

**CALCULO TÉRMICO CON RADIACIÓN EN BASE A CÓDIGOS RESOLVEDORES DE  
LA ECUACIÓN DE FOURIER**

H. H. Brito  
L. Lifschitz  
R. Duelli  
R. Dean

Grupo de Mecánica Computacional  
Dpto. Mecánica - Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de Río Cuarto  
Ruta Nacional 36 Km. 601  
5800 - Río Cuarto - Argentina

**RESUMEN**

En este trabajo se describe un módulo escrito en lenguaje FORTRAN, destinado a proveer a los usuarios de códigos resolvedores de la ecuación de Fourier, basados en el Método de los Elementos Finitos, de una herramienta que permite extender las capacidades de dichos códigos al cálculo térmico con radiación, tanto estacionario como inestacionario. Dicho módulo se articula en torno al cálculo de los factores de vista entre los elementos del modelo previamente elaborado, y de coeficientes de convección "equivalentes" que incorporan los intercambios radiativos como condiciones de borde de Neumann para la ecuación de Fourier. La distribución de temperaturas en el modelo es suministrada por el código resolvedor a partir de condiciones de borde reajustadas en sucesivos pasos de cálculo. El módulo se implementó en computadoras del tipo PC, comunicándose con el código de base mediante la lectura de archivos de salida de este último y de la modificación del archivo de entrada del mismo, en un esquema de cálculo iterativo. Se procedió a la validación del módulo mediante casos de prueba y comparación con mediciones relevadas a bordo del microsatélite  $\mu$ SAT-1 "VICTOR", en órbita baja terrestre.

**ABSTRACT**

The aim of this work is to describe a FORTRAN procedure intended to help users of Fourier equation solvers to extend their capabilities to steady state or transient thermal analysis including radiation. Based upon a previously generated model, this procedure is built around the calculation of the interelement view factors and "equivalent" convection coefficients, which account for the radiation exchanges as the Neumann boundary conditions for the Fourier equation. The model temperature field is produced by the solver for the boundary conditions being adjusted in every calculation step. The procedure run in PC-based workstations; it communicates with the solver by reading their output files and by modifying their input files, in an iterative computing scheme. A procedure validation has been performed by means of test cases and analysis of temperature telemetry data from  $\mu$ SAT-1 "VICTOR" microsatellite in LEO.

**INTRODUCCIÓN**

Existe un cierto número de códigos computacionales que permiten resolver la ecuación de Fourier para geometrías y condiciones de borde arbitrarias, sin presencia de radiación. Algunos códigos comerciales ofrecen la posibilidad de incluir esta forma de transferencia de calor en la formulación general del problema. No obstante, su adquisición exige disponer de presupuestos habitualmente prohibitivos para

nuestras instituciones de investigación, mientras que la confiabilidad de los resultados que producen es, por lo menos, dudosa. Por otra parte, encarar programas de desarrollo de software involucra tiempos incompatibles con los plazos requeridos para la solución del problema primario, cuando este se extrae de un contexto de actividades multidisciplinarias con metas concretas, cuantificables y acotadas en el tiempo.

La literatura sobre el M.E.F. da como ejemplo de las aplicaciones del método para la resolución de problemas no estructurales, la resolución de la ecuación "cuasi-armónica" [1], donde uno de los ejemplos de aplicación se refiere a la transmisión del calor por conducción. En otro ejemplo [2] se desarrolla el tratamiento de la transferencia de calor bidimensional con condiciones de borde convectivas.

Disponiendo de un código computacional cerrado, que resuelve la ecuación de Fourier para la conducción del calor, que admite condiciones de borde de temperatura, flujo y convección, el objeto de este trabajo es presentar un módulo escrito en lenguaje FORTRAN que amplíe las capacidades de dicho código para incluir intercambio de calor por radiación [3] sin recurrir a la analogía eléctrica para el tratamiento de la radiación.

El código resolutor de la ecuación de Fourier (sin radiación), en régimen transitorio:  $[C] \{dT/dt\} + [K] \{T\} = \{Q\}$ , integra esta ecuación utilizando el esquema de Crank-Nicolson. Este algoritmo implícito resulta incondicionalmente estable para problemas no lineales [6]. El módulo FORTRAN procede, utilizando los datos generados en la discretización del problema, a calcular los factores de vista entre los elementos finitos triangulares [4], considerando elementos isotérmicos dispuestos arbitrariamente en el espacio. Se emplean las fórmulas de integración numérica de Gauss para triángulos [1].

A continuación, se calculan en cada paso los coeficientes de convección equivalentes y las temperaturas ambiente equivalentes para el intercambio de calor por radiación, para cada elemento [3] [5], actualizándose los arreglos  $[C]$ ,  $[K]$  y  $\{Q\}$ . Este proceso se repite a lo largo del dominio del tiempo, conformando una aproximación cuasi-estática a la solución del problema inestacionario.

## FUNDAMENTOS

Se considera en primera instancia el intercambio radiativo entre dos superficies negras y difusas. El flujo energético, en la unidad de tiempo, emitido por la superficie 1 está dado por:  $\phi_1 = A_1 R_1$ , siendo  $A_1$  el área de la misma y  $R_1$  la radiancia correspondiente, definida como:

$$R_1 = \sigma T_1^4$$

$\sigma$ : constante de Stefan-Boltzman  $[W/m^2/K^4]$

$T_1$ : temperatura superficie 1 [K]

El flujo elemental emitido por la superficie 1 e interceptado por el elemento de  $dA_2$  está dado por:

$$d\phi_{1,2} = I_{1,2} \cdot d\Omega_{1,2}$$

siendo  $I_{1,2}$  la intensidad de la radiación emitida por la superficie  $dA_1$  en dirección al elemento de superficie  $dA_2$  y  $d\Omega_{1,2}$  el ángulo sólido correspondiente.

A su vez  $I_{1,2} = B_1 dA_1 \cos \theta_1$  donde  $B_1$  es el brillo ("brilliance" [7]) de la superficie 1.  $\theta_1$  es el ángulo entre la normal a la superficie  $dA_1$  y la línea que une los "centroides" de  $dA_1$  y  $dA_2$ . En consecuencia:

$$d\phi_{1,2} = B_1 \cdot dA_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot d\Omega_{1,2}$$

Assumiendo la validez de la ley de Lambert, se tiene:  $B_1 = \frac{R_1}{\pi}$

$$d\phi_{1,2} = \frac{R_1}{\pi} dA_1 \cdot \cos \theta_1 d\Omega_{1,2} :$$

siendo:

$$d\Omega_{1,2} = \frac{dA_2 \cdot \cos \theta_2}{r^2}$$

donde  $R_1$  es la radiancia de la superficie  $dA_1$ ;  $\theta_2$  ángulo entre la normal a la superficie  $dA_2$  y la línea que une los centroides de  $dA_1$  y  $dA_2$ .

Considerando la definición del factor de vista  $F_{1,2}$  [3] como la relación entre la energía radiante que es interceptada por la superficie 2 (emitida por la superficie 1) y la energía emitida por la superficie 1:

$$F_{1,2} = \frac{\phi_{1,2}}{\phi_1} = \frac{\phi_{1,2}}{A_1 R_1} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2$$

$$F_{1,2} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (1)$$

$$\phi_{1,2} = F_{1,2} \phi_1$$

$$\phi_{1,2} = F_{1,2} A_1 R_1 = A_1 \sigma T_1^4 F_{1,2}$$

de igual forma:

$$\phi_{2,1} = A_2 \sigma T_2^4 F_{2,1}$$

el intercambio neto de radiación:

$$P_{1,2} = \phi_{1,2} - \phi_{2,1} = \sigma A_1 F_{1,2} (T_1^4 - T_2^4)$$

Para el caso de superficies grises difusas, la expresión del flujo neto de radiación se puede escribir como:

$$P_{1,2} = \phi_{1,2} - \phi_{2,1} = \sigma A_1 \text{RAD}_{1,2} (T_1^4 - T_2^4)$$

Donde  $\text{RAD}_{1,2}$  [7] tiene en cuenta el factor de vista  $F_{1,2}$ , las emisividades de ambas superficies, y la relación de áreas entre las mismas.

Considerando el intercambio energético por radiación, para  $N$  superficies, el flujo resultante en la superficie  $i$  resulta:

$$\phi^{(i)} = \sum_{j=1}^N (\phi_{i,j} - \phi_{j,i})$$

siendo:

$$\begin{aligned}\phi_{j,i} &= \sigma T_j^4 A_j \text{RAD}_{j,i} \\ \phi_{i,j} &= \sigma T_i^4 A_i \text{RAD}_{i,j}\end{aligned}$$

resulta, utilizando la relación de reciprocidad  $A_i \text{RAD}_{i,j} = A_j \text{RAD}_{j,i}$  :

$$\phi^{(i)} = \sum_{j=1}^N (\sigma A_i \text{RAD}_{i,j} (T_i^4 - T_j^4))$$

lo que se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\phi^{(i)} &= \sum_{j=1 (i \neq j)}^N (\sigma A_i \text{RAD}_{i,j} (T_i + T_j) (T_i^2 + T_j^2) (T_i - T_j)) \\ \phi^{(i)} &= A_i \sum_{j=1 (i \neq j)}^N (h_{i,j} (T_i - T_j))\end{aligned}$$

siendo:

$$h_{i,j (i \neq j)} = \sigma \text{RAD}_{i,j} (T_i + T_j) (T_i^2 + T_j^2) \quad (2)$$

el cual se puede considerar como un coeficiente de convección equivalente.

## SOLUCIÓN NUMÉRICA

### CÁLCULO NUMÉRICO DE LOS FACTORES DE VISTA

En este trabajo se realiza el cálculo numérico de factores de vista entre elementos triangulares planos ubicados arbitrariamente en un espacio tridimensional. Este cálculo consiste en evaluar numéricamente la expresión (1). La integración numérica sobre ambas áreas se realiza empleando el método de la cuadratura de Gauss, utilizando las fórmulas y coeficientes deducidas por G.R. COWPER [8]

$$\iint f \, dA = A \sum_{i=1}^N w_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad (3)$$

Donde:  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  son las coordenadas de áreas de el i-esimo punto de integración y  $w_i$  es el peso asociado con dicho punto. Según lo expresado en la referencia [4], la expresión (3) aplicada a la evaluación numérica de la expresión (1) queda de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}F_{1,2} &= \frac{1}{A_1} \sum_{q=1}^L \sum_{r=1}^L W_q W_r I_{1,2} (P_q^{(1)}, P_r^{(1)}) A_1 A_2 \\ I_{1,2} (P_q^{(1)}, P_r^{(1)}) &= \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi (r_{1,2})^2}\end{aligned}$$

Donde:  $W_q$  y  $W_r$  son los pesos que ponderan la suma del integrando, evaluado en el conjunto de puntos  $P_q$  y  $P_r$ .

## MÉTODO Y ANÁLISIS

Se dispone de un código computacional que permite resolver la ecuación de Fourier para geometrías y condiciones de borde arbitrarias de temperaturas y flujo (Dirichlet y/o Neumann), sin la presencia de radiación. [1] y [2].

La ecuación discretizada por el método de elementos finitos, para un análisis transitorio es la siguiente [5]:

$$[C] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} = \{Q\} \quad (4)$$

Donde:

[C] = matriz de capacitancia térmica.

[K] = matriz de conductancia térmica.

{Q} = vector de carga térmica.

{T} = vector de temperatura.

El análisis transitorio requiere la integración temporal de la ecuación (4), realizada por un algoritmo implícito, que determina:  $T_n$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Tal que:

$$[C]_{n-\alpha} \{\dot{T}\}_{n+\alpha} + [K]_{n-\alpha} \{T\}_{n-\alpha} = \{Q\}_{n+\alpha}$$

$$\{T\}_{n+1} = \{T\}_n + \Delta t \{\dot{T}\}_{n+\alpha}$$

$$\{T\}_0 = \{T\}$$

Donde:

$$[C]_{n+\alpha} = [C](\{T\}_{n-\alpha}, t_{n-\alpha})$$

$$[K]_{n+\alpha} = [K](\{T\}_{n+\alpha}, t_{n+\alpha})$$

$$\{T\}_{n-\alpha} = (1 - \alpha) \{T\}_n + \alpha \{T\}_{n+1}$$

$$\{Q\}_n = (1 - \alpha) \{Q\}_n + \alpha \{Q\}_{n+1}$$

$$t_{n-\alpha} = (n + \alpha) \Delta t$$

$$\{\dot{T}\}_{n-\alpha} = (1 - \alpha) \{\dot{T}\}_n + \alpha \{\dot{T}\}_{n+1}$$

Reescribiendo

$$\{\dot{T}\}_{n-\alpha} = \left(\frac{1}{\Delta t}\right) (\{T\}_{n+1} - \{T\}_n) \quad (5)$$

$$\{T\}_{n-\alpha} = \{T\} + \alpha (\{T\}_{n+1} - \{T\}_n) \quad (6)$$

Utilizando las ecuaciones (5) y (6) en (4) obtenemos:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \{C\}_{n+\alpha} + \alpha \{K\}_{n+\alpha}\right] (\{T\}_n + \{T\}_{n+1}) = -\{K\}_{n+\alpha} \{T\}_n + \{Q\}_{n+\alpha} \quad (7)$$

La expresión (7) resulta incondicionalmente estable según T. J. H. Hughes [6]. Si  $\alpha = \frac{1}{2}$  obtenemos el método de Crank-Nicolson trapezoidal.

En el caso de transferencia de calor por radiación el problema se convierte en uno de convección equivalente, calculando el coeficiente de convección equivalente y la temperatura de convección

equivalente para cada elemento. Utilizando la expresión (2), que para el elemento  $i$ -ésimo toma la forma:

$$CCE_i = \sum_{j=1, (j \neq i)}^N h_{ij} = \sum_{j=1, (j \neq i)}^N \sigma \text{RAD}_{ij} (T_i + T_j) (T_i^2 + T_j^2) \quad (8)$$

y la temperatura de convección equivalente para el elemento  $i$ -ésimo, está dada por la siguiente expresión:

$$T_{ce, i} = \frac{\sum_{j=1, (j \neq i)}^N h_{ij} T_j}{h_i} \quad (9)$$

Los valores de (8) y (9) se utilizan en las condiciones de borde del problema equivalente al de radiación.

### IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

La implementación computacional se describe en el diagrama de flujo de la Fig. 1. En la parte derecha se esquematiza el procedimiento que se realiza una sola vez al analizar nuestro caso de estudio (DATOS.TXT) en donde el esfuerzo computacional está puesto en el cálculo de los Factores de Vista. En la parte izquierda se describe el proceso iterativo que permite el cálculo de la transferencia de calor por radiación a través de un problema de convección equivalente.

C.R.E.F : Código Resolvedor de la Ecuación de Fourier.  
TCE\_PX.RES : Temperaturas de convección equivalentes.  
CCE\_PX.RES : Coeficientes de convección equivalentes.

### RESULTADOS OBTENIDOS

Como casos de prueba de funcionamiento del módulo desarrollado se consideró en primer lugar las soluciones de las ecuaciones diferenciales para dos placas ortogonales sin arista en común y dos placas paralelas, en ambos casos radiando solamente entre ellas. Los resultados numéricos de las mismas fueron obtenidos con el software MATHEMATICA [9]. Sobre los mencionados casos se aplicó el módulo para resolver la transferencia de calor por radiación obteniéndose resultados numéricos de la misma. Una comparación entre los resultados obtenidos en ambos casos, 1 y 2, se presentan. En el módulo se consideró el análisis transitorio con un paso de 100 y 50 segundos respectivamente, una emisividad de uno, y los factores de vista empleados fueron extraídos del software COSMOS [10].

$\epsilon$ : emisividad

$\sigma$ : Constante de Stefan - Boltzman

$\rho$ : densidad [kg/m<sup>3</sup>]

$F_{12}=F_{21}$ : factor de vista (placas paralelas:  $F_{12}=F_{21} = 0.2$ ; placas ortogonales:  $F_{12} = F_{21} = 0.03297$ )

$c$ : calor específico [ $\frac{\text{Joule}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ ]

$T$ : temperatura absoluta [K]

$q$ : energía por unidad de tiempo [W]

$e$ : espesor de las placas [m]

Considerando las ecuaciones del balance energético entre las placas, para ambos casos se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$A_1 \cdot \epsilon_1 \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{dT_1}{dt} = -\epsilon_1 \cdot \sigma \cdot A_1 \cdot T_1^4 \cdot F_{12} + \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot A_2 \cdot T_2^4 \cdot F_{21}$$

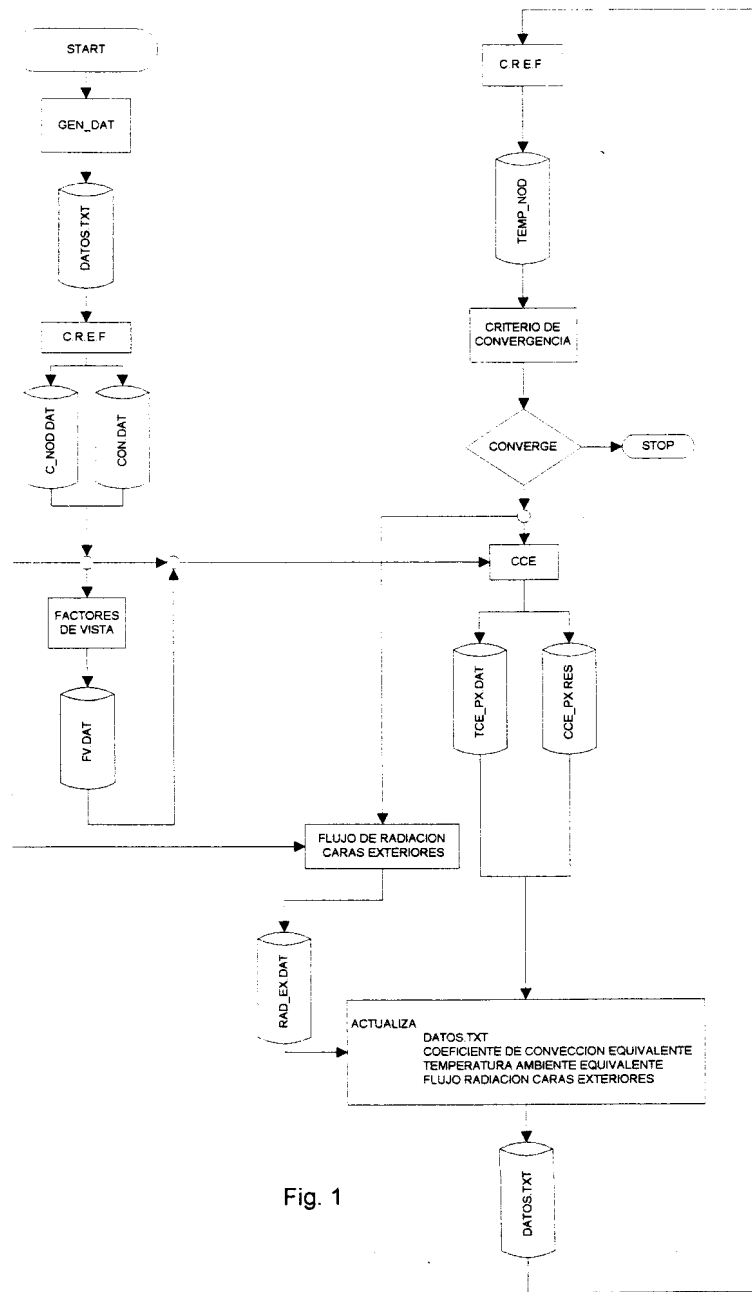


Fig. 1

$$A_2 \cdot \epsilon_2 \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{dT_2}{dt} = -\epsilon_2 \cdot \sigma \cdot A_2 \cdot T_2^4 \cdot F_{21} + \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot A_1 \cdot T_1^4 \cdot F_{12}$$

definiendo el parámetro  $a = \frac{\epsilon_1 \sigma F_{12}}{\rho \cdot c \cdot c}$  estas ecuaciones pueden reescribirse como:

$$\frac{dT_1}{dt} = a \cdot [T_2^4 - T_1^4]$$

$$\frac{dT_2}{dt} = a \cdot [T_1^4 - T_2^4]$$

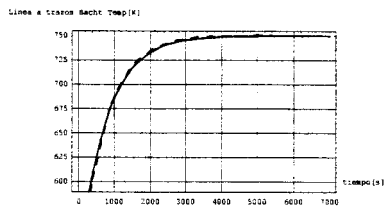


Fig. 2: Caso 1 - Placas ortogonales

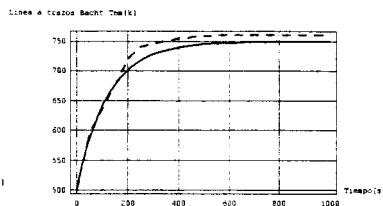


Fig. 3: Caso 2 - Placas paralelas

Temperaturas relevadas a bordo del microsatélite  $\mu$ SAT-1 "VÍCTOR" [11]

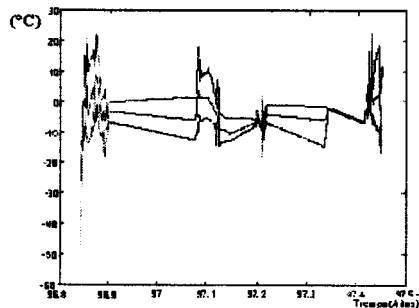


Fig. 4: Temperaturas máximas, medias y mínimas relevadas a bordo del "VICTOR"

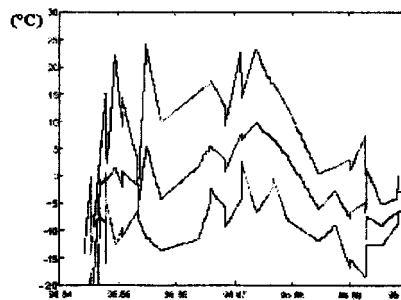


Fig. 5 Ampliación 1º periodo de plano sol

A continuación los resultados que se obtienen con el empleo del módulo para resolver la transferencia de calor por radiación, utilizando un modelo simplificado del microsatélite. Se consideró un paralelepípedo de dimensiones 0.33 [m] x 0.33 [m] x 0.43 [m], con espesores equivalentes de 2[mm] y 3[mm], obteniéndose su comportamiento en el tiempo para los casos de: a) calentamiento sin albedo, b) enfriamiento sin albedo. c) calentamiento con albedo, d) enfriamiento con albedo. Todos los casos fueron obtenidos considerando ambos valores de espesores.



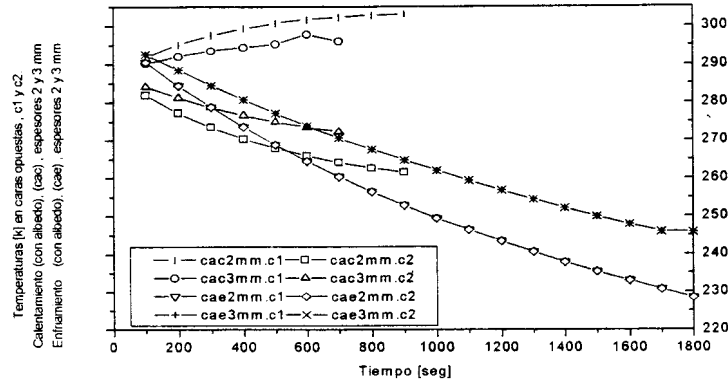


Fig. 6

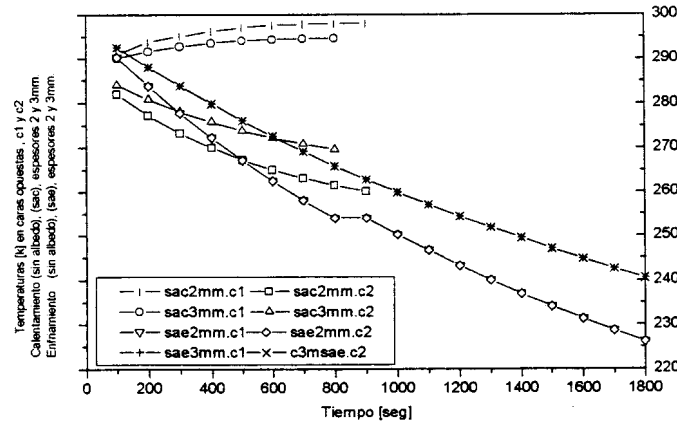


Fig. 7

### CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos mediante la aplicación del módulo descrito en este trabajo a distintos casos de prueba, así como a un modelo simplificado de elementos finitos del microsátélite  $\mu$ SAT-1 "VICTOR", demuestran su capacidad de resolver problemas de transferencia de calor con preponderancia de intercambios térmicos por radiación, es decir, problemas fuertemente no lineales para los que, en general, no se dispone de software comercial que provea soluciones confiables.

Si bien el objetivo principal de este trabajo consistió en la implementación computacional del módulo de manejo de la ecuación de Fourier, se trabajó en la formulación matemática del problema específico de radiación, obteniéndose un conjunto de resultados generales cuya validez no se ve disminuida por las hipótesis simplificativas adoptadas, tanto para el planteo teórico del problema, como para la ejecución de los casos de cálculo citados en primer término. Estas hipótesis se refieren a las características termoópticas de los materiales empleados, a la existencia de "tabiques" o barreras para la radiación entre elementos del M.E.F., al tipo de cargas térmicas, y a los parámetros computacionales tales como la subdivisión del dominio y el número de pasos del intervalo de características elementales "congeladas".

Queda además demostrada la factibilidad de utilizar una aproximación "cuasi-estática", basada en el esquema de Crank-Nicolson trapezoidal ( $\alpha = 0.5$ ) para la estabilidad incondicional de la solución. No se abordó el análisis de la precisión asociada a la elección de los intervalos de tiempo de "congelación". Sin embargo, la disponibilidad de un módulo como el aquí presentado constituye un prerrequisito para la realización y verificación computacional de dicho análisis.

### RECONOCIMIENTOS

Los autores desean expresar el reconocimiento a Leonardo Molisani, Sebastián Maglione, Fernando Cappellari y Guillermo Marclé, quienes brindaron una valiosa colaboración en la realización del presente trabajo.

### REFERENCIAS

- [1] Zienkiewicz, O. C. *El método de los elementos finitos*. Reverté, 1980
- [2] Segerlind, Larry J. *Applied Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons, 1984
- [3] Holman, J.P., *Heat Transfer*. McGraw Hill, 1990.
- [4] Sanchez Sarmiento, G. *Cálculo Numérico de Factores de vista Entre Elementos de Superficies Isotérmicas Arbitrariamente En Un Espacio Tridimensional*. Memorias del V Encuentro Nacional de Investigadores y Usuarios del método de Elementos finitos ENIEF'87., 1987. págs. 361-377.
- [5] Bathe, Klaus Jürgen., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall. 1982
- [6] Hughes, T.J.R., *Unconditionally Stable Algorithms for Nonlinear Heat Conduction*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 10, pp 135-139, 1977.
- [7] Mauduyt, Jaques., *Contrôle Thermique*. Conception et Technologie des Satellites. CNES Toulouse, 1992
- [8] Cowper, G.R., *Gaussian Quadrature Formulas for Triangles*. Int. J. Num. Meth. Eng., 1973. págs. 405-408.
- [9] **Mathematica for Windows**. Versión 2.2.2., Wolfram Research, Inc., 1994
- [10] **Cosmos/M, Explorer**. Versión 1.75. SRAC Corporation.
- [11] **Proyecto  $\mu$ SAT - Temperaturas relevadas a bordo** - Comunicación Técnica del I.U.A. - Agosto de 1997