada são computadas para estes pontos de tensão, assumindo-se que se mantenham constantes através da espessura de cada camada.

Podem ser empregadas camadas de espessuras diferentes, bem como número diferente de camadas por elemento. A especificação da espessura da camada em termos da coordenada curvilínea permite a variação da espessura da camada de acordo com a variação da espessura da casca.

### FORMA DAS CASCAS REVERSAS

Os gráficos apresentados neste trabalho, foram determinados para cascas reversas com esta forma e podem ser utilizados para cascas com formas similares.

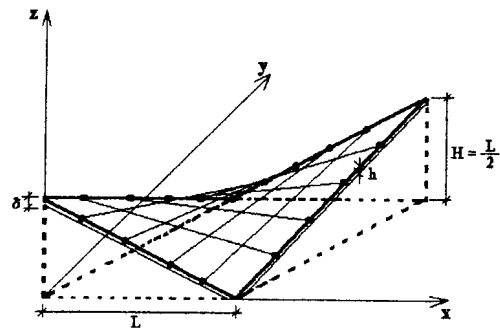


Figura 1: Forma do Parabolóide-Hiperbólico

### MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

O modelo de elementos finitos utilizado nas análises foi:

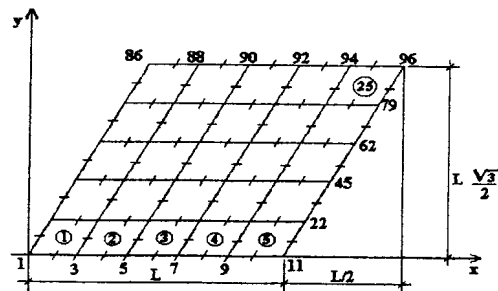
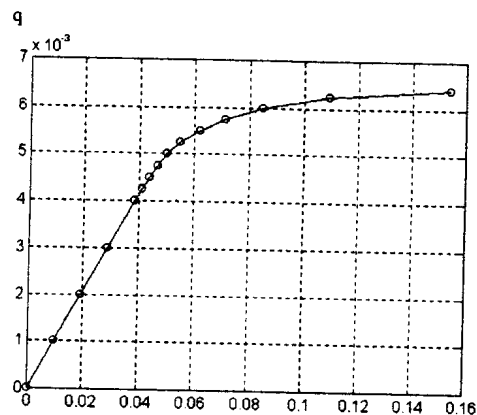


Figura 2: Modelo de elementos finitos para cascas em forma de parabolóide-hiperbólico

### CARGA LIMITE

Numa análise incremental iterativa é possível registrar as cargas, com os respectivos deslocamentos, que permitem traçar gráficos que possibilitam a visualização da carga limite que provoca a rutura de um determinado tipo de casca. Esta é a carga limite obtida através de uma análise fisicamente não-linear de uma casca em forma de parabolóide-hiperbólico com  $L=20.0m$ ,  $\sigma_0 = 4.1 \text{ MN/m}^2$  e espessura  $h = 20 \text{ cm}$ .



q	$\delta_1 \times 10^{-2}$
0.0	0.0
0.001	0.9591
0.002	1.9184
0.003	2.8775
0.004	3.8389
0.00425	4.1008
0.0045	4.3652
0.00475	4.6489
0.0050	4.9807
0.00525	5.4667
0.0055	6.2090
0.00575	7.1456
0.0060	8.4998
0.00625	10.9198
0.0064	15.4017

$\delta_1$  = deslocamento vertical ( nós números 1 e 96)

$\delta_1$

Figura 3: Carga limite

Esta curva foi obtida aumentando a carga de  $0.001 \text{ MN/m}^2$  a  $0.0064 \text{ MN/m}^2$ . A plastificação começa com a carga  $0.00385 \text{ MN/m}^2$  no ponto de Gauss I, da camada # 1 dos elementos # 5 e # 21. Ocorre plastificação da camada # 1 até a camada # 8 quando a carga alcança o valor  $0.00425 \text{ MN/m}^2$ . Com a carga  $0.0050 \text{ MN/m}^2$  a plastificação se estende aos elementos # 4, # 10, # 16 e # 22, e com a carga  $0.00602 \text{ MN/m}^2$  ao elemento # 13. Ainda aumentando a carga plastificam os elementos # 8, # 12, # 14, # 18 e os elementos # 7 e # 19. A tabela indica os incrementos de carga e as correspondentes camadas plastificadas dos elementos e a figura 4 apresenta a mesma plastificação separando-a por camadas superiores e inferiores.

Carga	Camadas dos elementos plastificadas com carga permanente				
	5-21	7-19	8-12-14-18	13	4-10-16-22
0.00385	I 1				
0.00400	I III 1				
0.00425	III 1-8				
0.00500	III 1-8				III 8
0.00602	I-IV 1-8			II III 1	III 1-8
0.00612	I-IV 1-8		II 1	II III 1	III 1-8
0.00620	I-IV 1-8	IV 8 1	II 8 2 1	II III 8 1	III 1-8
0.00632	I-IV 1-8	I IV 8 1	II IV 8 2 1	I-IV 8 2 1	III IV 1-8
0.00637	I-IV 1-8	I-IV 8 1	II IV 8 2 1	I-IV 8 2 1	III IV 1-8
0.00640	I-IV 1-8	I-IV 8 7 1	II IV 8 2 1	I-IV 8 7 2 1	III IV 1-8

### PLASTIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS COM CARGA PERMANENTE

Estes resultados correspondem a tabela de plastificação de elementos, e como já foi salientado, se referem a uma casca com  $L=20.0\text{m}$ ,  $\sigma_0 = 4.1 \text{ MN/m}^2$  e espessura  $h = 20 \text{ cm}$ . Nesta figura é possível observar as áreas onde a estrutura rompe por plastificação. Nestas áreas, onde os elementos rompem é necessário o uso das cargas de protensão para neutralizar as tensões decorrentes das cargas permanentes. As camadas dos elementos são numeradas de baixo para cima, de um até oito. As quatro primeiras camadas são denominadas inferiores e as demais superiores.

Plastificação das camadas superiores

Plastificação das camadas inferiores

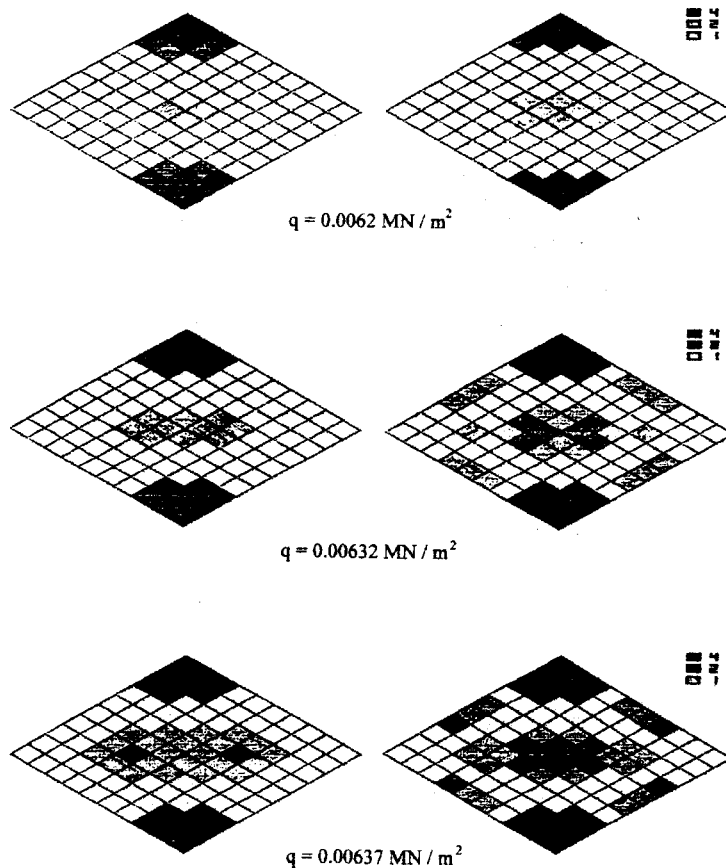


Figura 4: Camadas plastificadas, nos pontos de Gauss dos elementos.

### ANÁLISE DIMENSIONAL E DETERMINAÇÃO DOS NÚMEROS $\pi$

Com os recursos da análise dimensional, são escolhidas as grandezas com as quais podem ser preparados os ábacos adimensionais para um determinado tipo de casca. A carga limite obtida através da análise varia em função da espessura adotada. Utilizando a carga limite é possível escolher, com a ajuda dos ábacos, a espessura ideal para determinado tipo de casca em função de suas dimensões e do tipo de material a ser empregado.

A matriz fundamental de valores de acordo com a análise dimensional é:

	h	$\sigma_0$	L	$\delta$	q
L	1	-2	1	1	-2
F	0	1	0	0	1
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$

onde: h = espessura da casca, suposta constante

$\sigma_0$  = tensão efetiva do material

L = comprimento da projeção do parabolóide-hiperbólico

$\delta$  = deslocamento vertical

q = carga uniformemente distribuída

O sistema de equações correspondente é:

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\alpha_5 = 0$$

$$\alpha_2 + \alpha_5 = 0$$

$\alpha_5 = 1$ $\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_5 = 0$ $\alpha_2 + 1 = 0$	$\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = -1$	$\pi_1 = \frac{q}{\sigma_0}$
$\alpha_4 = 1$ $\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0$ $\alpha_2 + 0 = 0$	$\alpha_3 = \alpha_5 = 0$ $\alpha_1 = -1$ $\alpha_2 = 0$	$\pi_2 = \frac{\delta}{h}$
$\alpha_3 = 1$ $\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$ $\alpha_2 + 0 = 0$	$\alpha_4 = \alpha_5 = 0$ $\alpha_1 = -1$ $\alpha_2 = 0$	$\pi_3 = \frac{L}{h}$

Os gráficos são determinados utilizando os resultados de computador, obtidos para diferentes espessuras, e os seguintes números  $\pi$ .

$$\pi_1 = \frac{q}{\sigma_0} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{\delta}{h} \quad ; \quad \pi_3 = \frac{L}{h}$$

### RESULTADOS DO PROGRAMA DE COMPUTADOR

A carga limite obtida através da análise varia em função da espessura adotada. Utilizando os resultados da carga limite, obtida para diferentes espessuras, fixando os demais parâmetros, e com auxílio dos números  $\pi$ , são traçados os gráficos ou ábacos. Com a ajuda dos ábacos, é possível selecionar a espessura ideal para um determinado tipo de casca em função de suas dimensões e do tipo de material a ser empregado.

L/h=100		L/h=133		L/h=200		L/h=400	
f	$\delta/h$	f	$\delta/h$	f	$\delta/h$	f	$\delta/h$
0.00	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000
1.22	0.024	1.22	0.057	1.23	0.207	0.12	0.215
3.66	0.719	3.66	0.173	1.83	0.310	0.67	1.190
6.10	0.120	4.88	0.230	2.44	0.413	0.79	1.430
7.32	0.144	6.10	0.288	2.74	0.465	0.92	1.700
8.54	0.168	7.32	0.355	3.06	0.525	1.20	2.360
9.76	0.192	7.93	0.393	3.35	0.582	1.50	3.460
11.0	0.218	8.54	0.439	3.67	0.654	1.60	3.990
11.6	0.232	9.15	0.508	3.96	0.723	1.70	4.400
12.2	0.249	9.76	0.592	4.28	0.812		
12.8	0.273	10.4	0.722	4.57	0.901		
13.4	0.310	11.0	0.934	4.89	1.010		
14.0	0.357	11.5	1.423	5.18	1.140		
14.6	0.245			5.50	1.290		
15.2	0.546			5.79	1.450		
15.6	0.770			6.11	1.710		

### GRÁFICOS PARA CASCAS EM FORMA DE PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

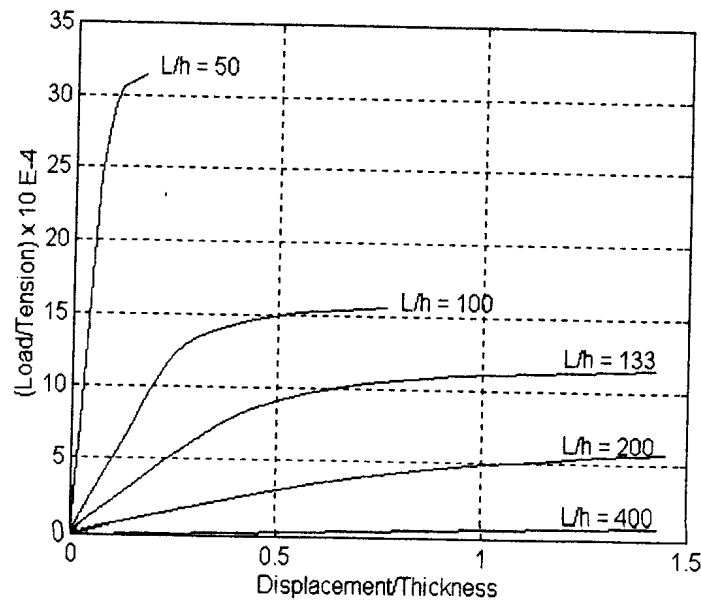


Figura 5: Gráficos para o parabolóide hiperbólico e números  $\pi$ .

### EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Verificar se é possível construir uma casca com os seguintes dados:

$$\begin{aligned} L &= 40 \text{ m} \\ \delta &= 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m} \\ h &= 20 \text{ cm} = 0.20 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\pi_3 = L/h = 40/0.2 = 200$$

$$\xrightarrow{\text{graphics}} \pi_1 = f = 4.2 \times 10^{-4}$$

$$\pi_2 = \delta/h = 0.15/0.20 = 0.75$$

se:  $\sigma_0 = 15.0 \text{ MN/m}^2$

tem-se:  $q = f \cdot \sigma_0 = 15.0 \times 4.2 \times 10^{-4} = 63.0 \times 10^{-4} \text{ MN/m}^2$

$$g = 0.20 \times 25 = 5.0 \text{ kN/m}^2 = 5.0 \times 10^{-3} \text{ MN/m}^2 = 50 \times 10^{-4} \text{ MN/m}^2$$

$$p = q - g = 13.0 \times 10^{-4} \text{ MN/m}^2 = 1.30 \times 10^{-3} \text{ MN/m}^2 = 1.30 \text{ kN/m}^2$$

(conclui-se que é possível construir uma casca em forma de parabolóide-hiperbólico com estes dados em concreto protendido)

se:  $\sigma_0 = 10.0 \text{ MN/m}^2$

tem-se:  $q = f \cdot \sigma_0 = 10.0 \times 4.2 \times 10^{-4} = 42.0 \times 10^{-4} \text{ MN/m}^2$

$$g = 0.20 \times 25 = 5.0 \text{ kN/m}^2 = 5.0 \times 10^{-3} \text{ MN/m}^2 = 50 \times 10^{-4} \text{ MN/m}^2$$

$$g > q$$

(conclui-se que não é possível construir uma casca com esta forma, com estes dados, em concreto armado)

Verificar se é possível construir uma casca com os seguintes dados:

$$\begin{aligned} L &= 40 \text{ m} \\ \delta &= 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m} \\ h &= 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\pi_3 = L/h = 40/0.1 = 400$$

$$\xrightarrow{\text{graphics}} \pi_1 = f = 0.8 \times 10^{-4}$$

$$\pi_2 = \delta/h = 0.15/0.10 = 1.5$$

se:  $\sigma_0 = 30 \text{ MN/m}^2$

tem-se:  $q = f \cdot \sigma_0 = 30 \times 0.8 \times 10^{-4} = 24 \times 10^{-4} \text{ MN/m}^2$

$$g = 0.10 \times 25 = 2.5 \text{ kN/m}^2 = 2.5 \times 10^{-3} \text{ MN/m}^2 = 25 \times 10^{-4} \text{ MN/m}^2$$

$$g > q$$

(conclui-se que não é possível construir uma casca com esta forma, com estes dados, em concreto protendido)

Consegue-se assim, com a ajuda dos ábacos, selecionar a espessura ideal para um determinado tipo de casca em função de suas dimensões e do tipo de material a ser empregado, o que pode permitir a viabilização ou a otimização do projeto.



## CONCLUSÕES

Utilizando os ábacos é possível determinar com grande precisão a carga limite de cascas com formas similares e escolher a espessura ideal para um determinado tipo de casca em função de suas dimensões e do tipo de material a ser empregado, o que permite, não só, a otimização do projeto como também a sua viabilização, uma vez que, se a espessura for escolhida arbitrariamente a estrutura da casca pode não suportar seu próprio peso.

## TRABALHOS FUTUROS

Esta técnica pode ser generalizada para outros tipos de cascas. A obtenção dos resultados de computador é a parte que requer mais tempo, pois, a análise é incremental iterativa e nem sempre a análise converge para os incrementos de carga escolhidos. É necessário adequar o incremento de carga, diminuindo seu valor, até conseguir a convergência. A escolha do tipo de cascas, onde vale a pena utilizar estes recursos, é outro assunto que também merece especial atenção, para evitar esforços inúteis com estruturas simples que podem ser resolvidas por outros métodos. Encontra-se em andamento a preparação de ábacos para cascas reversas em forma de hélices circulares e espirais para cascas estruturais semelhantes às idealizadas pelo arquiteto Kenzo Tange. Estão sendo estudadas também estruturas em forma de papel dobrado (tipo origami), estruturas formadas por cascas esféricas associadas (tipo bolhas de sabão) e estão concluídos ábacos para cascas em forma de senóide.

## AGRADECIMENTOS

Na utilização dos recursos da análise dimensional a autora tem sido incentivada pelo professor Fernando Luiz Lobo Barbosa Carneiro da COPPE/UFRJ, e foi, particularmente, incentivada na preparação deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- [1] **Gomes, M.P.A M.R.C.**, *Elasto-plastic and Geometrically Non-linear Analysis of Shells by Finite Element Method*, COPPE/UFRJ, pp 131, 1993.
- [2] **Gomes, M.P.A M.R.C.**, "Dimensional Analysis of Shells", Proceedings of XV CILAMCE Ibero-Latin American Conference of Computational Methods in Engineering, Belo Horizonte, Brasil, 1994.
- [3] **Gomes, M.P.M. R.C.**, "Dimensional Analysis of Cylindrical Shells", Proceedings of XVI CILAMCE - Ibero-Latin American Conference of Computational Methods in Engineering, Curitiba, Brasil, 1995.
- [4] **Carneiro, F L L B.**, *Dimensional Analysis*, UFRJ, 1993.
- [5] **Gomes, M.P.M.R.C.**, "Dimensional Analysis for Hyperbolic-Paraboloid Shells", Proceedings of Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, XVII CILAMCE, Padua, Itália 1996.

- [6]Gomes, M.P.A M.R.C., "Analysis of Shell Structures with Similar Shapes", Proceedings of Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, XVII CILAMCE, Padua, Itália, 1996.
- [7] Gomes, M.P.A M.R.C., "Stability Verification of Prestressed Concrete Shell Structures" - XVII CILAMCE, Padua, Itália /1996.
- [8]Gomes, M.P.A M.R.C., "Modelling of the human skull including loading,determination of the limit load and fracture prediction" - 3rd International Symposium on Computer Methods in Biomechanics & Biomedical Engineering, Barcelona, Espanha,1997.
- [9]Gomes, M.P.A M.R.C., "Limit Load of Structural Shells with Similar Shapes", ICCCBE- VII, Seul, Corea,1997.
- [10]Gomes, M.P.A M.R.C., "Prestressed Concrete Shell Structures, Numerical Modelling, Stability Verification and Limit Load of Shells with Similar Shapes", OPTI-97, Roma, Itália,1997.
- [11]Gomes, M.P.A M.R.C., "Abacos para determinação da Carga Limite de Cascas Semelhantes", XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, São Paulo, Brasil, 1997.
- [12]Gomes, M.P.A M.R.C., "Análise de Cascas Associadas Toroidais Utilizando Modelos de Camadas", XVIII CILAMCE, Brasília, Brasil, 1997.
- [13]Gomes, M.P.A M.R.C., "Modelo de Elementos Finitos para Análise da Estrutura do Crânio de um Ser Humano, Incluindo Tipos de Carregamento, Determinação da Carga Limite e Áreas Danificadas por Plastificação", XVIII CILAMCE, Brasília, Brasil, 1997.
- [14]Gomes, M.P.A M.R.C., "Carga limite de Cascas Estruturais", XVIII CILAMCE, Brasília, Brasil, 1997.

Endereço para correspondência:  
Maria del Pilar A M Rodriguez Carneiro Gomes  
Condominio Aldeia de Itaipu Rua C No.12  
CEP: 24355-260 Itaipu Niterói R. J. Brasil  
E-mail: pilar@coc.ufrj.br