

**ESTIMACION DE ERROR BASADA EN ESFUERZOS GENERALIZADOS Y  
TRACCIONES EN LOS LIMITES**

**Emilio Dufeu**

Depto. Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería  
Universidad de Concepción, Casilla 53 C, Concepción, Chile

**Pierre Beckers**

Service d'Infographie, Institute de Mécanique  
Université de Liège, 21 rue Ernest Solvay, 4000 Liège, Belgique

**RESUMEN**

El objetivo de este trabajo es presentar un método de estimación del error debido a la discretización del campo de desplazamientos de la solución elementos finitos. La estimación del error se basa en la construcción de un campo de esfuerzos continuos. Los valores nodales se determinan utilizando los esfuerzos generalizados conjugados a los modos de deformación y en las regiones adyacentes a la frontera de la estructura se utilizan además, las condiciones exactas de tracción impuestas al modelo. El método puede ser aplicado a modelos en 1, 2 ó 3 dimensiones, discretizados con cualquier elemento cinemáticamente admisible. El método se aplica a un problema tridimensional. Se evalúa la fiabilidad de los resultados y estos se comparan con los obtenidos por el método SPR.

**ABSTRACT**

The objective of this paper is to present a new method of finite element error estimation. This method is based on the recovery of a continuous stress field. Its behaviour is similar to that of S.P.R., but it is more general and flexible. Nodal values are computed from generalized stresses conjugated to the deformation modes. In the elements situated close to the boundaries where surface traction are prescribed, by using the classical averaging techniques of generalized forces computation, exact boundary conditions on traction are imposed. This method can be used in 1, 2 or three dimensions with any type of displacement model. To show the behaviour of this estimator, two 3-D examples are presented. Effectivity indices and results are analyzed and compared to S.P.R. method results.

**INTRODUCCION**

El procedimiento tradicional de estudio de la convergencia de un análisis por elementos finitos, consiste en discretizar uniformemente el modelo hasta alcanzar el error prescrito. El inconveniente de esto es que se generan elementos sin necesidad. En un modelo, generalmente existe un número reducido de zonas donde el error es superior al prescrito. En consecuencia, el costo del análisis aumenta injustificadamente.

Esta desventaja puede ser evitada controlando la solución de manera tal que el mallado se modifique sólo en las zonas donde la precisión lo requiere. Este procedimiento implica entonces, una evaluación de la calidad de la solución y posteriormente la modificación o regeneración de la discretización. En este trabajo se presenta un método que permite llevar a cabo la primera tarea de este procedimiento, es decir, cuantificar el error debido a la discretización del campo de desplazamientos de la solución elementos finitos. El método es desarrollado para evaluar problemas modelados en 3 dimensiones y analizados con aproximaciones de grado 1 y 2.

### EVALUACION DEL ERROR Y SU FIABILIDAD

En elasticidad lineal el error dominante es el debido a la discretización del campo de desplazamientos. Si se denota respectivamente por  $u$  y  $\sigma$  los campos de desplazamientos y de esfuerzos exactos y por  $u_h$  y  $\sigma_h$  los campos elementos finitos, los errores puntuales de estos se definen según:  $(e_h)_u = u - u_h$  y  $(e_h)_\sigma = \sigma - \sigma_h$ . Una forma más natural de expresar el error es a través de la norma energética. Así, para un elemento  $e$  se tiene:

$$\|e_h\|_{\Omega_e} = \left( \int_{\Omega_e} (\sigma - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right)^{1/2} \quad (1)$$

donde  $\Omega_e$  es el volumen del elemento  $e$  y  $D$  la matriz de elasticidad del material.

En la práctica, la norma energética del error no se conoce, por lo tanto debe estimarse. Si se designa por  $\epsilon_e$  una estimación de la norma energética, se tiene para el elemento  $e$ :

$$\epsilon_e \approx \|e_h\|_{\Omega_e} \quad (2)$$

Cuando se dispone de la solución exacta, la fiabilidad de la estimación puede ser medida por medio de dos índices. Uno llamado *índice de efectividad* definido por:

$$\theta_e = \frac{\epsilon_e}{\|e_h\|_{\Omega_e}} \quad (3)$$

a nivel elemental y el otro llamado *índice de uniformidad* definido por:

$$SD = \left[ \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N (\theta_e - \bar{\theta})^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

donde  $N$  es el número de elementos del mallado y  $\bar{\theta}$  el promedio de los índices de efectividad. En la práctica, un estimador se considera fiable si:  $0.8 \leq \theta \leq 1.2$  y  $SD \leq 0.2$ .

### ESTIMACION DEL ERROR

Los métodos de estimación del error a nivel elemental pueden clasificarse en dos grupos. En el primero, la estimación se basa en los defectos de equilibrio de los elementos, estos son: los *residuos de equilibrio internos*, los *defectos de tracción* en las aristas pertenecientes a la frontera del modelo y los *saltos de tracción* en las interfaces de los elementos. En el segundo grupo, en el cual se enmarca este estudio, se encuentran los métodos que basan la estimación en la discontinuidad del campo de esfuerzos.

Los métodos de alisamiento de esfuerzos consisten en aproximar el campo de esfuerzos exactos  $\sigma$  por medio de un campo continuo  $\bar{\sigma}$  construido a partir de la solución elementos finitos (figura 1). Una de las

primeras proposiciones [1] expresa las componentes del esfuerzo en cada elemento según:

$$\tilde{\sigma} = \sum_j N_j S_j \quad (5)$$

donde  $N_j$  es la función de forma del nodo  $j$  similar a la utilizada en la aproximación del campo de desplazamientos elementos finitos,  $S_j$  el valor nodal del campo.

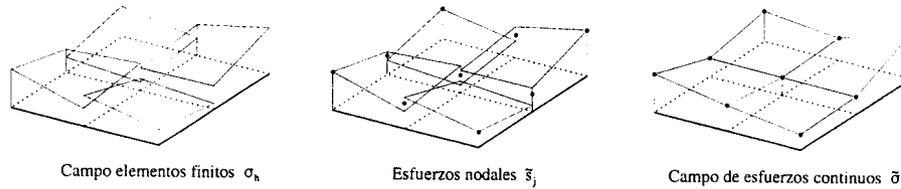


Figura 1: Construcción de un campo de esfuerzos continuos.

De esta forma, se puede estimar directamente la norma energética del error reemplazando en (1) el campo exacto  $\sigma$  por el campo continuo  $\tilde{\sigma}$ . La dificultad de estos métodos radica en la recuperación de los valores nodales  $S_j$ .

#### RECUPERACION DE VALORES NODALES

La recuperación de los esfuerzos nodales ha sido objeto de muchas investigaciones y publicaciones. Se han desarrollado *métodos globales* [2], *métodos locales* [3]. Ambos tipos de métodos han demostrado ser fiables para los grados de aproximación impar, pero no para los grados par [4].

Un aporte importante a la fiabilidad de la estimación del error fue hecha por la proposición de recuperar los valores nodales utilizando grupos de elementos llamados *regiones* [5]. Este método consiste en crear un campo de esfuerzos  $\sigma_r$  por regiones  $\Omega_r$  según una expresión polinomial de la forma:

$$\sigma_r = P_n(\chi_i) a \quad \forall (\chi_i) = (x_i, y_i, z_i) \in \Omega_r \quad (6)$$

donde  $P_n$  es un polinomio de grado  $n$  igual al del análisis de elementos finitos. Esto permite recuperar los valores nodales calculando directamente  $\sigma_r$  en los nodos (figura 2).

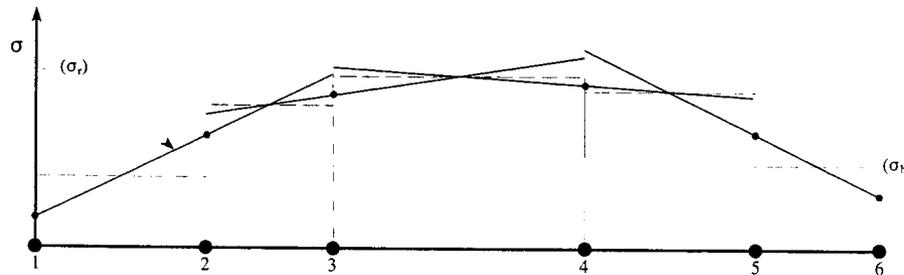


Figura 2: Recubrimiento de un modelo unidimensional, análisis de grado 1.

La literatura no muestra unanimidad en la definición de los términos que forman este polinomio. La selección de un polinomio completo presenta la ventaja que evita problemas de dependencia respecto a la

orientación de la región [6]. En dimensión 3 un polinomio completo de grado  $n$  se escribe:

$$P_n(x, y, z) = \sum_{m=1}^{T_n} a_m x^i y^j z^k \quad (7)$$

$$\text{donde } (i+j+k \leq n) \quad \text{y} \quad T_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

En las publicaciones se encuentran dos formas de definir las regiones. *Regiones nodales* [5], las cuales son definidas por los nodos de esquina de los elementos y las forman todos los elementos conectados a estos nodos. *Regiones elementales* [7] quienes están definidas por los elementos del mallado y son constituidas por este elemento y los circundantes. Para independizar los resultados de la posición y del tamaño de la región, se utiliza un espacio normalizado de coordenadas  $\chi_n \in [-1, 1]$  cuya transformación es de la forma:

$$\chi_n = -1 + 2 \frac{\chi - \chi_{\min}}{\chi_{\max} - \chi_{\min}} \quad (8)$$

Los ensayos efectuados en modelos tridimensionales muestran una fiabilidad similar para ambos tipos de regiones. Entonces, con el objeto de aprovechar las ventajas y evitar las desventajas de uno y otro tipo de región, se ha implementado un tratamiento mixto de regiones. En efecto, se utilizan regiones nodales definidas por todos los nodos de esquina internos del modelo y regiones elementales definidas por los elementos que no pertenecen a ninguna región nodal.

En dimensión 3, los mallados tetraédricos son los que presentan mayores dificultades de análisis. Por una parte ellos contienen en la mayoría de los casos elementos con todos los nodos sobre la frontera, lo que impide que estos elementos pertenezcan a alguna región nodal, por otra parte, en estos mallados el número de elementos es mucho mayor que el de nodos internos, lo que lleva a un aumento considerable del tiempo de análisis al utilizar regiones elementales. El tratamiento mixto propuesto aquí, permite asegurar que todos los elementos pertenecen al menos a una región con un tiempo de ejecución aceptable.

Para determinar el campo regional  $\sigma_r$  se utiliza una técnica de proyección de los esfuerzos elementos finitos y cuando es posible, se inyectan condiciones exactas impuestas al modelo en los límites.

#### Proyección de puntos superconvergentes

El método propuesto originalmente [5] para recuperación de los valores nodales en modelos bidimensionales utilizando regiones, se basa en la hipótesis de superconvergencia del campo de esfuerzos elementos finitos [8]. Esta técnica consiste en proyectar el campo elementos finitos en los puntos de superconvergencia pertenecientes a la región. La proyección se realiza en el sentido de mínimos cuadrados según la expresión:

$$F(a) = \sum_{s=1}^m [\sigma_h(\chi_s) - \sigma_r(\chi_s)]^2 \quad (9)$$

la cual expresa un error discreto en los  $m$  puntos de superconvergencia  $\chi_s$  pertenecientes a  $\Omega_r$ . La existencia de los puntos de superconvergencia ha sido demostrada para el elemento de viga, el elemento isoperimétrico plano y el elemento sólido hexaédrico. En los tres casos estos puntos corresponden a las coordenadas de la cuadratura de Gauss. En el caso del elemento pentaédrico y tetraédrico no existen pruebas de la existencia de los puntos de superconvergencia, por lo tanto, estos se asimilan con los puntos de Gauss utilizados en la integración de la matriz de rigidez.

La minimización de la función (9) conduce a un sistema lineal de ecuaciones ( $A \cdot a = b$ ) que desacopla

las componentes del campo  $\sigma_r$ . La matriz  $A$  y los vectores  $b$  de cada componente tienen la forma:

$$A = \sum_{s=1}^m P_n^T(\chi_s) P_n(\chi_s) \quad \text{y} \quad b = \sum_{s=1}^m P_n^T(\chi_s) \sigma_h(\chi_s) \quad (10)$$

El sistema de ecuaciones es de orden  $T_n$  y debe ser resuelto para cada componente de  $\sigma_r$ , con la salvedad que la matriz  $A$  es independiente de las componentes, por lo tanto, debe ser evaluada una sola vez por región.

### Proyección de esfuerzos generalizados

Se puede demostrar a través de una serie de discretizaciones, que la exactitud de la solución elementos finitos en los puntos de superconvergencia decrece a medida que los elementos se alejan de su forma base. Además, sólo para algunos elementos se puede probar la existencia de los puntos de superconvergencia del campo de esfuerzos. Estas razones justifican la búsqueda de otras relaciones susceptibles de poseer propiedades de superconvergencia.

En los modelos cinemáticamente admisibles, en lugar de buscar puntos donde la solución es mejor, es preferible utilizar las variables generalizadas conjugadas a las variables de partida. Estas son por una parte, las fuerzas generalizadas conjugadas a los desplazamientos nodales y por otra, los esfuerzos generalizados a los modos de deformación [9].

Es importante señalar que por construcción de los modelos cinemáticamente admisibles, los esfuerzos generalizados están en equilibrio con las fuerzas generalizadas. Entonces, de la ecuación de equilibrio de la solución elementos finitos:

$$K \cdot q = F \quad (11)$$

donde  $q$  son los desplazamientos nodales,  $K$  la matriz de rigidez y  $F$  el vector de fuerzas generalizadas en los nodos, definidos estos dos últimos por el ensamble de las contribuciones elementales:

$$k_e = \int_{\Omega_e} (\nabla N_e)^T D_e (\nabla N_e) d\Omega \quad \text{y} \quad f_e = \int_{\Omega_e} N_e^T F d\Omega + \int_{\Gamma_e} N_e^T \bar{t} d\Gamma \quad (12)$$

se obtiene, para el caso particular donde las fuerzas de volumen son nulas y toda la frontera del elemento es del tipo  $\Gamma_e$ :

$$k_e q_e = f_e = \int_{\Omega_e} (\nabla N_e)^T \sigma_h d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_e^T \bar{t} d\Gamma \quad (13)$$

Por lo tanto, en lugar de identificar el campo  $\sigma_r$  al campo  $\sigma_h$  en ciertos puntos, puede ser más provechoso efectuar esta operación en forma débil escogiendo como funciones de ponderación las correspondientes a los modos de deformación.

Entonces, la proyección del campo de esfuerzos utilizando los esfuerzos generalizados puede expresarse por la minimización de la función:

$$F(a) = \left[ \int_{\Omega_e} w_i(\chi) \sigma_r(\chi) d\Omega - \int_{\Omega_e} w_i(\chi) \sigma_h(\chi) d\Omega \right]^2 \quad (14)$$

que conduce a un sistema lineal de ecuaciones de la forma  $(A \cdot a = b)$ . Las funciones de ponderación  $w_i(\chi)$  deben en principio corresponder a los modos de deformación. Por el momento el programa de cálculo está implementado con funciones de ponderación correspondientes al polinomio de grado  $n-1$  y

con las componentes del esfuerzo desacopladas. La decisión de esta simplificación está basada en la calidad de los resultados versus el tiempo de cálculo. Además, para elementos de grado bajo, esta opción corresponde a tomar un subconjunto de modos de deformación. Esto lleva a definir la matriz  $A$  y el vector  $b$  del sistema de ecuaciones según:

$$A = \sum_{e=1}^{M_e} \sum_{i=1}^{M_p} \left[ \int_{\Omega_e} w_i(\chi) [P_n(\chi)]^T d\Omega \int_{\Omega_e} w_i(\chi) [P_n(\chi)] d\Omega \right] \quad (15)$$

$$b = \sum_{e=1}^{M_e} \sum_{i=1}^{M_p} \left[ \int_{\Omega_e} w_i(\chi) [P_n(\chi)]^T d\Omega \int_{\Omega_e} w_i(\chi) \sigma_h(\chi) d\Omega \right]$$

donde  $m_e$  es el número de elementos contenidos en la región y  $m_p$  el número de funciones de ponderación. Este método es original [6, 9] y siguiendo la nomenclatura adoptada por Zienkiewicz [10] en una publicación posterior lo identificamos con REP (Recovery by Equilibrium in Patches).

### Inyección de tracciones impuestas

Las tracciones impuestas en la superficie del modelo son exactas y conocidas a priori, pero ellas constituyen condiciones débiles en los límites. Estas permiten establecer condiciones suplementarias que mejoran los resultados en la frontera del dominio, donde la estimación del error es menos precisa.

En la literatura se encuentran algunas proposiciones para tratar las tracciones impuestas. Una forma, es evaluar las ecuaciones de equilibrio de la superficie de manera discreta [7], generalmente en los nodos del modelo. Otra sugerencia, es evaluar las ecuaciones de equilibrio integrando las funciones de tracción  $\bar{t}$  impuestas al modelo [11]. La primera, presenta el inconveniente que cuando el grado del campo  $\sigma_r$  es inferior al de la distribución de  $\bar{t}$  se viola el equilibrio de la superficie. La segunda, no permite una automatización del proceso de control de error, puesto que requiere el conocimiento explícito de la función  $\bar{t}$  en una etapa de post-tratamiento, lo cual no es siempre fácil de manejar.

La solución de los modelos cinemáticamente admisibles respeta únicamente el equilibrio de la estructura en el sentido de las fuerzas generalizadas en los nodos. Con el objeto de respetar el equilibrio en la superficie y de automatizar los cálculos, se propone utilizar las cargas generalizadas en los nodos como condiciones exacta [6, 9].

El residuo de las fuerzas generalizadas puede ser expresado por la función:

$$F(a) = \sum_{i=1}^{m_i} \left[ \int_{\Gamma_j} N_j \nabla_n^T \sigma_r(\chi) d\Gamma - \int_{\Gamma_j} N_j \bar{t}(\chi) d\Gamma \right]^2 \quad (16)$$

cuya minimización conduce a:

$$A = \sum_{j=1}^{m_j} \int_{\Gamma_j} N_j [\nabla_n^T [M_P(\chi)]]^T d\Gamma \int_{\Gamma_j} N_j [\nabla_n^T [M_P(\chi)]] d\Gamma \quad (17)$$

$$b = \sum_{j=1}^{m_j} \int_{\Gamma_j} N_j [\nabla_n^T [M_P(\chi)]]^T d\Gamma g_j$$

las cuales pueden ser inyectadas al sistema de ecuaciones lineales generadas por una de las técnicas de proyección discutidas precedentemente. En (17)  $\nabla_n$  es un operador que contiene los cosenos directores

de la superficie,  $M_F$  es una matriz diagonal a bloques tal que el vector esfuerzo puede ser escrito como:  $\sigma = M_F a$ ,  $m_i$  es el número de nodos de la región donde se calculan las fuerzas generalizadas,  $\Gamma_i$  la superficie de los elementos conectados al nodo  $j$ ,  $N_j$  y  $g_j$  son respectivamente la función de forma y las fuerzas generalizadas del nodo  $j$ .

Se debe notar que la utilización de esta condición produce un sistema de ecuaciones lineales que acoplan las componentes del vector esfuerzo, por lo tanto, para problemas tridimensionales, éste se hace seis veces más grande. La incidencia que tiene el aumento de tamaño de los sistemas de ecuaciones, en el tiempo total de cálculo, depende exclusivamente de la geometría del modelo, puesto que estos sistemas sólo se generan en las regiones adyacentes a la frontera.

### APLICACION NUMERICA

Con el fin de evaluar la fiabilidad del estimador REP, se ha seleccionado una aplicación para la cual se dispone de la solución exacta. Esta aplicación representa una viga empotrada sometida a esfuerzo de flexión. El modelo se fija isoestáticamente y la carga corresponde a las tensiones de la solución analítica (figura 3). El campo de tensiones exacta es:

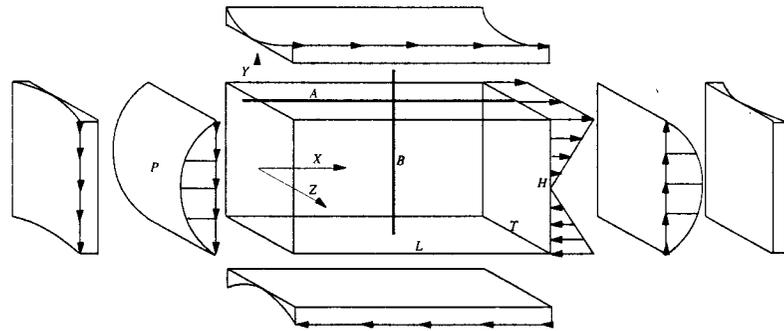


Figura 3: Modelo de carga de la viga.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{I} xy & \tau_{xy} &= \frac{P}{I} \left( \frac{1}{8} H^2 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{\nu}{2(1+\nu)} z^2 \right) \\ \sigma_y &= 0 & \tau_{yz} &= 0 \\ \sigma_z &= 0 & \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $P$  es la fuerza transversal,  $I$  el momento de inercia de la sección y  $\nu$  el módulo de Poisson.

Los modelos son discretizados uniformemente con elementos hexaédricos según la secuencia  $(2 \times 2 \times 4)$ ,  $(4 \times 4 \times 8)$ ,  $(6 \times 6 \times 12)$ ,  $(8 \times 8 \times 16)$  y  $(10 \times 10 \times 20)$ . Las discretizaciones pentaédricas y tetraédricas se obtienen dividiendo los hexaedros en dos y seis respectivamente (figura 4).

Los valores de los parámetros utilizados en el análisis elementos finitos son:  $E=2.1 \times 10^6$ ,  $\nu=0.3$ ,  $P=10000$ ,  $L=10$ ,  $H=5$ ,  $T=5$ .

Con estos valores se obtiene una norma energética exacta:  $\|u\| = 19.411488$ .

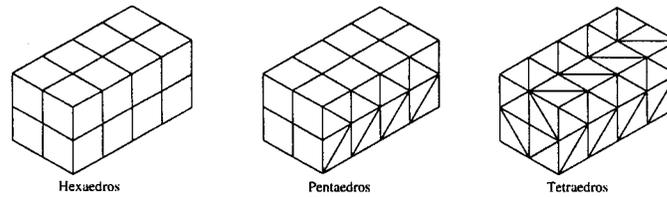


Figura 4: Discretizaciones iniciales.

Los resultados obtenidos se muestran en las tablas y gráficos siguientes, en los cuales se utiliza la nomenclatura: *Hex* (mallados hexaédricos), *Pen* (mallados pentaédricos), *Tet* (mallados tetraédricos) y el índice  $t$  indica la utilización de las tracciones superficiales como condiciones suplementarias en la estimación del error.

Tabla I: Grados de libertad de los mallados.

Elemento	Grado 1	Grado 2	Elemento	Grado 1	Grado 2	Elemento	Grado 1	Grado 2
Hex-1	129	417	Pen-1	129	489	Tet-1	129	669
Hex-2	669	2349	Pen-2	669	2829	Tet-2	669	4125
Hex-3	1905	6945	Pen-3	1905	8457	Tet-3	1905	12669
Hex-4	4125	15357	Pen-4	4125	18813	Tet-4	4125	28605
Hex-5	7617	28737	Pen-5	7617	35337	Tet-5	7617	54237

Tabla II: Fiabilidad de los estimadores SPR y REP.

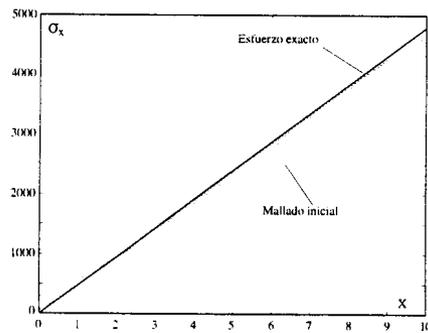
Mallado	Análisis de grado 1				Análisis de grado 2			
	SPR		REP		SPR		REP	
	$\theta$	SD	$\theta$	SD	$\theta$	SD	$\theta$	SD
Hex-1	0.9402	0.1502	0.9402	0.1502	0.9988	0.0025	0.9997	0.0018
Hex-2	0.9707	0.2130	0.9707	0.2130	0.9998	0.0014	0.9999	0.0010
Hex-3	0.9830	0.1462	0.9830	0.1462	0.9999	0.0009	0.9999	0.0007
Hex-4	0.9891	0.1035	0.9891	0.1035	0.9999	0.0007	1.0000	0.0005
Hex-5	0.9925	0.0790	0.9925	0.0790	1.0000	0.0005	1.0000	0.0004
Pen-1	0.6609	0.1095	0.6609	0.1095	1.0791	0.0698	1.0781	0.1365
Pen-2	0.8803	0.3169	0.8803	0.3169	0.9933	0.0548	1.0120	0.0494
Pen-3	0.9274	0.2616	0.9274	0.2616	0.9948	0.0405	1.0214	0.0385
Pen-4	0.9504	0.2148	0.9504	0.2148	0.9925	0.0351	1.0195	0.0325
Pen-5	0.9634	0.1823	0.9634	0.1823	0.9904	0.0318	1.0179	0.0284
Tet-1	0.6578	0.1864	0.6578	0.1864	1.1436	0.1881	1.0041	0.0685
Tet-2	0.8619	0.2988	0.8619	0.2988	1.0903	0.1924	1.0092	0.0615
Tet-3	0.9149	0.2411	0.9149	0.2411	1.0689	0.1713	1.0072	0.0548
Tet-4	0.9415	0.1999	0.9415	0.1999	1.0561	0.1585	1.0034	0.0461
Tet-5	0.9567	0.1713	0.9567	0.1713	1.0475	0.1490	1.0011	0.0399

El programa de estimación de error está siendo implementado, disponiendo actualmente sólo de las rutinas que permiten incluir las tracciones superficiales para mallados hexaédricos.

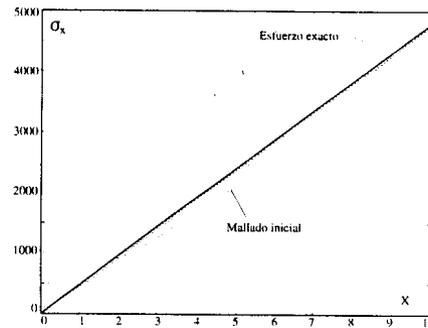
**Tabla III:** Fiabilidad del estimador REP\_t.

Mallados	Análisis de grado 1		Análisis de grado 2	
	$\theta$	SD	$\theta$	SD
Hex-1	0.9321	0.1026	0.9996	0.0002
Hex-2	1.0003	0.1475	0.9999	0.0003
Hex-3	0.9999	0.0966	0.9999	0.0002
Hex-4	0.9996	0.0716	1.0000	0.0002
Hex-5	0.9995	0.0565	1.0000	0.0002

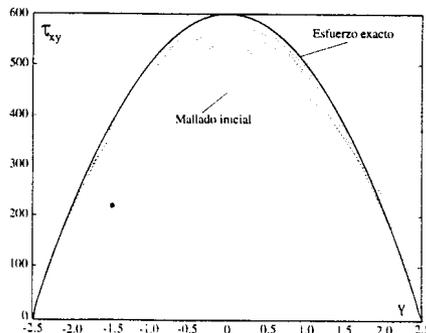
Para apreciar la influencia de la inyección de las tracciones impuestas en la frontera en la estimación de los esfuerzos, se muestra en las figuras 5 y 6 el esfuerzo normal  $\sigma_x$  en la línea A (figura 3) y en las figuras 7 y 8 el esfuerzo de corte  $\tau_{xy}$  en la línea B (figura 3).



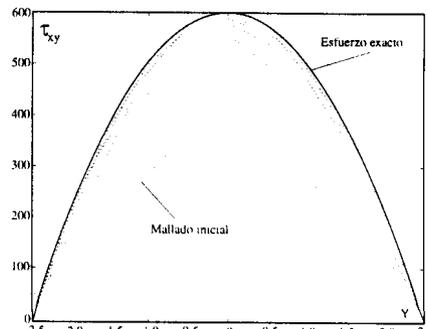
**Figura 5:** Estimador REP.



**Figura 6:** Estimador REP\_t.



**Figura 7:** Estimador REP.



**Figura 8:** Estimador REP\_t.

### CONCLUSIONES

Un estimador de error original (REP) ha sido presentado y aplicado a un modelo tridimensional. Este está basado en la proyección débil de los esfuerzos generalizados de la solución elementos finitos. En principio, éste puede ser utilizado para cualquier elemento cinemáticamente admisible. Los resultados (tabla II) muestran que los índices están dentro de los intervalos de fiabilidad. En el caso de análisis de grado 1, como se esperaba, los resultados son idénticos a los obtenidos por el conocido método SPR. En análisis de grado 2, estos difieren levemente del método SPR sin una tendencia marcada.

Otro aporte original que tenía como objetivo mejorar la estimación del error en las fronteras de los modelos, ha sido realizado mediante la inyección de las fuerzas generalizadas provenientes de las tracciones impuestas en la superficie del modelo. Los resultados muestran, por una parte, que este estimador (REP\_t) es también fiable (tabla III) y por otra, que se obtiene un aumento significativo en la calidad de los esfuerzos estimados (figuras 5, 6, 7 y 8).

### REFERENCIAS

- [1] Oden J.T., Brauchli J.H., *On the calculation of consistent stress distributions in finite element approximations*, Int. j. numer. methods engrg., Vol.3, 1971, págs. 317-325 .
- [2] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, Int. j. numer. methods engrg., Vol.24, 1987, págs. 337-357.
- [3] Hinton E., Campbell J.S., *Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method*, Int. j. numer. methods engrg., Vol.8, 1974, págs. 461-480.
- [4] Strouboulis T., Haque K.A., *Recent experiences with error estimation and adaptivity, part II: error estimation for h-adaptive approximations on grids of triangles and quadrilaterals*, Comput. methods appl. mech. engrg. Vol.100 1992, págs. 359-430.
- [5] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique*, Int. j. numer. methods engrg. Vol.33, 1992, págs. 1331-1364.
- [6] Beckers P., Dufeu E., *Estimación de error basada en ecuaciones de equilibrio*, Jornadas internacionales de Mecánica computacional y CAD/CAM, Concepción, 22-24 nov. 1995, Rapport SF-209, L.T.A.S., Université de Liège.
- [7] Wiberg N.E., Abdulwahab F., Ziukass S., *Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions*, Int. j. numer. methods engrg. Vol.37, 1994, págs. 3417-3440.
- [8] Barlow J., *Optimal stress locations in finite element models*, Int. j. numer. methods engrg. Vol.10, 1976, págs. 243-251.
- [9] Dufeu e., *Calcul d'erreur et adaptation de maillages en 3 dimensions*, Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique, 1997.
- [10] Boroomand B, Zienkiewicz O.C., *Recovery by equilibrium in patches (REP)*, Int. j. numer. methods engrg. Vol.40, 1997, págs. 137-164.
- [11] Blacker T., Belytschko T., *Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolant enhancements*, Int. j. numer. methods engrg. Vol.37, 1994, págs. 517-536.