Mecánica Computacional, Volumen XVIII - pp. 493-498
Compilado por: E. Dari, C. Padra y R. Saliba
San Carlos de Bariloche, noviembre de 1997

GENERACIÓN AUTOMÁTICA DE HEXAEDROS: ALGORITMO DE GENERACIÓN DE LA MALLA DUAL POR SUBDIVISIÓN Y MAPEO

Nestor Calvo y Sergio Idelsohn

Grupo de Tecnología Mecánica
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química – INTEC
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
Güemes 3450 – (3000) Santa Fe – Santa Fe – Argentina

RESUMEN

Se presenta una nueva implementación generador de mallas de hexaedros basado en la generación de la malla dual a la deseada.

El dual interior se genera por sucesivas subdivisiones en dos partes, utilizando una línea cerrada exterior. En cada etapa se genera la superficie interior que dividirá las partes y pertenecerá a ambas. La superficie se genera mapeando una de las mitades.

Como avance sobre la implementación anterior, se resuelven los cruces múltiples y además, las sucesivas subdivisiones van desarmando los autocruces que, en algunos casos, desaparecen.

Este método permite la resolución automática de problemas más generales.

ABSTRACT

We present a new implementation of an all hexahedral mesh generator, which works making the dual of the desired mesh.

The interior dual is generated through successive subdivisions with a closed exterior line. At each step the divider surface is generated and attached to both halves. Mapping one of the halves makes the surface.

An advance over a previous implementation is that multiple crossing lines are resolved and self-intersecting lines are successively disassembled and, in some cases corrected.

This approach gives automatic solution for a more general class of problems.

INTRODUCCIÓN

Nuestro objetivo es generar, sin intervención del usuario, una malla de hexaedros dentro de una malla cerrada de cuadriláteros que define el dominio.

En un trabajo previo[1]se han presentado los primeros avances en la implementación de un método nuevo para la generación de mallas de hexaedros basado en la generación de la malla dual a la deseada.

Recordemos a que nos referimos con dual. La malla es un conjunto de elementos cuya dimensión **D** define a la de la malla, así una malla de tetraedros es tridimensional y una de cuadriláteros es bidimensional. Cada elemento, a su vez, puede considerarse como una malla de elementos **D-1** dimensional quedando así definidos los subelementos de cualquier dimensión **d**: caras, aristas y nodos. Por dual a la malla entendemos al conjunto que se obtiene asignando a cada subelemento de dimensión **d** de la malla una región de dimensión **D-d**, por cada cubo hab[illegible] vértice, por cada arista un polígono, etc.

La malla exterior dada no puede alterarse, esto es para evitar la necesidad de gran cantidad de información que el usuario debería generar para decir qué nodos tienen libertad de moverse, cuántos grados y en qué línea o superficie. De modo que la malla generada tiene que tener como superficie exterior a la malla dato.

La base del método propuesto consiste en la explotación de los condicionamientos que imponen las líneas del dual de la malla exterior. Estas son líneas cerradas que conectan cada cuadrilátero con un vecino por arista y a éste con el siguiente por la arista opuesta y así hasta cerrarse.

El primer programa, sintéticamente, generaba un vértice del dual (hexaedro de la malla) para cada terna de líneas que se cruzan mutuamente, este esquema funciona siempre que las líneas se crucen en dos puntos y no tengan autocruces.

Tales complicaciones, lejos de ser infrecuentes se dan casi siempre, a menos que se tenga especial cuidado en evitarlas al generar la malla exterior. Es muy improbable que una línea de cuadriláteros se cierre atravesando pocos cuadriláteros o aún dando "una vuelta" por la superficie.

Con el ánimo de eliminar las dificultades topológicas, se implementó un método nuevo de generación del dual en el que se divide sucesivamente el dual exterior con las superficies de corte simples, es decir aquellas limitadas por líneas que no se autocrucen.

Existe otro intento de solución similar al presente[2]. Este método trabaja por avance de las líneas del dual interior que crecen como "bigotes ondulados" hacia el interior del dominio, este método lejos de resolver el problema de los autocruces ignora el condicionamiento principal de unir, con líneas internas, los cruces de las externas. En el cierre interior genera elementos patológicos: hexaedros en los que se contraen a un punto dos vértices en la diagonal de una cara. En la referencia citada no aparece ninguna malla no trivial, aun con tales defectos.

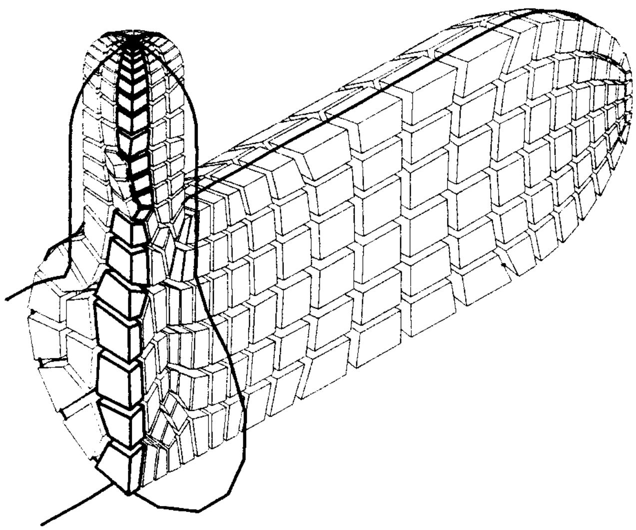

Figura 1: líneas del dual exterior y elementos de una línea interior

Como explicamos en el trabajo anterior, cada línea exterior limita una malla bidimensional que se obtiene cortando a la malla de hexaedros con una superficie. En la Figura 1 se pueden observar dos líneas exteriores que definen dos cortes y se interceptan en dos vértices (caras de la malla exterior). Las superficies a su vez se interceptan en una hilera de elementos cuyo dual es una línea interior que une los dos vértices exteriores. En este caso se eligieron dos superficies (líneas) simples para apreciar los detalles en el dibujo. aunque este ejemplo no podía ser resuelto con el programa anterior por la existencia de líneas con más de un par de cruces.

Al dividir una línea con patologías, éstas se reparten. En sucesivas subdivisiones aumenta la probabilidad de que se reduzcan a casos tratables o desaparezcan.

Las condiciones que se imponen a la malla exterior son:

- ✓ Número par de caras, pues el caso contrario no admite malla interior de hexaedros.
- ✓ Las líneas no pueden tener un número impar de autocruces. Este requisito reemplaza y permite obviar al que realmente impone la topología de las mallas de hexaedros: los autocruces impares deben estar apareados (en el límite disconexo de una superficie interior que se cruza a si misma definiendo las líneas que unen los autocruces no apareados). Exigir esto no es práctico y es muy difícil de cumplir. el requisito de paridad, con herramientas de ayuda del programa es fácil de satisfacer.
- ✓ Topología esférica, la malla exterior debe ser simplemente conexa. Hay dos problemas con los toros (o superficies cerradas de género mayor que cero) y con los cuerpos con huecos interiores, uno es reconocer topológicamente el interior y el otro es identificar las parejas de (otra vez) límites disconexos de las superficies interiores.

ESQUEMA DE TRABAJO DEL ALGORITMO

Los bloques de funcionamiento del programa y, en particular. del algoritmo de subdivisión y mapeo son, a grandes rasgos. los siguientes:

1. Lectura de los datos de CAD u otras fuentes y "soldadura" de los nodos. Éstas son las únicas rutinas que manejan información métrica hasta el paso 6.
2. Verificación de las condiciones exigidas. En caso de no cumplirse las condiciones, se genera la información de ayuda necesaria para resolver el problema.
3. Formación del entramado primario de líneas exteriores, es el conjunto de líneas del dual de la malla exterior.
4. División del entramado primario.
   - 4.1. Elección de una línea que no se autocruce para utilizarla como divisoria. Si ya se utilizaron todas, se forma una región (poliedro) con los vértices y se continúa con el paso 5.
   - 4.2. División del entramado en dos "casquetes" y mapeo de uno de ellos en el corte.
   - 4.3. Eliminación de "dígonos" interiores y "monógonos".
   - 4.4. A cada casquete se lo "tapa" con el corte, reduciendo el tamaño del entramado actual y generando uno nuevo. La línea de corte desaparece.
   - 4.5. División completa del entramado nuevo, por recurrençia partiendo de 4.1.
   - 4.6. Vuelta a 4.1.
5. Eliminación de los dígonos exteriores.
6. Preposicionamiento de los vértices. Recién en esta etapa aparece la información métrica de la malla, hasta aquí solo se trabajó con números enteros y topología.
7. Construcción de la malla colocando un nodo en el centroide de cada poliedro. Las conectividades vienen dadas por las líneas del dual.
8. Suavizado por reposicionamiento (sin cambios topológicos).

DETALLES RELEVANTES DE LA IMPLEMENTACIÓN

La línea divisoria corta otras líneas del entramado en **2n** vértices que habrá que unir con **n** líneas sobre la superficie de corte. Recordemos que en cada vértice dual de una malla de cuadriláteros se cortan dos líneas.

La forma de unión de los vértices sueltos consiste en seguir la línea exterior que parte de un vértice no apareado hasta volver a encontrar al divisor en el vértice opuesto. En el recorrido exterior, se mapea sobre la nueva línea cada cruce con una línea que aún no haya sido utilizada como divisor, es decir que si dos líneas se cruzan en el casquete exterior, lo harán de igual modo en la superficie de corte interior. En el proceso se generan líneas cerradas en el corte, que provienen de líneas "paralelas" al divisor y autocruces que son copia de los del casquete.

Podría utilizarse (y de hecho se intentó) cualquier otra forma de apareamiento. El resultado es que en lugar de eliminarse, se crean más autocruces.

El proceso de mapeo elimina la complicación presentada por los cruces múltiples pues provee una forma adecuada de seleccionar el par de cruces que serán unidos con una línea.

Analicemos los posibles criterios para seleccionar la línea que mejor califica como divisor. La línea mas larga probablemente corte autocruces, pero requiere del mapeo de líneas cerradas que no siempre son necesarias y generan gran cantidad de elementos innecesarios en la malla final, este método fue el primero que se implementó y fue desechado. El criterio que actualmente está en funcionamiento consiste exactamente en lo contrario: se elige la menor y se mapea el casquete menor. Más aún, si aparece una paralela, se aborta el proceso y se utiliza ésta como divisor. Respecto a la división de autocruces, se demora más pero se realiza en la misma forma. De esta forma los casquetes mapeados son mayormente simples y generan menos patologías.

El problema que surge al eliminar las líneas que ya han sido utilizadas como divisorias es la formación de dígonos y monógonos. Un dígono es un "polígono" de dos aristas que unen dos vértices, es el dual de un par de cuadriláteros que comparten dos aristas. Un monógono es un vértice con un loop que proviene de un autocruce. Estas situaciones topológicamente naturales son inadmisibles en mallas de elementos finitos.

El caso más simple es el de un dígono eliminable totalmente interior al corte, se produce al mapear dos líneas que se cortan dos veces en el casquete con divisores eliminados entre las intersecciones, al no mapear los divisores previos, en el interior las líneas se cortan dos veces seguidas. Estos se elimina en forma simple, se elimina el mapeo de ambas intersecciones.

Existen situaciones más complicadas en las que no puede eliminarse el mapeo pues daría lugar a otras incongruencias o a autocruces impares (en algunos casos de monógonos). En tal caso, si el dígono es interior se envuelve uno de los vértices con un círculo, situación dual a poner un cuadrilátero dentro de otro y unirlos con cuatro cuadriláteros.

Los dígonos que se forman directamente con la línea divisoria se resuelven en conjunto una vez terminada la subdivisión. Estos dígonos no son eliminables, por lo que se resuelven envolviendo un vértice con tres círculos mutuamente ortogonales, equivalente tridimensional del método anterior.

Al mapear el casquete sobre la superficie, los autocruces exteriores quedan mapeados en el interior del corte, en este caso se pueden eliminar parejas interiores (preferentemente monógonos), reduciendo la cantidad de autocruces en cada subdivisión.

Esta reducción ha mostrado ser insuficiente debido a la muy baja probabilidad de cierre rápido de las líneas del dual exterior que explicamos más arriba. Típicamente una malla de cuadriláteros de diez mil elementos tiene unas pocas líneas simples en las zonas estructuradas alejadas del dominio de interés y tres o cuatro líneas con miles de elementos y cientos de autocruces.

Estamos desarrollando algunos algoritmos que nos permitirían dividir los autocruces cuando no se logra en forma natural. Al presente sólo funcionan en unos cuantos casos y si bien podemos augurar la generalización, aún no podemos presentar resultados contundentes.

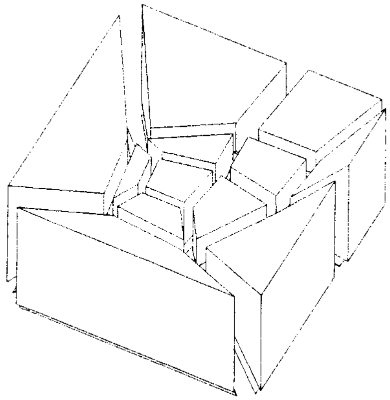

Figura 2: Ejemplo de malla con autocruces en el dual

De todos modos, la Figura 2 muestra un caso ejemplo del tipo de autocruces que se puede resolver con el algoritmo implementado actualmente. Se removieron los elementos superiores para mostrar el resultado en el interior. El algoritmo depende de condiciones topológicas que no siempre se dan y esto hace que en grandes mallas sea casi seguro que en alguna subdivisión no se darán.

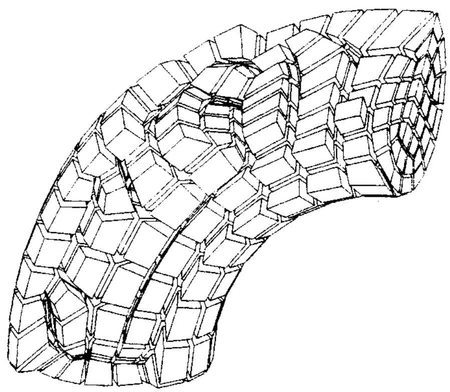

Figura 3: Malla de un cuarto de toro

En la Figura 3, donde también se han removido elementos para facilitar la visualización, se muestra otro ejemplo de malla que antes no podía ser resuelto debido a las complicaciones de la malla exterior. En ella se puede notar que utilizamos, como antes, el criterio de generar una superficie interior totalmente cerrada paralela a la exterior. Esta "cáscara" es la que produce los agudos elementos fronterizos, pero resulta topológicamente inevitable y es muy útil en la eliminación de patologías fronterizas que el suavizador no podría arreglar.

CONCLUSIONES Y PASOS FUTUROS

Estamos convencidos, a falta de formalismos en este campo, de que la única forma de resolver el problema con una malla exterior impuesta es la presentada. Directa o indirectamente deben respetarse los condicionamientos impuestos por la dual a la malla exterior.

Un excelente método, a juzgar por los resultados, es el de "subdivisión por superficies medias" [3] que presenta muchas similitudes con el de "control por programación entera" [4]. Ambos requieren fuerte intervención del usuario y aún así presentan muchos problemas, algunos de los cuales, al analizarlos, resultan ser patologías en la dual.

Pueden encontrarse formas de tratar los autocruces y de hecho alguna hemos encontrado. Esperamos avanzar en este sentido en muy poco tiempo.

También debemos resolver el problema del tamaño de los elementos interiores. Al presente heredan el tamaño de los elementos de la frontera en forma proporcional a la distancia medida en elementos, lo cual no es seguro en mallas con pocas líneas muy retorcidas.

Aún cuando no tenemos todavía desarrolladas estas rutinas, sabemos que el método consiste en el agregado de superficies cerradas internas en los lugares adecuados. Esto es para aumentar el número de elementos en una zona y así reducir su tamaño. Si además se quiere mejorar la calidad, cambiando la topología, habrá que coalescer o fusionar las superficies en determinados lugares y dividirlas en otros.

Existe una posibilidad interesante desde el punto de vista práctico: la generación de la malla dentro del dominio sin imponer una malla exterior previa. Esto requeriría la manipulación de superficies libres que tienden a ser paralelas (a distancia dependiente del punto) o a cruzarse ortogonalmente. Los "patches" biparamétricos que son el estándar en la actualidad (superficies de Bezier y similares) no sirven para ese fin, es necesario desarrollar una nueva forma de representación de superficies que conjugue la economía de datos con la maniobrabilidad de posiciones y gradientes.

Aún con las dificultades encontradas, es posible generar mallas importantes si se tienen ciertos cuidados al generar la malla exterior y se cuenta con las herramientas apropiadas para reducir el trabajo manual al reparar la malla de la frontera.

REFERENCIAS

[1] N. Calvo y S. Idelsohn, "Generación automática de mallas de hexaedros. Presentación del método y avances en la implementación", Mecánica Computacional Vol. **16**, Argentina 1996.

[2] T. Tautges, T. Blacker and S. Mitchell, "The whisker weaving algorithm: A connectivity - based method for constructing all-hexahedral finite element meshes", Intl. J. Num. Meth. Eng. **39**, 3327 – 3349, (1996)

[3] M. Pierce and C. Armstrong, "Hexahedral mesh generation by medial surface subdivision" part I: Intl. J. Num. Meth. Eng. **38,** 3335-3359, (1995), and part II: *ibid.* **40**, 111-136 (1997).

[4] T. Tam and C. Armstrong, "Finite element mesh control by integer programming" Intl. J. Num. Meth. Eng. 36, 2581-2605, (1993).