Mecánica Computacional, Volumen XVIII - pp. 585-594
Compilado por: E. Dari, C. Padra y R. Saliba
San Carlos de Bariloche, noviembre de 1997

APLICACION DE UN MODELO DE OPTIMIZACION EN UN PROCESO DE OPERACION DE EMBALSE

Graciela Croceri, Cecilia Durán, Irene Mosconi, Graciela Sottosanto
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Comahue
Santa Fé 1400 (8300) Neuquén
Cristina Maciel
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur
Colón 80 (8000) Bahía Blanca

RESUMEN

En este trabajo se presenta un problema de programación lineal que modela el proceso de operación de la represa Alicurá. Se justifican las razones técnicas y matemáticas para considerar el emprendimiento como un sistema aislado. Aspectos referentes a la obtención y adecuación de los datos son descriptos. La solución se obtuvo usando el Método Simplex. Se hace referencia al problema dual, su interpretación económica y análisis de sensibilidad. Finalmente, se hacen consideraciones sobre la función objetivo que llevan a una formulación no lineal y se resuelve usando la estrategia de programación secuencial cuadrática. Se concluyen sobre aspectos referentes al modelo y a las implementaciones realizadas.

INTRODUCCION

Las características geográficas de la región del Comahue, juntamente con el aporte del desarrollo tecnológico, han permitido en los últimos años la construcción de importantes obras hidroeléctricas ubicadas en las cuencas de los ríos Limay y Neuquén.
El propósito primordial de estas obras es optimizar el aprovechamiento de los ríos en procura de cumplir con objetivos de carácter nacional y regional tales como la generación de energía eléctrica, control de crecidas, regulación de caudales, riego, etc. Estos emprendimientos fueron proyectados, construidos y operados por Hidronor S.A. hasta principios de esta década, y en los últimos años se han concesionado a diferentes empresas privadas. Los concesionarios son responsables de la operación de cada complejo debiendo procurar formas racionales de operarlo, de modo tal que sean atendidas las necesidades de energía del mercado consumidor sin descuidar las normas impuestas por los organismos de fiscalización y, paralelamente, buscando obtener el máximo beneficio económico.
El planeamiento de la operación asume gran importancia y complejidad, la cual depende, entre otras cosas, del emplazamiento del emprendimiento, de las características propias del mismo y de las prioridades y restricciones de la operación.
El propósito de este trabajo es presentar un modelo matemático de operación de un embalse cuya solución permita tomar decisiones adecuadas para alcanzar el objetivo deseado.
En particular, se ha elegido para este trabajo el complejo Alicurá que se encuentra ubicado sobre el río Limay -límite entre las provincias de Neuquén y Río Negro- aproximadamente a 100 km al NE de la ciudad de San Carlos de Bariloche.

CARACTERISTICAS DEL EMPRENDIMIENTO ALICURA

Este complejo es el primero que se encuentra sobre el río Limay después de su nacimiento en el lago Nahuel Huapi. Está emplazado en una región cuyas características geográficas no favorecen el desarrollo de centros poblados ni de emprendimientos agrícolas que requieran riego. Además, la significativa distancia que lo separa de la próxima presa ubicada aguas abajo, hace que, prácticamente no interactúe con ella. Estas características simplifican su modelización y permiten que pueda ser considerado como un emprendimiento "aislado" sobre el río con un objetivo, prácticamente excluyente, de producción de energía eléctrica.

Datos técnicos más destacados

- Presa de materiales sueltos zonificada
    - Altura máxima — 130 m
    - Nivel de coronamiento sobre el nivel del mar — 710 m
    - Longitud de coronamiento — 850 m
    - Volumen de materiales — 13 hm^3
- Obras de alivio
    - Vertedero con capacidad máxima — 3.000 m^3/seg
- Embalse
    - Nivel máximo normal sobre el nivel del mar — 705 m
    - Nivel mínimo normal sobre el nivel del mar — 692 m
    - Superficie del embalse a cota 705 metros sobre el nivel el mar (msnm) — 65 km^2
    - Volumen del embalse a cota 705 msnm — 3.150 hm^3
- Central hidroeléctrica
    - Salto útil nominal — 116 m
    - Potencia instalada (4x250 MW) — 1.000 MW
    - Generación media anual — 2.360 GWh

FORMULACION DEL PROBLEMA

Dadas las características de los datos disponibles, se abordó el problema de planeamiento de la operación del embalse a mediano plazo con un horizonte de dos años. El objetivo es fundamentalmente económico y consiste en maximizar el beneficio que recibe el concesionario por la generación de energía hidroeléctrica.

El beneficio en cada período resulta del producto del precio unitario de la energía (P) por la cantidad de energía producida (E). El beneficio total (B) será entonces una suma de términos que corresponden a los ingresos obtenidos en cada uno de los períodos.

Teniendo en cuenta el horizonte elegido y que el precio de la energía es variable de acuerdo al momento de que se trate, resulta adecuado tomar un paso de discretización mensual. Por lo tanto

$$B = \sum_{I=1}^{24} P(I)\, E(I),$$

donde P(I) representa el precio correspondiente al mes I medido en \$/MWh y E(I) es la energía generada en el mes I y medida en MWh.

Variables del problema

Las variables del problema son:

- $V(I)$ volumen de agua almacenado en el embalse en el periodo I.
- $V_T(I)$ volumen de agua que pasa por las turbinas y se usa efectivamente para la generación de energía en el periodo I.
- $V_V(I)$ volumen de agua vertido en el periodo I.
- $H(I)$ cota del embalse correspondiente al período I, que depende del volumen embalsado.

Comentario

Como el agua vertida no produce energía eléctrica y por lo tanto beneficio económico, se debe evitar este hecho y verter sólo cuando el embalse esté lleno. La suma de los volúmenes turbinados y vertidos constituyen el volumen erogado.

Restricciones del problema

Las restricciones del problema dependen de las características propias del emprendimiento y de las normas de operación impuestas por el ente regulador de la cuenca.

Para cumplir los requerimientos del mismo se considera que el embalse opera dentro de la llamada **Franja de Operación Normal**. Esta franja corresponde a la operación por debajo del nivel máximo normal (705 msnm) y por encima del nivel mínimo normal (692 msnm).

Cuando el embalse se encuentra en la Franja de Operación Normal el caudal máximo de operación (caudal medio aguas abajo del embalse) es el caudal máximo turbinable y el caudal mínimo de operación (caudal mínimo aguas abajo que se debe erogar) es cero.

Este último requerimiento da lugar a una restricción que deben cumplir los volúmenes erogados en cada periodo I

$$0 \leq V_T(I) + V_V(I) \leq V_{TMAX},$$

donde V_{TMAX} es el volumen máximo que puede pasar por las turbinas del emprendimiento.

Además, se tienen restricciones propias de las características del emprendimiento. En primer lugar, el volumen de agua embalsado no puede superar la máxima capacidad del embalse (V_{MAX}) ni caer por debajo del límite en el cual las turbinas de la central hidroeléctrica no pueden funcionar (V_{MIN}). Es decir,

$$V_{MIN} \leq V(I) \leq V_{MAX}.$$

Por otra parte, las turbinas están obligadas a trabajar dentro de determinados límites de operación que dependen de las características técnicas del conjunto turbina-generador

$$0 \leq V_T(I) \leq V_{TMAX}.$$

El volumen vertido está limitado por la máxima capacidad del vertedero (V_{VMAX}); es decir,

$$0 \leq V_V(I) \leq V_{VMAX}.$$

Ecuación de continuidad

Los volúmenes erogados y almacenados están relacionados con el volumen aportado por el río en cada periodo ($V_A(I)$) mediante una ecuación de conservación de masa . Esta ecuación genera una restricción adicional para cada período:

$$V(I) - V(I-1) + V_T(I) + V_V(I) = V_A(I).$$

Función objetivo

Como ya fue mencionado, el problema consiste en maximizar la función objetivo B que representa el beneficio total de generación hidroeléctrica en un horizonte de dos años con discretización mensual.

La energía generada por la usina hidroeléctrica es función del volumen turbinado $V_T(I)$ y de la cota media $H_{MED}(I)$ desde la que se turbina, es decir

$$E(I) = k\, H_{MED}(I)\, V_T(I),$$

donde k es una constante que incluye factores de conversión y de eficiencia del aprovechamiento; $H_{MED}(I)$ es una función del volumen medio (V_{MED}), más precisamente,

$$H_{MED} = H(V_{MED}),$$

donde $V_{MED} = \dfrac{V(I-1) + V(I)}{2}$.

De aquí se tiene que

$$B = \sum_{I=1}^{24} k\, P(I)\, H_{MED}(I)\, V_T(I).$$

Modelo general de optimización

En base a las consideraciones efectuadas sobre el objetivo y las restricciones del problema, resulta el siguiente modelo general de optimización:

$$\text{Maximizar } B = \sum_{I=1}^{24} k\,P(I)\,H_{MED}(I)\,V_T(I) \tag{1}$$

Sujeto a

$$V(I) - V(I-1) + V_T(I) + V_v(I) = V_A(Y) \qquad I = 1,\ldots,24$$

$$0 \le V_T(I) + V_V(I) \le V_{TMAX} \qquad I = 1,\ldots,24$$

$$V_{MIN} \le V(I) \le V_{MAX} \qquad I = 1,\ldots,24$$

$$0 \le V_T(I) \le V_{T\,MAX} \qquad I = 1,\ldots,24$$

$$0 \le V_V(I) \le V_{V\,MAX}. \qquad I = 1,\ldots,24$$

Formulación como un problema de programación lineal

El problema **(1)** difiere de un problema canalizado de programación lineal apenas por la presencia de la función objetivo, en general, no lineal. Sin embargo, la experiencia muestra que una aproximación con buenos resultados es considerar

$$k\,H_{MED} = \eta = \text{constante},$$

con lo cual el problema **(1)** se transforma en el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar } B = \sum_{I=1}^{24} \eta\,P(I)\,V_T(I) \tag{2}$$

Sujeto a

$$V(I) - V(I-1) + V_T(I) + V_v(I) = V_A(I) \qquad I = 1,\ldots,24 \quad \textbf{(2.1)}$$

$$0 \le V_T(I) + V_V(I) \le V_{TMAX} \qquad I = 1,\ldots,24 \quad \textbf{(2.2)}$$

$$V_{MIN} \le V(I) \le V_{MAX} \qquad I = 1,\ldots,24 \quad \textbf{(2.3)}$$

$$0 \le V_T(I) \le V_{T\,MAX} \qquad I = 1,\ldots,24 \quad \textbf{(2.4)}$$

$$0 \le V_V(I) \le V_{V\,MAX} \qquad I = 1,\ldots,24 \quad \textbf{(2.5)}.$$

Si definimos un índice i con i = 1,2,...,72 que indica posición en un vector y si el índice j con j = 1,2,...,24 indica el mes en la discretización elegida, entonces; usando notación matricial, el problema anterior puede ser escrito como sigue:

$$\text{Maximizar } B = c^T x \tag{3}$$

Sujeto a

$$A_1 x = b_1$$
$$A_2 x \le b_2$$
$$l \le x \le u,$$

donde $x, c \in \mathbf{R}^{72}$ con

$$c_{ij} = \begin{cases} \eta\,P(j), & i = 25, 26, \ldots, 48 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, 24 \\ 0 \quad , & \text{Para todo otro valor de } i, \quad j = 1, 2, \ldots, 24 \end{cases} \quad ,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} V(j)\ , & i = 1, 2, \ldots, 24 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, 24 \\ V_T(j), & i = 25, 26, \ldots, 48 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, 24 \\ V_V(j), & i = 49, 50, \ldots, 72 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, 24. \end{cases}$$

Las matrices A_1 y A_2 son de orden 24×72 y corresponden a las restricciones **(2.1)** y **(2.2)**, respectivamente. $b_1, b_2 \in \mathbf{R}^{24}$ y corresponden al lado derecho de las restricciones **(2.1)** y **(2.2)**. $u, l \in \mathbf{R}^{72}$

son los vectores cuyas componentes son las cotas superiores e inferiores de las variables del problema y corresponden a las restricciones (2.3), (2.4), y (2.5).

RESOLUCION DEL PROBLEMA

La resolución del problema (1) se realizó en dos etapas:

I) Recolección y preparación de datos

II) Obtención de la solución

I) Una de las dificultades en la resolución de este problema fue la obtención de los datos y su posterior adecuación.

Los precios de la energía

Los precios por unidad de energía P(I) medidos en \$/KWh utilizados en la función objetivo, corresponden a los precios medios monómicos mensuales suministrados por la Compañía Administradora del Mercado Mayorista Eléctrico (CAMMESA). En la TABLA I se muestra su evolución entre enero de 1993 a octubre de 1996.

Los datos de la cuenca

La cuenca de los ríos de la región del Comahue está regulada por la Autoridad Interjurisdiccional de la Cuenca de los ríos Limay, Neuquén y Negro (AIC) y fue el organismo que suministró los caudales entrantes a la represa medidos en la estación de aforo correspondiente. Se tuvo así acceso a los valores de caudales medios mensuales de los últimos 55 años y además, los datos diarios de caudal entrante al embalse desde la puesta en marcha de la central. Teniendo en cuenta la discretización elegida y las características del río en el lugar, se adoptaron caudales medios constantes en cada mes.

En la TABLA II se muestran los caudales medios mensuales entrantes medidos en m^3/seg desde abril de 1985 hasta mayo de 1996. Por otra parte, como las variables del problema son volúmenes, las conversiones correspondientes se muestran en la TABLA III.

Volumen vertido máximo

Teniendo como dato el caudal máximo que se puede evacuar por el vertedero, el volumen vertido máximo resulta $V_{VMAX} = 7.776$ hm^3.

Volumen turbinado máximo y volumen embalsado inicial

La AIC también suministró en forma de tabla (TABLA IV), las relaciones entre cota de embalse, volumen embalsado, y constante de rendimiento η. Utilizando la relación fundamental de generación de potencia: $P = \frac{V_{TMAX} \ \eta}{\Delta T}$, y considerando un valor medio de $\eta = 281{,}61$ Mwh/ hm^3, resulta $V_{TMAX} = 2.556{,}73$ hm^3.

Al aplicar la ecuación de continuidad se requiere conocer el volumen inicial V(0). Para obtener este dato se realizó una interpolación *spline* usando el software MATLAB con los datos de la TABLA IV de donde se obtiene que V(0) = 2.824 hm^3. Los volúmenes embalsados máximo y mínimo se obtuvieron de la TABLA IV para las cotas máxima y mínima, respectivamente.

II) La versión lineal del problema fue resuelta usando el bien conocido Método Simplex. Para ello se usaron tres implementaciones distintas : la subrrutina PL del utilitario MATLAB 4.0 y el paquete HIPERLINDO (en lenguaje FORTRAN) y finalmente la versión 1.2 de CPLEX (lenguaje C) (1990). Los códigos se ejecutaron en una PC486. El análisis de sensibilidad y dualidad se realizó utilizando los dos últimos paquetes mencionados. Los resultados se muestran en la TABLA VI.

La solución del problema dual

Como es sabido la resolución del problema dual tiene una interpretación económica que resulta valiosa para el análisis e interpretación del problema original. Comencemos escribiendo el problema dual correspondiente a la formulación (3) del problema.

$$\text{Minimizar } Z = b_1^T w_1 + b_2^T w_2 + b_3^T w_3 + b_4^T w_4 \qquad (4)$$

Sujeto a

$$A_1^T w_1 + A_2^T w_2 + I w_3 + I w_4 \geq c \qquad (4.1)$$
$$I w_2 \geq 0 \qquad (4.2)$$
$$I w_3 \geq 0 \qquad (4.3)$$
$$-I w_4 \geq 0. \qquad (4.4)$$
$$w_1 \text{ irrestricta,} \qquad (4.5)$$

donde w_k con $k = 1, 2, 3, 4$ es el vector de variables duales o *precios sombra.* w_1 y $w_2 \in \mathbf{R}^{24}$; w_3 y $w_4 \in \mathbf{R}^{72}$. A los efectos de simplificar la notación, se tomó $b_3 = u$ y $b_4 = l$.
Dado que

$$Z = \sum_{i=1}^{24} b_{1i} w_{1i} + \sum_{i=1}^{24} b_{2i} w_{2i} + \sum_{i=1}^{72} b_{3i} w_{3i} + \sum_{i=1}^{72} b_{4i} w_{4i},$$

cada término de las dos primeras sumatorias puede ser interpretado como una contribución al beneficio por tener b_{ji} unidades disponibles del recurso j (volumen aportado, volumen turbinado) en el mes i para el problema primal. Una interpretación análoga puede hacerse con los otros términos de la sumatoria.
Por lo tanto, minimizar Z puede interpretado como un problema de minimización de los costos de los recursos usados para cada una de las actividades. Note que como c_j representa el beneficio unitario de la actividad j, entonces cada restricción de (4.1) significa que la contribución para el beneficio del conjunto de recursos tiene que ser por lo menos igual al beneficio unitario de la actividad j. Una interpretación similar puede hacerse para el conjunto de restricciones de no negatividad, (4.2) y (4.3). La solución del problema dual se muestra en la TABLA V.

Análisis de sensibilidad

En general, los datos de un problema pueden no conocerse con exactitud o estar sujetos a cambios o modificaciones. Por lo tanto es importante poder determinar la nueva solución óptima en estas situaciones sin tener que resolver nuevamente el problema.
En particular, nos interesa qué efectos producen sobre la solución los cambios en el vector de costos (c) y en el vector de disponibilidades (b). Los paquetes utilizados para la resolución del problema nos permiten obtener esta información; más precisamente, el rango de variación de c para el cual se mantiene la solución óptima del primal. Por otro lado, como b representa el vector de coeficientes en la función objetivo del problema dual, las perturbaciones del lado derecho del primal pueden considerarse como perturbaciones de la función objetivo del problema dual; consecuentemente, el análisis de sensibilidad para el vector b nos brinda el rango para el cual la solución óptima del dual no varía. El análisis de sensibilidad de c y b se muestran en las TABLAS VII y VIII, respectivamente.

FORMULACION COMO UN PROBLEMA NO LINEAL

A partir de la propuesta original para la función objetivo (1) y considerando $H_{MED} = H(V_{MED})$ con $V_{MED} = \frac{V(I-1)+V(I)}{2}$, se tiene una formulación no lineal del problema. A partir de los datos de la TABLA IV y realizando una interpolación polinómica, se puede obtener un modelo matemático de la relación entre altura y volumen. Para esta interpolación se usó la función *polyfit* en MATLAB. Esta función encuentra los coeficientes de un polinomio p(V) de grado n que ajusta los datos $p(V_i) / H_i$ en el sentido de los cuadrados mínimos. El resultado p es un vector fila de dimensión n + 1 que contiene los coeficientes del polinomio en potencias decrecientes.
El ajuste más adecuado resultó el de primer grado y la expresión que se obtuvo es $H_{MED} = a\, V_{MED} + b$, donde a = 0,0175230 y b = 649,93489.
Se consideró además, una constante de conversión k = 40,309189 Mwh / hm^4 con lo que la función objetivo resultante es

$$B = k \sum_{I=1}^{24} P(I)\left[a\frac{V(I-1)+V(I)}{2} + b\right]V_T(I)\ .$$

Por lo tanto, el modelo de optimización no lineal tiene la siguiente forma

$$\text{Maximizar}\quad B = k \sum_{I=1}^{24} P(I)\left[a\frac{V(I-1)+V(I)}{2} + b\right]V_T(I)$$

Sujeto a

$$V(I) - V(I-1) + V_T(I) + V_v(I) = V_A(I) \qquad I = 1,\ldots,24$$
$$V_{MIN} \le V(I) \le V_{MAX} \qquad I = 1,\ldots,24$$
$$0 \le V_T(I) \le V_{T\,MAX} \qquad I = 1,\ldots,24$$
$$0 \le V_V(I) \le V_{V\,MAX} \qquad I = 1,\ldots,24$$
$$0 \le V_T(I) + V_V(I) \le V_{TMAX} \qquad I = 1,\ldots,24$$

Este problema fue resuelto con el software MATLAB, usando en el Toolbox de Optimización la función *constr*. La rutina *constr* basada en el Método de Programación Secuencial Cuadrática que resuelve en cada iteración un subproblema de programación cuadrática. Utiliza estimaciones de la matriz Hessiana del Lagrangiano que son actualizadas con la conocida fórmula BFGS. Los resultados se muestran en la TABLA VI.

CONCLUSIONES

El presente trabajo permitió verificar mediante una prueba retrospectiva, cuan bueno es el modelo y la solución obtenida mediante técnicas de programación lineal y no lineal. Para ello, se usaron datos históricos que permitieron reconstruir el pasado y comparar el desempeño del modelo con la operación real del embalse. Se concluye que la formulación lineal es apropiada (más aún, si se tiene en cuenta el horizonte de planeamiento) pero la formulación no lineal es una mejor aproximación del problema. Sin embargo, las posibilidades que ofrece el Método Simplex de disponer tanto del análisis de sensibilidad como de la solución del problema dual, siguen haciendo de éste un método altamente eficiente y útil para la resolución del problema planteado. En este sentido, no se detectaron parámetros críticos que pudieran invalidar el modelo. Por otra parte, si bien la simulación es una técnica usual para el tratamiento de este problema, queda demostrado que la programación matemática es también otro recurso eficiente para la resolución del mismo.

REFERENCIAS

Bazaraa, M.-Jarvis, J., *Programación Lineal y Flujo en Redes,* Limusa, México, 1981.

Chavátal, V., *Linear Programming,* W.H. Freeman & Company New York, 1983.

Hadley, G., *Linear Programming,* Addison-Wesley , Massachusetts, 1965.

Luenberguer, D.,*Optimization by Vector Space,* J. Wiley, New York,1969.

Lyro Filho, C., *Contribuciçao ao planejamiento da produção de energia em sistemas de potencia,* Tese de Doctorado- UNICAMP 1984.

Majoi, D.- Leuton, R., *Applied water resource. Systems planif,* Prentice Hall, 1979

Sohares Filho, S., *Programação matemãtica de grande porte una aplicação ã sistemas hidrotérmicos de poténcia,* Tese de Doctorado UNICAMP-1978.

TABLA I PRECIOS MEDIOS MONOMICOS MENSUALES ($/Mwh)

	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO	AGOSTO	SETIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE	ENERO	FEBRERO	MARZO
1992/93										42,13	42,26	42,27
1993/94	44,22	38,91	36,23	35,22	35,56	31,74	25,95	26,55	27,78	30,65	29,79	30,18
1994/95	33,55	38,5	31,39	38,66	33,05	31,01	28,06	28,74	31,83	31,60	37,04	31,09
1995/96	29,41	27,8	29,89	28,43	29,61	27,04	29,63	25,73	29,45	26,85	25,9	29,06
1996/97	25,72	28,28	38,74	41,69	27,36	25,77	25,88					

TABLA II CAUDALES MEDIOS ENTRANTES A ALICURA (m^3/seg)

	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO	AGOSTO	SETIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE	ENERO	FEBRERO	MARZO
1985/86	212,90	293,30	516,40	517,80	362,80	292,00	258,80	263,00	213,20	131,80	234,66	95,80
1986/87	126,60	208,30	338,60	394,20	380,30	349,80	350,30	300,40	300,20	187,10	276,76	84,20
1987/88	90,80	114,30	225,40	377,20	378,20	338,40	343,80	340,50	249,20	174,90	305,93	84,40
1988/89	72,10	82,40	116,40	165,10	160,30	179,80	198,60	290,80	286,20	207,90	308,93	88,10
1989/90	84,20	74,70	130,40	186,50	276,00	278,00	259,40	242,70	258,50	206,10	322,96	94,30
1990/91	197,20	244,00	333,80	337,30	337,00	352,70	335,30	262,60	206,90	139,70	203,45	75,60
1991/92	68,40	117,90	234,90	239,20	234,50	307,10	314,40	347,50	372,10	367,70	537,95	144,80
1992/93	120,30	182,70	270,50	251,00	167,90	216,80	315,60	427,90	375,70	267,90	399,89	139,60
1993/94	193,10	286,10	400,40	635,50	477,50	379,30	320,30	327,00	369,40	246,20	362,40	92,10
1994/95	79,80	174,80	359,40	399,20	372,40	346,10	419,10	417,50	390,90	282,80	436,42	107,60
1995/96	120,00	170,00	260,00	380,00	320,00	390,00	352,00	395,00	306,00	194,00	320,72	97,00

TABLA III VOLUMENES MEDIOS ENTRANTES A ALICURA (hm^3)

	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO	AGOSTO	SETIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE	ENERO	FEBRERO	MARZO
1985/86	551,84	785,57	1338,51	1386,88	971,72	756,86	693,17	681,70	571,03	353,01	234,66	256,59
1986/87	328,15	557,91	877,65	1055,83	1018,60	906,68	938,24	778,64	804,06	501,13	276,76	225,52
1987/88	235,35	306,14	584,24	1010,29	1012,97	877,13	920,83	882,58	667,46	468,45	305,93	226,06
1988/89	9127,86	220,70	301,71	442,20	429,35	466,04	531,93	753,75	766,56	556,84	308,93	235,97
1989/90	218,25	200,08	338,00	499,52	739,24	720,58	694,78	629,08	692,37	552,02	322,96	252,57
1990/91	511,14	653,53	865,21	903,42	902,62	914,20	898,07	680,66	554,16	374,17	203,45	202,49
1991/92	177,29	315,78	608,86	640,67	628,08	796,00	842,09	900,72	996,63	984,85	537,95	387,83
1992/93	311,82	489,34	701,14	672,28	449,70	561,95	845,30	1109,12	1006,27	717,54	399,89	373,90
1993/94	500,52	767,90	1037,84	1702,12	1278,94	983,15	857,89	847,58	989,40	659,42	362,40	246,68
1994/95	206,84	468,18	931,56	1069,22	997,44	897,09	1122,52	1082,16	1046,99	757,45	436,42	288,20
1995/96	311,04	455,33	673,92	1017,79	857,09	1010,88	942,80	1023,84	819,59	519,61	320,72	259,80

TABLA IV : COTA DE EMBALSE / VOLUMEN DE EMBALSE / RENDIMIENTO

COTA (msnm)	VOLUMEN EMBALSADO (hm^3)	CTANTE. DE RENDIMIENTO (MWh/hm^3)
705	3150,0	296,58
704	3089,0	294,73
703	3030,0	292,77
702	2970,0	290,69
701	2911,0	288,50
700	2853,0	286,20
699	2795,0	283,78
698	2738,0	281,25
697	2682,0	278,61
696	2626,0	275,85
695	2571,0	272,98
694	2516,0	270,00
693	2462,0	266,90
692	2408,0	263,68

TABLA V .SOLUCION DEL PROBLEMA DUAL

PREC. SOMBRA VOL. APORTADOS w_{1i} con $i = 1, 2, \ldots, 24$	PRECIOS SOMBRA VOL. TURBINADOS w_{2i} con $i = 1, 2, \ldots, 24$
10841,98	0,00
10841,98	0,00
8839,74	0,00
10887,04	0,00
9307,21	0,00
8732,73	0,00
7901,97	0,00
8093,47	0,00
8963,65	0,00
8898,87	0,00
10430,83	0,00
8755,25	0,00
8282,15	0,00
8282,15	0,00
8417,32	0,00
8006,17	0,00
8056,85	0,00
7614,73	0,00
8344,10	0,00
7345,82	0,00
8293,41	0,00
7564,04	0,00
7564,04	0,00
8183,60	0,00

TABLA VI : SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL Y NO LINEAL.

	VOLUMENES EMBALSADOS x_{ij} con $i: 1, 2, \ldots, 24$; $j: 1, 2, \ldots, 24$		VOLUMENES TURBINADOS x_{ij} con $i: 25, 26, \ldots, 49$; $j: 1, 2, \ldots, 24$		VOLUMENES VERTIDOS x_{ij} con $i: 50, 51, \ldots, 72$; $j: 1, 2, \ldots, 24$	
	PROB. LINEAL	PROB. NO LINEAL	PROB. LINEAL	PROB. NO LINEAL	PROB. LINEAL	PROB. NO LINEAL
Abril 94	3030,84	3030,84	0,00	0,00	0,00	0,00
Mayo 94	2408,00	3150,00	1091,02	349,02	0,00	0,00
Junio 94	3150,00	3150,00	189,56	931,56	0,00	0,00
Julio 94	2408,00	3150,00	1811,22	1069,22	0,00	0,00
Agosto 94	2408,00	3150,00	997,44	997,44	0,00	0,00
Setiembre 94	2408,00	3150,00	897,09	897,09	0,00	0,00
Octubre 94	3150,00	3150,00	380,52	1122,52	0,00	0,00
Noviembre 94	3150,00	3150,00	1082,16	1082,16	0,00	0,00
Diciembre 94	2408,00	3150,00	1788,99	1046,99	0,00	0,00
Enero 95	3150,00	3150,00	15,45	757,45	0,00	0,00
Febrero 95	2408,00	3150,00	1178,42	436,42	0,00	0,00
Marzo 95	2408,00	2791,30	288,19	646,88	0,00	0,00
Abril 95	2694,67	3102,34	24,37	0,00	0,00	0,00
Mayo 95	3150,00	3150,00	0,00	407,67	0,00	0,00
Junio 95	2408,00	3150,00	1415,92	673,92	0,00	0,00
Julio 95	3150,00	3150,00	275,79	1017,79	0,00	0,00
Agosto 95	2408,00	3150,00	1599,09	857,09	0,00	0,00
Setiembre 95	3150,00	3150,00	268,88	1010,88	0,00	0,00
Octubre 95	2408,00	3150,00	1684,79	942,79	0,00	0,00
Noviembre 95	3150,00	3150,00	281,84	1023,84	0,00	0,00
Diciembre 95	2408,00	3150,00	1561,59	819,59	0,00	0,00
Enero 96	2829,28	3150,00	98,33	519,61	0,00	0,00
Febrero 96	3150,00	3150,00	0,00	320,72	0,00	0,00
Marzo 96	2408,00	2408,00	1001,80	1001,80	0,00	0,00
VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO LINEAL				$1.603469120396 \times 10^8$		
VALOR DE LA FUNCION OBJETIVONO LINEAL				1.35013×10^9		

TABLA VII : RANGO DE SENSIBILIDAD DE C

COTA INFERIOR	VALOR ACTUAL C	COTA SUPERIOR
-1393,97	0,00	+ ∞
- ∞	0,00	2002,24
-2047,30	0,00	+ ∞
- ∞	0,00	1579,83
- ∞	0,00	574,48
- ∞	0,00	830,75
-191,49	0,00	+ ∞
-870,18	0,00	+ ∞
- ∞	0,00	64,77
-1531,95	0,00	+ ∞
- ∞	0,00	1675,58
- ∞	0,00	473,10
-135,17	0,00	453,39
-134,17	0,00	+ ∞
- ∞	0,00	411,15
-50,69	0,00	+ ∞
- ∞	0,00	442,13
-729,37	0,00	+ ∞
- ∞	0,00	1098,28
-1047,59	0,00	+ ∞
- ∞	0,00	729,37
-619,55	0,00	270,34
-619,55	0,00	+ ∞
- ∞	0,00	8183,59
- ∞	9448,01	10841,98
9448,01	10841	+ ∞
0,00	8839,74	10841,98
9307,21	10887,04	+ ∞
8732,73	9307,21	10887,04
7901,98	8732,73	9307,21
0,00	7901,98	8093,47
7908,98	8093,47	8963,65
8898,88	8963,65	+ ∞
0,00	8898,88	8963,65
8898,88	10430,83	+ ∞
8282,13	8755,25	10430,83
7828,76	8282,15	8417,32
- ∞	7828,76	8282,15
8282,15	8417,32	+ ∞
0,00	8006,17	8056,86
8006,17	8056,86	+ ∞
0,00	7614,73	8056,86
7614,73	8344,10	+ ∞
0,00	7245,82	8293,41
7564,04	8293,41	+ ∞
7293,70	7564,04	8183,59
- ∞	7293,70	7564,04
7564,04	8183,59	+ ∞
- ∞	0,00	10841
- ∞	0,00	10841
- ∞	0,00	8839,74
- ∞	0,00	10887,04
- ∞	0,00	9307,21
- ∞	0,00	8732,73
- ∞	0,00	7901,98
- ∞	0,00	8093,47
- ∞	0,00	8963,65
- ∞	0,00	8898,88
- ∞	0,00	10430,83
- ∞	0,00	8755,25
- ∞	0,00	8282,15
- ∞	0,00	8282,15
- ∞	0,00	8417,32
- ∞	0,00	8006,17
- ∞	0,00	8056,86
- ∞	0,00	7614,73
- ∞	0,00	8344,10
- ∞	0,00	7245,82
- ∞	0,00	8293,41
- ∞	0,00	7564,04
- ∞	0,00	7564,04
- ∞	0,00	8183,59

TABLA VIII : RANGO DE SENSIBILIDAD DE b

COTA INFERIOR	VALOR ACTUAL B	COTA SUPERIOR
622,84	0,00	119,15
1091,02	468.17	1465,70
189,56	931,56	2367,16
1811,22	1069,22	745,51
997,44	997,44	1559,29
897,09	897,09	1659,63
380,52	1122,52	2176,20
1082,16	1082,16	1474,56
1788,98	1046,99	767,73
15,45	757,45	2541,28
1178,42	436,42	1378,30
288,19	646,88	2268,54
24,369	0,00	2532,35
24,369	407,67	286,67
1415,91	673,92	1140,81
275,78	1017,79	2280,93
1599,09	857,09	957,63
268,88	1010,88	2287,85
1684,79	942,79	871,94
281,84	1023,84	2274,88
1561,59	819,59	995,13
98,329	519,61	2458,39
98,329	320,72	421,27
1001,79	259,80	1554,92
2556,72	2556,72	∞
1465,70	2556,72	∞
2367,16	2556,72	∞
745,51	2556,72	∞
1559,29	2556,72	∞
1659,63	2556,72	∞
2176,20	2556,72	∞
1474,56	2556,72	∞
767,73	2556,72	∞
2541,28	2556,72	∞
1378,30	2556,72	∞
2268,54	2556,72	∞
2532,35	2556,72	∞
2556,72	2556,72	∞
1140,81	2556,72	∞
2280,93	2556,72	∞
957,63	2556,72	∞
2287,85	2556,72	∞
871,94	2556,72	∞
2274,88	2556,72	∞
995,13	2556,72	∞
2458,39	2556,72	∞
2556,72	2556,72	∞
1554,92	2556,72	∞