Mecánica Computacional, Volumen XVIII - pp. 461-470
Compilado por: E. Dari, C. Padra y R. Saliba
San Carlos de Bariloche, noviembre de 1997

RECONSTRUCCION ESTABLE: ¿BASES O PSEUDOBASES?

Hugo A. Aimar, Ana L. Bernardis e Ilda C. Hernández
INTEC - CONICET
Universidad Nacional del Litoral, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina

RESUMEN

El problema de la reconstrucción de una función f a partir de una lista de datos (los coeficientes de f en una base adecuada) se traduce en una "buena" caracterización del espacio en términos de los coeficientes. Existen diferentes tipos de bases con propiedades diversas; ninguna de ellas es mejor que todas las demás. la conveniencia de unas u otras depende de cada problema particular. El presente artículo contiene una panorámica sobre familias generadoras y algunas de sus propiedades. Hemos tratado de poner más énfasis en dar ejemplos que en dar demostraciones de resultados y en comparar las nuevas bases de onditas con las clásicas de Fourier.

ABSTRACT

The reconstruction of a function f from a set of data (the coefficients of f in some suitable basis) becomes a problem of a "good" caracterization of the space in terms of the coefficients. There exist different types of basis with many properties; in each problem we have to choose the ones that best fit the problem at hand. Here we present an overview of the many generating families and its properties. We rather emphasize examples than proof of results. We end up with a comparison between the new wavelet basis and the classical Fourier basis.

Ideas heurísticas

Cuando se pulsa una tecla del piano en el instante t^* se escuchará una nota con armónico ω^*. En el instante $t > t^*$ el oído percibe la nota inicial más los armónicos de frecuencia $n\omega^* = \omega$. Es decir que la señal que el oído percibe es una función del tiempo t y la frecuencia ω: $x(t,\omega)$. En el caso de señales, si la señal estudiada es $T-$periódica, $0 < T < \infty$ y $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty$ entonces se la puede representar por su serie de Fourier (que no es nada más que la representación de x como una combinación lineal de armónicos e_n con frecuencias ω_n)

$$x(t) = (1/T)\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n(t) \qquad (1)$$

También podemos ver a (1) como una correspondencia

$$c : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \quad \text{tal que} \quad c(x) = \{\alpha_i\}.$$

El problema de la reconstrucción de señales a partir de una lista de datos (los coeficientes de x) se traduce así en la caracterización de X en téminos de un espacio de sucesiones numéricas. Supongamos que la señal x pertenece a un espacio de Hilbert separable X y sea $\mathcal{C}$ el espacio de coeficientes $\mathcal{C} = \{\alpha : \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in X\}$. Tendremos una descripción nueva de los elementos de X si probamos una equivalencia de normas del tipo

Financiado por: CONICET y Programación CAI+D, UNL.

$$A||\alpha||_{\mathcal{C}} \leq ||x||_X \leq B||\alpha||_{\mathcal{C}},$$

para una adecuada elección de norma en el conjunto $\mathcal{C}$. Para que la norma en $\mathcal{C}$ dependa sólo de los valores absolutos $|\alpha_i|$ de los coeficientes, será necesaria una convergencia incondicional de la representación, pues si la convergencia de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ dependiera de posibles cancelaciones entre sus términos podría ocurrir que $||x||_X$ no pudiera acotarse por debajo por $A||\alpha||_{\mathcal{C}}$ para ninguna constante $A > 0$.

En este punto cabe preguntarse qué familias $\{x_i\}$ permiten una "buena" caracterización del espacio $\mathcal{C}$. Sabemos que existen diferentes tipos de bases, con propiedades diversas. En cada problema debemos decidir cuál de ellas es la que mejor se adapta al mismo, asegurando así una reconstrucción estable.

Breve introducción a los conceptos de base y pseudo-base

Del Algebra Lineal de muchas carreras de grado se conoce el concepto de base en un espacio vectorial de dimensión finita: dado X un espacio vectorial sobre el cuerpo K decimos que un conjunto $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ de elementos de X es una base de X si para todo vector $x \in X$ existen escalares $c_1, \cdots, c_n$ tales que $x = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n$ unívocamente. Luego, probablemente en alguna asignatura de Análisis Numérico, apareció el sistema trigonométrico $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ como una base del espacio $L^2([0, 2\pi])$. Más aún, en algunos casos quizás se vió una generalización de esta base a sistemas ortonormales y completos cualesquiera. Esta suele ser la primera base en espacios de dimensión infinita con la cual uno se encuentra. Pero ¿qué entendemos, en general, por base en un espacio de dimensión infinita?. Sea X un espacio vectorial cualquiera sobre el cuerpo K, de dimensión infinita, y sean x_λ elementos de X con λ perteneciente a un conjunto de índices Λ cualquiera. Cuando decimos que $\mathcal{B} = \{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una **base** de X estamos aún pensando en que cualquier elemento $x \in X$ se puede representar como una combinación lineal finita de los elementos de $\mathcal{B}$, es decir, que existe una sucesión de coeficientes $c = \{c_\lambda : c_\lambda \in K\}$ tal que $x = \sum_\lambda c_\lambda x_\lambda$.

Si el espacio X tiene, además de la estructura algebraica, una estructura topológica compatible, el concepto de límite ampliara la clase de los elementos "alcanzables" desde $\mathcal{B}$ y podríamos pensar en la representación de x aún para sumas infinitas. Es claro que necesitamos precisar en qué sentido debe entenderse esta representación. Cuando establezcamos el sentido de la representación de x y quizás algunas propiedades que poseen los elementos de $\mathcal{B}$, estaremos determinando qué tipo de familia utilizaremos para generar X.

Más aún, cuando consideremos espacios funcionales interesará disponer de bases tales que el tamaño de los valores absolutos de los coeficientes en dichas bases determine la pertenencia y el tamaño de la norma de una función f. Esta pretensión nos lleva a buscar bases tales que la sumabilidad de las series que ellas inducen no cambie si se cambian arbitrariamente los signos de sus coeficientes. No todas las bases en los espacios de dimensión infinita tienen esta propiedad.

A lo largo de este artículo Λ será $\mathbb{N}$, pero los resultados siguen siendo válidos si reemplazamos $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Z}$; el campo K será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ para todos los espacios vectoriales que consideraremos. Hemos tratado de poner más énfasis en dar ejemplos que en dar demostraciones de resultados.

Comenzaremos con la definición y ejemplos de base de Hamel. En estas bases, que pueden considerarse como las más rudimentarias, el concepto de generación tiene sentido algebraico: los elementos "alcanzables" son las combinaciones lineales (finitas) y para definirlas no necesitamos más que una estructura de espacio vectorial. Fueron introducidas por G. Hamel en 1905.

Sea $\mathcal{A} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un subconjunto de X. Llamaremos subespacio $L(\mathcal{A})$ **generado** por $\mathcal{A}$ al conjunto de todas las combinaciones lineales (finitas) de elementos de $\mathcal{A}$: $L(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \; : \; N \in \mathbb{N}, \quad c_i \in K \quad \text{y} \quad x_i \in \mathcal{A} \right\}$. Dado un subconjunto arbitrario $\mathcal{A}$ de un espacio vectorial X diremos que es **linealmente independiente** si y sólo si para todo subconjunto finito de

$\mathcal{A}$, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se cumple que: si $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ entonces $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

Definición: Dado un espacio vectorial X sobre el cuerpo K, se dice que un subconjunto $\mathcal{B}$ de X es una **base de Hamel** de X si para todo $x \in X$ existe un número natural n, una sucesión de escalares en K, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ y una sucesión de vectores de $\mathcal{B}$, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tales que $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$.
Notemos que fijado x los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ resultan únicos.

Ejemplo 1: El conjunto $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, con $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ y donde el 1 ocupa el lugar i-ésimo, es una base de Hamel de $\mathbb{R}^n$. Es linealmente independiente pues la igualdad

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (0, 0, \cdots, 0)$$

sólo es posible si $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Por otra parte, si $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$.

Ejemplo 2: Consideremos el espacio ℓ^2 formado por las sucesiones infinitas de números reales $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$ tales que $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots\}$, donde $e_i = (0, \cdots, 1, 0, \cdots)$ con 1 ocupando el lugar i-ésimo. Claramente, estos vectores son linealmente independientes pero $\mathcal{B}$ no es una base de Hamel, pues existen elementos de ℓ^2 que no se pueden obtener como combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{B}$. Por ejemplo cualquier $\xi \in \ell^2$ tal que $\xi_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En cambio $\mathcal{B}$ resulta una base para el subespacio de ℓ^2 constituido por todas las sucesiones que son ceros salvo para un número finito de índices.

El ejemplo anterior muestra que se necesita una definición de base que incorpore la noción de convergencia para que $\mathcal{B}$ sirva para representar los elementos de ℓ^2. Si bien este espacio, así como cualquier espacio vectorial de dimensión infinita, tiene una base de Hamel no se conocen métodos simples para construirla. La importancia de las bases radica en la sencillez de sus elementos y la posibilidad de construirlas explícitamente. El agregado de estructura topológica a la algebraica permite introducir conceptos más fecundos y analíticos de bases en los que la noción de límite aumenta la clase de los elementos "alcanzables" desde la base. En los espacios funcionales clásicos con estructuras topológicas las bases más utilizadas son las de Schauder (1927).

Definición: Sea X un espacio de Banach sobre el cuerpo K. Diremos que un subconjunto a lo sumo numerable $\mathcal{B} = \{x_i\}$ es una **base de Schauder** si y sólo si para todo $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$ en K tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ en el sentido de la norma, es decir, $\lim_{N\to\infty} ||x - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i|| = 0$.
Observe que si la dimensión de X es finita entonces los conceptos de base de Schauder y de Hamel coinciden.

Ejemplo 3: El conjunto $\mathcal{B}$ del Ejemplo 2 es una base de Schauder de ℓ^p, para $1 \leq p < \infty$. En efecto si $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$ entonces $||x|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} < \infty$. Por lo tanto $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$, pues dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces

$$||x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i||_p^p = ||(0, \cdots, 0, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots)||_p^p = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \epsilon,$$

puesto que $\sum |x_i|^p < \infty$. La independencia lineal de $\mathcal{B}$ nos asegura la unicidad de la representación.

Ya mencionamos que las bases para las cuales la sumabilidad de las representaciones no depende del signo de los coeficientes son especialmente útiles para asegurar la reconstrucción estable de funciones.

Sea X un espacio de Banach. Diremos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge incondicionalmente si para toda sucesión $\{\epsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ de más unos y menos unos la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j x_j$ converge. O equivalentemente la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)}$ converge a x para toda permutación σ.

Definición: Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita sobre el cuerpo K. Una base de Schauder $\mathcal{B} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ se denomina **base incondicional** si y sólo si en la representación única $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ la serie converge incondicionalmente para todo $x \in X$.

Observamos que si $\mathcal{B} = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de X y $\epsilon = \{\epsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares tales que $\epsilon_j = \pm 1$, entonces una condición suficiente para que $\mathcal{B}$ sea una base incondicional es la acotación de todos los operadores $S_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j \alpha_j x_j$ para todo $x \in X$.

Ejemplo 4: La base canónica $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base incondicional de ℓ^p, $1 \leq p < \infty$. Esto sigue fácilmente de la siguiente identidad: si $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$

$$||S_\epsilon(x)||_{\ell^p} = ||S_\epsilon(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k)||_{\ell^p} = ||\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k x_k e_k||_{\ell^p} = \big(\sum_{k=1}^{\infty} |\epsilon_k x_k|^p\big)^{1/p} = ||x||_{\ell^p}.$$

Ejemplo 5: Es fácil probar que el conjunto $\mathcal{B} = \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$, donde $\tilde{e}_i = (1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots)$ con tantos unos como indica el subíndice, es una base de Schauder del espacio c_0 de las sucesiones infinitas $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y $||x|| = ||x||_\infty = sup_{n\in I\!N} |x_n|$. Pero $\mathcal{B}$ no es una base incondicional de c_0. Todo elemento $x \in c_0$ admite la representación $x = \sum_{j=1}^{\infty}(x_j - x_{j+1})\tilde{e}_j$. Supongamos que existe un elemento x en c_0 cuyas componentes satisfacen la identidad $x_j - x_{j+1} = \frac{(-1)^j}{j}$. Elijamos ahora la sucesión $\epsilon = \{(-1)^j\}$. Luego si $x_m = \sum_{j=1}^{m}(x_j - x_{j+1})\tilde{e}_j$ entonces $S_\epsilon(x_m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}$ y $||S_\epsilon(x_m)|| = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \simeq log\ m$. Lo cual nos dice que el operador S_ϵ no puede ser acotado ya que $||x_m||$ es acotado. Para construir un elemento x tal que $x_j - x_{j+1} = \frac{(-1)^j}{j}$ basta tomar las componentes de x como $x_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{(-1)^k}{k}$ de manera que $x \in c_0$.

La noción de ortogonalidad en espacios de Hilbert agrega a una base todas las propiedades relevantes del caso euclídeo finito dimensional, en particular, la incondicionalidad y la deseada caracterización del espacio por medio de los coeficientes.

Recordemos que una sucesión $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert H es **ortogonal** si $< x_j, x_k >= 0$, para todo $j \neq k$, $j, k \in I\!N$ y **ortonormal** si además $||x_j|| =< x_j, x_j >^{1/2}= 1$ para todo $j \in I\!N$.

Dada una sucesión ortonormal $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, no siempre es posible escribir cualquier elemento $x \in H$ como una serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j$, pero si tal representación es posible entonces los coeficientes α_j tienen una forma especial: $\alpha_j =< x, x_j >$. Esto se deduce fácilmente de la ortonormalidad de la sucesión $\{x_j\}$ y de la continuidad del producto escalar. A los coeficientes así definidos se los denomina **coeficientes de Fourier** de x respecto de $\{x_j\}$. Llamaremos **polinomio de Fourier** de x de orden n a la expresión $P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} < x, x_j > x_j$. No es difícil probar que $||x - P_n(x)||^2 = ||x||^2 - \sum_{j=0}^{n} |< x, x_j >|^2$. De esta identidad sigue inmediatamente la siguiente desigualdad, conocida como desigualdad de Bessel:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |< x, x_j >|^2 \leq ||x||^2.$$

Observe que podemos pensar a los coeficientes de Fourier $< x, x_j >$ como las componentes de x con respecto a un sistema de ejes ortogonales correspondientes a x_j. Es decir que P_n no es nada más que la proyección de x sobre el subespacio generado por $\{x_j\}_{j=0}^{n}$. La desigualdad de Bessel nos dice, por un lado, que si $x \in H$ entonces los coeficientes de Fourier $\{< x, x_n >\}$ tienden a cero cuando $n \to \infty$. y, por otro lado, que las sumas parciales $P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} < x, x_j > x_j$ forman una sucesión que converge en la norma de H, pero no necesariamente a x. Para asegurar esto necesitamos algo más que la mera ortonormalidad de $\{x_j\}$. Por ejemplo, pedir que la sucesión $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ genere H. Cuando $\mathcal{B}$ es un conjunto ortonormal existen varias maneras equivalentes de decir que $\mathcal{B}$ genera a H: (i) $\mathcal{B}$ genera a H; (ii) $x = \sum_{j=1}^{\infty} < x, x_j > x_j$, para todo $x \in H$; (iii) para todo $x \in H$ se cumple que $||x||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} | < x, x_j > |^2$ (identidad de Parseval); (iv) si existe $x \in H$ tal que $< x, x_j >= 0$ para todo j entonces $x = 0$ (completitud).

Definición: Diremos que la sucesión ortonormal $\mathcal{B} = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una **base ortonormal** de H si $\mathcal{B}$ genera a H en el sentido de Schauder.

Notemos que una base ortonormal es una base de Schauder cuyos elementos son ortonormales.

Ejemplo 6: La base canónica de ℓ^2 que definimos en el Ejemplo 2, $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, es una base ortonormal. Claramente $\mathcal{B}$ es una sucesión ortonormal y por el Ejemplo 3, para $p = 2$, tenemos que $\mathcal{B}$ genera a ℓ^2.

Ejemplo 7: ([12], p. 11) El sistema trigonométrico $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $H = L^2([-\pi, \pi])$. Claramente los vectores de $\mathcal{B}$ son ortonormales. Luego por (iv) sólo necesitamos demostrar que el sistema es completo. Si $f \in H$ es tal que $c_k =< f, e^{ik\cdot} >= 0$ para todo k entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)T(t)dt = 0, \tag{2}$$

para cualquier polinomio trigonométrico $T(x) = \sum_{k=-N}^{k=N} \alpha_k e^{ikx}$. Probaremos que f es la función nula. Supongamos primero que f es continua y no es idénticamente cero y veremos que (2) no es posible para todo T. Luego existen x_0, $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que $|f(x)| > \epsilon$, digamos $f(x) > \epsilon$, en el intervalo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Escribiendo la función coseno en términos de la exponencial compleja, no es difícil ver que las funciones $\{T_n(x)\} = \{(1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son polinomios trigonométricos, de donde es claro que (i) $T_n(x) > 0$, para $x \in I$; (ii) $T_n(x)$ tiende uniformemente a $+\infty$ cuando $n \to +\infty$ en todo intervalo I' cuya clausura esté contenida en I; (iii) los $T_n(x)$ están uniformemente acotados fuera de I.

Luego la integral en (2), con $T(x) = T_n(x)$, se puede dividir en dos integrales; en una de ellas integramos en I y en la otra sobre el resto de$[-\pi, \pi]$. Por (i) la primer integral es mayor o igual que $\epsilon\ |I'|\ \min_{x \in I'} T_n(x)$, y así por (ii) tiende a $+\infty$ cuando $n \to +\infty$. La segunda integral se puede acotar usando (iii). Luego es imposible obtener (2) para $T = T_n$ con n grande.

Sea ahora $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Definamos $F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt$, para $t \in [-\pi, \pi]$. La condición $c_0 = 0$ implica que $F(x + 2\pi) = F(x)$ y así F es 2π periódica. Sean A_k, $k \in \mathbb{Z}$ los coeficientes de Fourier de F; integrando por partes tenemos que $\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-ikt}dt = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, con $k \neq 0$. Es decir que $A_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$. Sean ahora A'_k, $k \in \mathbb{Z}$ los coeficientes de Fourier de $F(x) - A_0$. Luego, claramente $A'_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y como $F(x) - A_0$ es continua, por lo ya probado tenemos que $F(x) - A_0 \equiv 0$ y de aquí $f \equiv 0$.

En [1] se prueba que toda base ortonormal $\mathcal{B}$ de un espacio de Hilbert H es una base incondicional de H.

A veces resulta más fácil construir bases que, sin ser ortogonales, comparten con éstas muchas propiedades esenciales y podemos todavía recuperar la ortonormalidad aplicando un operador lineal, acotado e invertible.

Definición: Sea H un espacio de Hilbert, diremos que el conjunto $\mathcal{B} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una **base de Riesz** de H si $\mathcal{B}$ genera a H y existen constantes A y B tales que para toda sucesión de escalares $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$,

$$A\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2 \le ||\sum_{i=1}^{\infty}c_i x_i||^2 \le B\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2 \tag{3}$$

donde $A > 0$, $B < \infty$ son independientes de la sucesión $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$. A (2.5.2) se la denomina condición de Riesz.

La condición de Riesz nos dice que $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente de H. Por otra parte, observamos que si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de H entonces es una base de Riesz de H. La recíproca es falsa según lo demuestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 8: Sea $\mathcal{B} = \{(2,0),(1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$. $L(\mathcal{B})$ es denso en $\mathbb{R}^2$ y $||\sum_{i=1}^{2}\alpha_i x_i||^2 = 4(\alpha_1)^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + 2(\alpha_2)^2$ para todo conjunto $\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Cálculos sencillos permiten obtener las constantes $A = 1$ y $B = 6$. Por otro lado es claro que $\mathcal{B}$ no es ortogonal, luego no constituye una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 9: Definamos

$$\phi(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{si } 0 \le |x| \le 1 \\ 0, & \text{en otro lugar} \end{cases}$$

Consideremos $\mathcal{B} = \{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\phi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f = \sum_k c_k\phi_k \quad \text{con} \quad \{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})\},$$

con la norma que hereda de $L^2(\mathbb{R})$. Probaremos que $\mathcal{B}$ es una base de Riesz de V_0. Dado que $V_0 = \overline{L(\mathcal{B})}$, sólo necesitamos probar que se verifica la condición de Riesz. Observemos primero que, usando la transformada de Fourier, se obtiene la siguiente identidad

$$\begin{aligned} ||\sum_k c_k\phi_k||_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\sum_k c_k e^{-ik\xi}\hat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} |\sum_k c_k e^{-ik(\xi+2\pi l)}\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2\, d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} |\sum_k c_k e^{-ik\xi}|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi+2\pi\ell)|^2\, d\xi = \int_0^{2\pi} g^2(\xi)m(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que

$$\sum_k |c_k|^2 = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} |\sum_k c_k e^{-ik\xi}|^2 = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} g^2(\xi)d\xi,$$

las desigualdades (3) equivalen a

$$A\int_0^{2\pi} g^2(\xi)d\xi \le \int_0^{2\pi} g^2(\xi)m(\xi)d\xi \ \le B\int_0^{2\pi} g^2(\xi)d\xi,$$

para toda $g \in L^2([0,2\pi])$. Luego la condición de Riesz es equivalente a la siguiente condición

$$0 < (2\pi)^{-1}A \le \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi+2\pi\ell)|^2 \le (2\pi)^{-1}B < \infty$$

en casi todo punto. Como en nuestro caso $\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\left(\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\right)^2$ y $2\pi\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi+2\pi\ell)|^2 = \frac{1}{3}(1+2\cos^2\xi/2)$, entonces la condición de Riesz se cumple con $A = \frac{1}{3}$ y $B = 1$.

La clase de bases de Riesz es muy grande. Es difícil dar ejemplos de bases acotadas de un espacio de Hilbert que no sean bases de Riesz. Mencionamos, sin demostración, el siguiente ejemplo dado por Babenko [2].

Ejemplo 10: la sucesión $\{|t|^{\alpha}e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, con $0<\alpha<1/2$ es una base de Schauder acotada de $L^2[-\pi,\pi]$ que no constituye una base de Riesz.

Cuando trabajamos en un espacio de Hilbert sabemos que en realidad el espacio posee una base ortonormal. Se ha trabajado mucho para encontrar bases ortonormales en determinados espacios de Hilbert que además verifiquen ciertas propiedades adicionales adecuadas a determinados problemas. Por ejemplo, queremos que los elementos x_n se puedan generar fácilmente de alguna manera o que satisfagan algunas propiedades especiales, que los c_n sean fáciles de calcular, etc. Sin embargo, el requerimiento de ortogonalidad y la propiedad de base son muy restrictivos y hacen difícil la tarea de encontrar 'buenas' bases ortonormales.
Una alternativa a las bases ortonormales son las llamadas pseudo-bases ('frames', 1952, [5]). En este caso no tendremos unicidad en los c_n, pero aún tendremos un buen control del comportamiento de ellos y de su suma. La ventaja de las pseudo-bases está en que al no ser tan restrictivas permiten la libertad de imponer condiciones extras a sus elementos.

Definición: Diremos que $\mathcal{A}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una **pseudo-base** si existen constantes $A>0$ y $B<+\infty$ tales que para todo $x\in H$ se cumple que

$$A||x||^2 \leq \sum_n |<x,x_n>|^2 \leq B||x||^2 \qquad (4)$$

A los números A y B se los denomina cotas de la pseudo-base. Si $A=B$ diremos que la pseudo-base es **justa**. Diremos que una pseudo-base es **exacta** si $\mathcal{A}\setminus\{x_k\}$ deja de ser una pseudo-base cualquiera que sea x_k.

Observaciones: El cero puede pertenecer a $\mathcal{A}$ y en este caso $\mathcal{A}$ no es una base de H; en general, las pseudo-bases no son linealmente independientes. Todos los elementos $x_k\neq 0$ de $\mathcal{A}$ son acotados, pues aplicando (4) tenemos que $||x_k||^4=|<x_k,x_k>|^2\leq\sum_n|<x_k,x_n>|^2\leq B||x_k||^2$, de donde $||x_k||\leq\sqrt{B}$.

La desigualdad de la izquierda en la definición nos dice que si las sucesiones $\{<x,x_n>\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{<y,x_n>\}_{n=1}^{\infty}$ están próximas (en la norma ℓ^2) entonces x e y también están próximas en la norma H. Es decir, tenemos reconstrucción estable.

Si bien con las pseudo-bases se pierde la unicidad, sin embargo todavía se conserva la simplicidad de la representación en series. Como la sucesión de coeficientes $\alpha=\{<x,x_n>\}_{n=1}^{\infty}$ es un elemento de ℓ^2. podemos asociar a α el operador $F:x\in H\to\{<x,x_n>\}\in\ell^2$. Se puede demostrar que el operador F^*F es hermítico positivo e invertible; luego podemos definir la sucesión $\tilde{\mathcal{A}}=\{\tilde{x}_n\}$ con $\tilde{x}_n=(F^*F)^{-1}(x_n)$, que también es una pseudo-base, llamada **pseudo-base dual**, con cotas $A^{-1}\geq B^{-1}>0$. Finalmente, teniendo en cuenta las propiedades de los operadores asociados tanto a la pseudo-base como a su dual, se puede demostrar que para $x\in H$ se tiene la siguiente expresión

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}<x,x_n>\tilde{x}_n=\sum_{n=1}^{\infty}<x,\tilde{x}_n>x_n.$$

Más detalles de esta representación se puede ver en [4].

En lo que sigue enunciamos algunos resultados que relacionan las pseudo-bases con las distintas bases. Denotamos con H un espacio de Hilbert separable.

Proposición: $\mathcal{A}=\{x_n\}$ es una base ortonormal H si y sólo si es una pseudo-base justa con $A=B=1$ y $||x_n||=1$ para todo n. (Ver [1]).

Proposición: Una sucesión de vectores $\mathcal{A}=\{x_k\}$ perteneciente a H es una base de Riesz si y sólo si es una pseudo-base exacta. (Ver [11] p. 188)

Proposición: Una sucesión de vectores $\mathcal{A} = \{x_k\}$ perteneciente a H es una pseudo-base exacta si y sólo si es una base incondicional y acotada de H. (Ver [8]).

Corolario: En H, $\mathcal{B}$ es una base de Riesz si y sólo si es una base incondicional acotada.

En los ejemplos siguientes $\mathcal{B} = \{x_k\}_{k\in I\!N}$ es una base ortonormal de H.

Ejemplo 11: Probaremos que $\mathcal{A} = \{x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, \ldots\}$ es una pseudo-base. Llamemos $\tilde{x}_i$ a los elementos de $\mathcal{A}$; luego

$$\sum |< x, \tilde{x}_i >|^2 = 2\sum |< x, x_i >|^2 = 4||x||^2$$

es decir se cumple la condición de pseudo-base con $A = B = 2$. $\mathcal{A}$ es justa pero no es exacta pues claramente $\mathcal{A} \setminus \{x_k\}$ es una pseudo-base.

Ejemplo 12: $\mathcal{A} = \{\frac{x_n}{n}\} = \{\tilde{x}_n\}$ es una sucesión ortogonal completa, pero no es una pseudo-base. En efecto, para todo $M > 0$ tenemos que

$$\tilde{S}_M = \sum_{n=1}^{M} |< x, \tilde{x}_n >|^2 = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^2} |< x, x_n >|^2 \geq \frac{1}{M^2} \sum_{n=1}^{M} |< x, x_n >|^2 = \frac{1}{M^2} S_M.$$

Luego no existe una constante $A > 0$ que verifique la desigualdad $A||x||^2 \leq \sum_n |< x, \tilde{x}_n >|^2$.

Ejemplo 12: $\mathcal{A} = \{x_i\}_{i=2}^{i=\infty} \cup \{2x_1\} = \{\tilde{x}_i\}$ es una pseudo-base. Claramente

$$\sum |< x, x_i >|^2 \leq \sum |< x, \tilde{x}_i >|^2 \leq 2\sum |< x, x_i >|^2.$$

Luego $\mathcal{A}$ es una pseudo-base exacta pero no justa puesto que $A = 1$ y $B = 2$.

Comparación elemental de los sistemas de Fourier y Haar

En el Ejemplo 7 vimos que el sistema trigonométrico $\{(2\pi)^{-1/2}e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2([-\pi,\pi])$. Expondremos brevemente un punto de vista operacional de este hecho, por medio de la aproximación de $L^2([-\pi,\pi])$ por una sucesión creciente de subespacios que se adapta mejor para comparar este sistema con el de Haar.

Los subespacios V_j de $L^2([-\pi,\pi])$ definidos por

$$V_j = \{T : T(x) = \sum_{|k|\leq j} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}\} \qquad j \in I\!N \cup \{0\}$$

están generados por los conjuntos $\mathcal{B}_j = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\}_{|k|\leq j}$. Más aún, $\mathcal{B}_j$ es una base ortonormal de V_j. Notemos que la sucesión $\{V_j\}$ es creciente, $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_j \subset \ldots$, y que la completitud del sistema trigonométrico garantiza que $\overline{\bigcup_{j\in I\!N} V_j} = L^2([-\pi,\pi])$, donde la barra indica la clausura en la norma de $L^2([-\pi,\pi])$. Si $P_m : L^2([-\pi,\pi]) \to V_m$ denota la proyección sobre V_m, entonces $P_m(f)(x) = \sum_{|k|\leq m} c_k e^{ikx}$, con $c_k = \frac{i}{2\pi} < f, e^{ik\cdot} >$. La convergencia en $L^2([-\pi,\pi])$ de la serie de Fourier de f hacia la función f puede reformularse en términos de los operadores P_m de la siguiente manera

$$lim_{m\to\infty} P_m(f) = f \qquad \text{en} \quad L^2([-\pi,\pi]). \tag{5}$$

Claramente, los espacios V_m no son mutuamente ortogonales. Un proceso elemental de ortogonalización consiste en sustituir la sucesión $\{V_m\}$ inicial por la de los subespacios complementarios

$W_0 = V_0$, $W_1 = V_1 - V_0$, $W_2 = V_2 - V_1$, y en general $W_m = V_m - V_{m-1}$, donde W_m es el complementario de V_{m-1} en V_m. Por otra parte, de (5) sigue que, en la norma de $L^2([-\pi,\pi])$,

$$f = P_0(f) \ + \sum_{k\in I\!N} (P_k(f) - P_{k-1}(f)).$$

Si denotamos con $S_N f(x)$ la N-ésima suma parcial de la serie de Fourier de la función f en el punto x y si $1 < p < \infty$ entonces hay convergencia en casi todo punto como demostraron Carleson ([3]) en 1966, para $p = 2$, y Hunt [6] en 1967, para $p > 1$. Este resultado es uno de los más importantes y técnicamente difíciles de todo el análisis armónico.

También es posible obtener una base de $L^2(I\!R) = L^2$ a partir de la sucesión encajada de los espacios de funciones constantes sobre intervalos diádicos, imitando el punto de vista expuesto para el sistema trigonométrico (ver [7]). Partiendo de

$$V_0 = \left\{ f \in L^2 : f \text{ es constante en } I_{0,k}, \quad k \in Z\!\!\!Z \right\}$$

y $\phi = \chi_{[0,1)} \in V_0$ se construye para cada $j \in Z\!\!\!Z$ el subespacio del nivel 2^{-j}

$$V_j = \left\{ f \in L^2 : f \text{ es constante en } I_{j,k}, \quad k \in Z\!\!\!Z \right\}$$

y su base ortonormal $\mathcal{B}_j = \{\phi_{j,k}\}_{k\in Z\!\!\!Z} = \{2^{j/2}\phi(2^j . - k), k \in Z\!\!\!Z\}$ con $\operatorname{sop}(\phi_{j,k}) = [2^j k, 2^j(k+1)) = I_{j,k}$.
Como antes se puede construir una base que conserve las propiedades de localización de $\{\phi_{j,k}\}$ considerando la sucesión de subespacios complementarios $W_m = V_m - V_{m-1}$:

$$h_{m-1,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{m,2k}(x) - \phi_{m,2k+1}(x)$$

Es decir que la familia $\mathcal{B} = \{h_{j,k} : j,k \in Z\!\!\!Z\}$ se obtiene por dilataciones diádicas y traslaciones enteras de la función de Haar $h = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$. Luego si $f \in L^2$ tenemos la representación

$$f = \sum_{j\in Z\!\!\!Z} (P_j - P_{j-1})(f) = \sum_j \sum_k d_{j,k} h_{j,k},$$

donde la convergencia es en la norma L^2. Por lo tanto, la familia $\mathcal{B}$ genera a $L^2(I\!R)$. Contrariamente a lo observado sobre la convergencia puntual de series de Fourier de funciones de cuadrado sumable, la convergencia puntual de las expansiones de Haar se obtiene de manera sencilla, pues si $x \in I\!R$ entonces x está en uno y sólo un intervalo de cada nivel 2^{-j}. Precisamente esta dependencia entre la sucesión de los intervalos diádicos encajados y el punto x al que tienden está dada por la expansión de x en base dos (ver [1]).

El hecho fundamental que distingue al sistema de Haar del de Fourier es el comportamiento de los operadores definidos por cambios arbitrarios en el signo de los coeficientes, es decir, la convergencia incondicional. Para explotar cuantitativamente este hecho de apariencia cualitativa la herramienta básica del análisis consiste en usar las propiedades de un sistema ortogonal incompleto, emparentado en su construcción con el de Haar: el sistema de Rademacher (ver [1]).

Desde el punto de vista formal de las series, la incondicionalidad puede aparecer como un modo algo artificial de expresar una forma estable de convergencia. Sin embargo es un hecho básico del análisis armónico que, si $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx}$ es la expansión $L^2([-\pi,\pi])$ de la función

$f \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces para ciertas elecciones de $\epsilon = \{\epsilon_j : j \in \mathbb{Z}\}$ con $\epsilon_j = \pm 1$, el operador T que a f asigna la función $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k c_k e^{ikx}$, no sólo es acotado en $L^2([-\pi, \pi])$, sino también en $L^p([-\pi, \pi])$ con $1 < p < \infty$. Tal es el caso cuando, por ejemplo, $\epsilon_j = 1$ si $j > 0$ y $\epsilon_j = -1$ si $j < 0$. En este caso no sólo es cierta la mencionada acotación sino también que T es un operador de convolución con el núcleo singular clásico $\frac{1}{x}$, llamado la Transformada de Hilbert (ver [1]). Cuando la sucesión ϵ es más arbitraria en cuanto a la distribución de los signos positivos y negativos, el resultado es completamente diferente. En el libro de A. Zygmund ([12] Cap. VIII, pag. 308) se demuestra que si $p \neq 2$ existe una función $f \in L^p([-\pi, \pi])$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < f, e^{ik\cdot} > e^{ikx}$ no pertenece $L^p([-\pi, \pi])$ para casi ninguna elección de ϵ en el sentido de la medida probabilística de Bernoulli usual en el producto de infinitas copias de $\{-1, +1\}$. Precisamente la sucesión ϵ que induce la Transformada de Hilbert es una de las pocas excepciones a la regla general: no hay convergencia incondicional de las series de Fourier en $L^p([-\pi, \pi])$ cuando $p \neq 2$.

El progreso diádico en las escalas del sistema de Haar determina que el comportamiento de las series en esta base sí sea incondicional en los espacios $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$. Esto se demuestra probando que, si $\epsilon_{j,k} = \pm 1$, entonces el operador

$$S_\epsilon(f) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \epsilon_{j,k} < f, h_{j,k} > h_{j,k},$$

está acotado en L^p; es decir $||S_\epsilon(f)||_p \leq C||f||_p$ para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$ (ver [1]).

Como una aplicación del resultado precedente, se puede probar que la pertenencia a L^p de una función f queda determinada por el tamaño de los valores absolutos de sus coeficientes de Haar. El mismo problema para el análisis de Fourier clásico tiene respuesta negativa. Más todavía, muchos otros espacios funcionales como los de regularidad Lipschitz y los de Sobolev quedan también caracterizados por espacios de sucesiones.

REFERENCIAS

[1] Aimar, H., Bernardis, A. y Hernández, I., "Notas sobre Análisis Multiresolución", preprint agosto/97.

[2] Babennko, K. I., *On conjugate functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 62 (1948), 157-160.

[3] Carleson, L., *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math., 116 (1966), 135-157.

[4] Daubechies, I., "Ten lectures on wavelets". SIAM CBMS - NSF Regional Conf. Series in Applied Math., 1992.

[5] Duffin, R. J. y Schaeffer, A. C., *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 341-366.

[6] Hunt, R., *On convergence of Fourier series. Orthogonal expansions and their continuous analogues*, Southern Illinois Univ. Press (1968), 235-256.

[7] Hernández, I. y Cardona, A., *Transformada de ondículas*, Mec. Comp., Vol. XIV (1994), p. 638-645.

[8] Heil, C and Walnut, D., *Continuous and Discrete wavelet transforms*, SIAM Review, Vol. 31, No. 4 (1989), pp. 628-666.

[9] Singer, I., " Bases in Banach spaces I", Springer-Verlag, N. Y., 1970.

[10] Swelden, W., *Wavelets: What Next?*, Proceeding of the IEEE, vol 84, No. 4 (1996), 680-685.

[11] Young, R., " An introduction to nonharmonic Fourier series", Academic Press, Inc., 1980.

[12] Zygmund, A., " Trigonometric Series", Cambridge University Press, 1977.