

UNA FORMULACIÓN GENERAL DE ELEMENTOS FINITOS POR SUBDOMINIOS

Victorio E. Sonzogni

Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC
Universidad Nacional del Litoral y CONICET
Güemes 3450, 3000, Santa Fe, Argentina
e-mail: sonzogni@intec.unl.edu.ar, Tel: 54-42-559175

RESUMEN

Se presenta una formulación general de elementos finitos para procesamiento distribuido.

Hay varias motivaciones para este trabajo, entre ellas: procesamiento en paralelo en arquitecturas MIMD; resolución de grandes problemas de elementos finitos en una red de computadoras con capacidad de almacenamiento limitada; un marco general para tratamiento de algunos problemas con condiciones de borde especiales, tales como la conexión de mallas de elementos finitos heterogéneas, problemas de contacto, etc. Se escribe el problema de valores de contorno para un subdominio, que posee tres clases de contornos: aquellos con condiciones de tipo Dirichlet; aquellos con condiciones de tipo Neumann y aquellos de conexión con otros subdominios u otras restricciones. El presente desarrollo está orientado al procesamiento en redes de computadoras utilizando herramientas que permitan el intercambio de mensajes, tales como PVM (Parallel Virtual Machine), u otros sistemas similares.

ABSTRACT

A general formulation for finite element analysis in a distributed computing environment is presented.

Motivations for this work include: parallel computing on MIMD architectures; use of a network of limited storage computers to solve large finite element problems; a general framework to treat some special boundary problems like connection of heterogeneous finite element meshes, contact problems, etc. Boundary value problems are written for one subdomain, where three types of boundaries (instead of two) are now possible: those with Dirichlet conditions, those with Neumann conditions and those frontiers with other subdomains. The target architecture for this development is a local area network of small computers. Communication being handled by PVM (Parallel Virtual Machine) or similar software tools.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una formulación, por subdominios, del método de elementos finitos. Al trabajar en un subdominio aparecen tres clases de contorno. Una clase corresponde a bordes con condiciones de tipo Dirichlet, otra a condiciones de tipo Neumann y la tercera corresponde a una frontera que conecta este subdominio con otros.

Las motivaciones para este tratamiento incluyen:

- Procesamiento distribuido en un ambiente MIMD
 Cuando se efectúa procesamiento paralelo sobre un soporte de memoria distribuida (ya sea computadoras de memoria local, como las "hipercubos", o bien una red de microprocesadoras, o de estaciones de trabajo) los métodos de descomposición de dominio resultan apropiados y en ese caso el programa de elementos finitos que corre en cada procesador, está formulado para un subdominio.
- Uso de computadoras con capacidad limitada de almacenamiento de datos para resolver grandes problemas de elementos finitos.
 En este caso la motivación, en vez de ser la de reducir el tiempo de procesamiento para un problema dado, puede ser la de poder resolverlo con una red de pequeños procesadores distribuyendo entre ellos los cálculos.
- Acelerar la solución, aún en el caso de computadoras secuenciales.
 Los métodos de descomposición de dominio han demostrado ser eficientes preconditionadores para la solución iterativa del sistema de ecuaciones.
- Un marco general para tratar varios problemas con condiciones de borde especiales:
 - I Frontera entre grupos de datos:
 Este tipo de frontera es la que se tiene en métodos de descomposición de dominio donde el dominio global se divide arbitrariamente, basado en criterios de optimización de la carga entre los procesadores, del ancho de banda del problema de interface, etc. [1,2,3,4]
 - II Frontera entre mallas heterogéneas de elementos finitos:
 En este caso la frontera separa diferentes mallas de elementos finitos. Es el problema de "pegado" de mallas, que permita conectar mallas con elementos de distinto tamaño, grado, etc.
 - III Frontera física:
 Bordes que separan cuerpos, como en el caso de problemas de contacto unilateral.
 - IV Fronteras de entrada/salida:
 Este caso representa regiones donde la carga depende de las deformaciones (fuerzas seguidoras), o donde las condiciones de entrada dependen de la solución actual (integración entre resultados analíticos y experimentales).

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO EN UN DOMINIO PARCIAL

Considérese un problema de respuesta mecánica elástica lineal planteado sobre un subdominio (Figura 1). Se designa con Ω^s al subdominio s y

$$\Gamma^s = \Gamma_1^s \cup \Gamma_2^s \cup \Gamma_3^s \quad (1)$$

es la frontera de ese subdominio.

El problema será resuelto por el método de elementos finitos en desplazamientos, por lo que las variables primales son las componentes del vector desplazamiento u_i y las variables duales son las componentes del tensor de tensiones σ_{ij} . Las tensiones superficiales

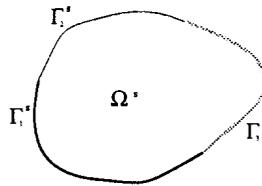


Figura 1: Un subdominio

están dadas por la fórmula de Cauchy $t_i = \sigma_{ij}\nu_j$, siendo ν_j el versor normal externo a la superficie.

El conjunto de ecuaciones de campo en el subdominio Ω^* , para pequeños desplazamientos, es:

Ecuaciones de "equilibrio":

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2)$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\sigma_{ij} = H_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3)$$

Relaciones deformación-desplazamiento:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

En estas expresiones b_i son las componentes de las fuerzas volumétricas; ρ es la densidad; H_{ijkl} un tensor de constantes elásticas y ϵ_{ij} las componentes del tensor de deformaciones. Las condiciones de borde son:

$$\text{en } \Gamma_1 : \quad u_i|_{\Gamma_1} = \bar{u}_i \quad (4)$$

$$\text{en } \Gamma_2 : \quad \sigma_{ij}\nu_j|_{\Gamma_2} = \bar{t}_i \quad (5)$$

$$\text{en } \Gamma_3 : \quad B_i(u_j)|_{\Gamma_3} = c_i \quad (6-a)$$

$$\text{o bien } \quad B_i(u_j)|_{\Gamma_3} \leq c_i \quad (6-b)$$

En la parte del contorno Γ_1 hay desplazamientos impuestos (\bar{u}_i); en Γ_2 hay tensiones impuestas (\bar{t}_i) y Γ_3 es un borde de *conexión*, donde las ecuaciones (6-a) se verifican para bordes "pegados", mientras que condiciones del tipo (6-b) se dan para situaciones de contacto unilateral.

El problema así planteado es equivalente a minimizar un funcional potencial Π

$$\min \Pi(u_i) \quad \forall u_i \in K \quad (7)$$

siendo

$$K = \{v_i, v_i \text{ suficientemente regular en } \Omega^*, v_i = \bar{u}_i \text{ on } \Gamma_1 \\ \text{y } B_i(v_j) = c_i \text{ (o bien } B_i(v_j) \leq c_i \text{) en } \Gamma_3\}$$

Para un problema elástico el potencial es:

$$\Pi^*(u_i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^*} \epsilon_{ij} H_{ijkl} \epsilon_{kl} d\Omega - \int_{\Omega^*} b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_2^*} t_i u_i d\Gamma - \Gamma_3^*(u_i) \quad (8)$$

Siendo $\Gamma_3^*(u_i)$ el término de potencial debido a las condiciones de contorno en Γ_3 .

DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Aplicando el método de los elementos finitos el vector de desplazamientos u_i se aproxima en la forma

$$\tilde{u}_i = \mathbf{N}_i \mathbf{q} \quad (9)$$

Introduciendo (9) en (8) se obtiene una aproximación de la energía potencial total

$$\tilde{\Pi}^s(u_i) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f} - \tilde{\Pi}_3^s \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^s} \mathbf{B}_\epsilon^T \mathbf{H} \mathbf{B}_\epsilon d\Omega \quad (11)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega^s} \mathbf{N}_i^T b_i d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}_i^T t_i d\Gamma \quad (12)$$

$$\epsilon = \mathbf{B}_\epsilon \mathbf{q} \quad (13)$$

ϵ es un vector con componentes de ϵ_{ij} . Hay varias maneras de construir la contribución de las condiciones de borde en Γ_3 al término $\tilde{\Pi}_3^s$ del potencial en (10). Se discuten en las secciones siguientes.

CONDICIONES DE BORDE EN LA FRONTERA DE CONEXIÓN

Las condiciones de contorno sobre la frontera Γ_3 depende del tipo de situación de que se trate y para cada uno de los problemas descriptos arriba toman las formas siguientes.

I. *Métodos de decomposición de dominio para la solución del problema global*

Cuando se realiza una decomposición de dominio en el problema global (figura 2) se tiene una correspondencia nodo a nodo entre los subdominios vecinos. Se imponen condiciones de igualdad de desplazamientos:

$$\text{en } \Gamma_3^s \cap \Gamma_3^r : \quad \mathbf{B}_k^s \mathbf{q}^s = \mathbf{B}_k^r \mathbf{q}^r \quad (14)$$

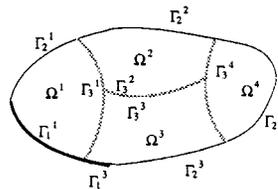


Figura 2. Frontera entre subdominios

\mathbf{q}^s es el vector de desplazamientos nodales del subdominio s , cuya dimensión es n_s . Análogamente \mathbf{q}^r es el vector de desplazamientos nodales del subdominio r , de dimensión n_r . \mathbf{B}_k^s es una matriz de dimensión $n_k \times n_s$ que restringe los desplazamientos \mathbf{q}^s a aquellos nodos ubicados sobre la frontera k de Ω^s con Ω^r . Análoga definición para la matriz \mathbf{B}_k^r . Normalmente las matrices \mathbf{B}_k^s , etc., están pobladas de ceros, excepto en correspondencia con los grados de libertad en la frontera, donde tienen valores 1 o -1.

II. "Pegado" de mallas heterogéneas de elementos finitos

Al conectar mallas heterogéneas de elementos finitos no hay una correspondencia entre los nodos de subdominios vecinos. Se imponen restricciones de igualdad

$$\text{en } \Gamma_3^s \cap \Gamma_3^r : \quad \mathbf{B}_k^s \mathbf{q}^s = \mathbf{B}_k^r \mathbf{q}^r = \mathbf{c}_k \quad (15)$$

Los dominios r y s son las mallas que se conectan. \mathbf{q}^s and \mathbf{q}^r son vectores desplazamiento en ambos subdominios, de tamaños n_s y n_r , respectivamente. \mathbf{B}_k^s y \mathbf{B}_k^r son matrices de $n \times n_s$ y $n \times n_r$, respectivamente, que restringen los desplazamientos en los subdominios a aquellos sobre la k -ésima frontera. \mathbf{c}^k es un vector, de dimensión n_k , con variables de referencia en la frontera k .

III. Contacto unilateral

Cuando dos cuerpos están en contacto, es decir no pueden penetrarse entre sí, pero pueden separarse, se especifican restricciones de desigualdad sobre la frontera:

$$\text{en } \Gamma_3^s \cap \Gamma_3^r : \quad \mathbf{B}^s \mathbf{q}^s \geq \mathbf{c}^k \geq \mathbf{B}^r \mathbf{q}^r \quad (16)$$

Nuevamente aquí r y s son los subdominios en contacto (figura 3) y \mathbf{c}^k un vector de variables de referencia, de tamaño n_k , sobre la frontera Γ_3 .

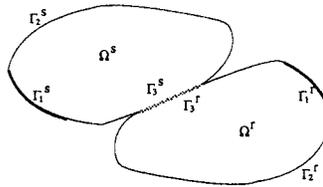


Figura 3. Contacto unilateral

IV. Fuerzas superficiales dependientes de la deformación

En este caso el borde Γ_3 es una parte del borde donde hay fuerzas superficiales que dependen de la deformación del cuerpo. Este es el caso de "fuerzas seguidoras". Un conjunto de tensiones \mathbf{t} dependen de los desplazamientos en ese borde:

$$\text{en } \Gamma_3 : \quad \mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{t}(\mathbf{d}) \quad (17)$$

APROXIMACIÓN DEL POTENCIAL EN LA FRONTERA ENTRE SUBDOMINIOS

El término de potencial sobre la frontera entre subdominios $\tilde{\Pi}_3^s$, en la expresión (10), puede construirse de diferentes formas:

1) Identificación directa de los desplazamientos del borde:

Las condiciones cinemáticas de contorno $\mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{c}$ se imponen exactamente. En este caso no hay contribución de Γ_3 al potencial $\tilde{\Pi}^s$.

2) *Multiplicadores de Lagrange:*

En este caso la aproximación del término de potencial es

$$\tilde{\Pi}_3^s = \lambda^T (\mathbf{B}\mathbf{q} - \mathbf{c}) \quad (18)$$

Si \mathbf{B} es una matriz topológica, λ representa un vector de fuerzas nodales que "atan" los bordes Γ_3 [3,5,6].

3) *Métodos de penalización:*

La contribución al potencial sobre la frontera se toma aquí como una forma cuadrática:

$$\tilde{\Pi}_3^s = \frac{1}{2} (\mathbf{B}\mathbf{q} - \mathbf{c})^T \kappa (\mathbf{B}\mathbf{q} - \mathbf{c}) \quad (19)$$

κ es una matriz de coeficientes "grandes". Representa una suerte de constantes de resorte que estan uniendo los bordes. Cuanto mayor sean esos coeficientes tanto mejor se verificarán las restricciones de desplazamiento, pero en ese caso pueden presentarse problemas numéricos para la resolución. Es habitual considerar una matriz de la forma: $\kappa = \epsilon \mathbf{I}$, vale decir que hay una sola constante ϵ (grande) que conecta dos grados de libertad enfrentados [5,6,7].

4) *Lagrangiano aumentado*[8,9]:

$$\tilde{\Pi}_3^s = \lambda^T (\mathbf{B}\mathbf{q} - \mathbf{c}) + \frac{1}{2} (\mathbf{B}\mathbf{q} - \mathbf{c})^T \kappa (\mathbf{B}\mathbf{q} - \mathbf{c}) \quad (20)$$

5) *Lagrangiano perturbado:*

$$\tilde{\Pi}_3^s = \lambda^T (\mathbf{B}\mathbf{q} - \mathbf{c}) + \frac{1}{2} \lambda^T \iota \lambda \quad (21)$$

La matriz ι contiene coeficientes "pequeños". Una comparación con (19) permite ver que el concepto físico de estos coeficientes es el "flexibilidad", opuestos al de la matriz κ [7,10].

PROCEDIMIENTOS DE SOLUCIÓN

La solución del problema global puede ser visto como realizada en dos etapas:

1. *Local:*

Los grados de libertad internos de cada subdominio Ω^s y aquellos sobre el borde Γ_2^s pueden ser calculados resolviendo problemas locales en cada subdominio, en función de los grados de libertad sobre la frontera Γ_3 . Estos cálculos locales pueden ser efectuados separadamente para cada subdominio y, por tanto, son perfectamente paralelizables.

2. *Fronteras de conexión:*

Los grados de libertad sobre las fronteras de conexión se obtienen resolviendo un problema global sobre estas incógnitas. Este problema es acoplado y no resulta directamente paralelizable.

A continuación se analiza la solución para cada uno de los casos de construcción del potencial $\tilde{\Pi}_3^s$, y para cada clase de problema según las condiciones sobre la frontera, dados en las secciones precedentes. Por razones de compacidad se tratarán problemas de tipo I (Descomposición de dominio), II (Pegado de mallas de elementos finitos) y III (Contacto unilateral). No se tratarán problemas de tipo IV (Fuerzas seguidoras).

1. Identificación directa de los desplazamientos del borde

Cuando las condiciones sobre la frontera involucran más de un subdominio el problema global es acoplado, cosa que se da en los casos que se discuten a continuación.

Problemas con condiciones de igualdad

Para los problemas de clase I (descomposición de dominio) y de clase II (pegado de mallas) la minimización del potencial global

$$\delta \bar{\Pi} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (22)$$

conduce al sistema de ecuaciones

$$\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (23)$$

con $\bar{\Pi} = \sum \Pi^s$. Si se particionan las matrices en la forma

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{K}} \\ \bar{\mathbf{K}}^T & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

donde el símbolo $\hat{\mathbf{q}}$ representa grados de libertad internos de cada subdominio, $\bar{\mathbf{q}}$ grados de libertad de frontera y $\bar{\mathbf{q}}$ términos de acople entre ambos, el sistema de ecuaciones (23) resulta

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{K}}^s \hat{\mathbf{q}}^s = \hat{\mathbf{f}}^s - \bar{\mathbf{K}}_I^s \bar{\mathbf{q}} & , s = 1, 2, \dots \\ \mathbf{S} \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{G} \end{cases} \quad (25)$$

siendo

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{K}} - \sum_s \bar{\mathbf{K}}^{s,T} (\hat{\mathbf{K}}^s)^{-1} \bar{\mathbf{K}}^s \quad (26)$$

la matriz del complemento de Schur y

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{f}} - \sum_s \bar{\mathbf{K}}^{s,T} (\hat{\mathbf{K}}^s)^{-1} \hat{\mathbf{f}}^s \quad (27)$$

En la etapa de local se resuelve, para cada uno de los subdominios, la primera de las ecuaciones (25) en forma separada. Se precisa apenas efectuar la factorización de las matrices.

En la segunda etapa se resuelve el problema global de fronteras (segunda ecuación de (25)) y con esta solución se vuelve a los problemas local pudiendo entonces realizar las sustituciones que completan aquella solución.

Problemas con condiciones de desigualdad

En problemas de contacto unilateral (Clase III) la primera etapa corresponde, igual que en el caso anterior, a la solución del problema (25-a) en cada subdominio.

En la segunda etapa el problema global, sobre la frontera, puede ser escrito:

$$\underset{\bar{\mathbf{q}}}{\text{minimizar}} \quad \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{G} \right) \quad (27)$$

$$\text{sujeto a} \quad (\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{C}) \leq \mathbf{0}$$

donde $\bar{\mathbf{B}}$ corresponde a un ensamble global de las matrices \mathbf{B} .

2. Multiplicadores de Lagrange

El problema

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{q}}{\text{minimizar}} && \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f} \right) \\ & \text{sujeto a} && (\mathbf{B} \mathbf{q} - \mathbf{C}) \leq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

es equivalente a un problema de tipo de montura:

$$\min_{\mathbf{q}} \max_{\lambda} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f} - \lambda^T (\mathbf{B} \mathbf{q} - \mathbf{C}) \right\} \quad (29)$$

que conduce a:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{f} - \mathbf{B}^T \lambda = 0 \\ \mathbf{B} \mathbf{q} - \mathbf{C} \leq 0 \end{cases} \quad (30)$$

Problemas con condiciones de igualdad

Para los problemas de clase I (descomposición de dominio) y de clase II (pegado de mallas) el sistema anterior queda:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{f} - \mathbf{B}^T \lambda = 0 \\ \mathbf{B} \mathbf{q} - \mathbf{C} = 0 \end{cases} \quad (31)$$

En la primera etapa de solución se pueden expresar los desplazamientos en cada subdominio en función de las fuerzas de "atado" sobre la frontera λ :

$$\mathbf{q}^s = \mathbf{K}^{s-1} (\mathbf{f}^s + \mathbf{B}^{sT} \lambda) \quad s = 1, 2, \dots \quad (32)$$

En la segunda etapa, reemplazando \mathbf{q} (32) en la segunda ecuación (31) se obtiene:

$$\mathbf{F} \lambda = \mathbf{f}_\lambda \quad (33)$$

con

$$\mathbf{F} = \sum_s \mathbf{B}^s (\mathbf{K}^s)^{-1} \mathbf{B}^{sT} \quad (34)$$

y

$$\mathbf{f}_\lambda = \sum_s \mathbf{B}^s (\mathbf{K}^s)^{-1} \mathbf{f}^s \quad (35)$$

Est último problema, planteado globalmente sobre las fronteras. Calculado de aquí λ se vuelve a la ecuación (32) para obtener los desplazamientos.

Problemas con condiciones de desigualdad

En problemas de contacto unilateral (Clase III) se tienen las ecuaciones (30) con restricciones de desigualdad. La primera etapa de resolución es como en el caso anterior (ecuación 32), para cada subdominio.

En la segunda etapa, si se sustituye \mathbf{q} en el problema (29) se tiene el problema dual:

$$\min_{\lambda \geq 0} \left(\frac{1}{2} \lambda^T \mathbf{F} \lambda - \lambda^T \mathbf{f}_\lambda \right) \quad (36)$$

Este último problema puede abordarse por técnicas de minimización tales como método de Gauss-Seidel con relajación y proyección, o el algoritmo de Lemke [11,13].

Una vez resuelto el problema (36) sobre la frontera volviendo a la primera etapa se calculan los desplazamientos.

Otra forma de solución es abordar directamente el problema en punto de montura (29), donde se calculan simultáneamente λ y q . Un ejemplo de esto es el algoritmo de Uszawa [9,12,13].

3. Método de penalización

El problema se expresa:

$$\min_q \left\{ \frac{1}{2} q^T K q - q^T f - \frac{1}{2} (Bq - C)^T \kappa (Bq - C) \right\} \quad (37)$$

que es equivalente a:

$$Kq - f - B^T \kappa (Bq - C) = 0 \quad (38)$$

Efectuando un particionamiento como en (24) se llega nuevamente a un primer conjunto de ecuaciones donde se calculan los desplazamientos internos \hat{q} :

$$\hat{q} = \hat{K}^{-1}(\hat{f} - \bar{K}\bar{q}) \quad (39)$$

y otra ecuación:

$$\bar{K}^* \bar{q} = \bar{f}^* - B_c^T \kappa C \quad (40)$$

con

$$\bar{K}^* = \bar{K} - B_c^T \kappa B_c - \bar{K}^T \hat{K}^{-1} \bar{K} \quad (41)$$

y

$$\bar{f}^* = \bar{f} - \bar{K}^T \hat{K}^{-1} \hat{f} \quad (42)$$

Problemas con condiciones de igualdad

Para los problemas de clase I (descomposición de dominio) y de clase II (pegado de mallas) en la primera etapa se resuelve la ecuación (39) para los desplazamientos internos. En la segunda etapa se calculan los grados de libertad sobre la frontera con la ecuación (40).

Problemas con condiciones de desigualdad

El método de penalización ha sido muy utilizado en problemas de contacto unilateral (Clase III), debido a la facilidad de su implementación. Generalmente se sigue una estrategia de seguimiento de las restricciones y se activan o desactivan según la posición relativa de las superficies en contacto. Se realiza una solución de tipo incremental y si las restricciones están activas se agrega su contribución a la matriz global (segundo término de la ecuación (41)). De lo contrario se ignora ese término. Una vez calculado el problema en las fronteras se resuelven los grados de libertad internos con la ecuación (39).

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha esbozado una formulación de elementos finitos para problemas mecánicos, partiendo de la consideración de un subdominio como base para el mismo. Este punto de vista tiene las motivaciones indicadas en la introducción y permite considerar una amplia gama de situaciones tanto en lo que hace a los problemas físicos en sí como a las particularidades de su resolución computacional.

REFERENCIAS

- [1] Bjørstad, P.E. and Widlund, O.B., *Iterative Methods for the Solution of Elliptic Problems on Regions Partitioned into Substructures*, SIAM J.Num.Analysis, Vol. 23, pp. 1097-1120, 1986.
- [2] De Roeck, Y.-H., Le Tallec, P., *Analysis and Test of a Local Domain Decomposition Preconditioner*, in IV Intl.Symp. on Domain Decomposition Meth. for Partial Differential Equations (R. Glowinsky, Y. Kuznetsov, G. Meurant, J. Périaux and O. Widlund, Eds.), SIAM, Philadelphia, 1991.
- [3] Farhat, Ch. and Roux, F.-X. *A Method of Finite Element Tearing and Interconnection and its Parallel Solution Algorithm*, Int.J.Numerical Methods in Engineering, Vol.32, pp 1205-1227, 1991.
- [4] Sonzogni, V.E. *Solución de Problemas de Respuesta Transitoria No-lineal por Descomposición de Dominio*, Proc. V MECOM, Tucumán, 10-13 setiembre 1996, pp. 383-392, 1996.
- [5] Hallquist, J.O., *NIKE2D: An Implicit, Finite Deformation, Finite Element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of 2D Solids*, Rep. UCRL-52678, Univ. of California, Lawrence Livermore Nat. Laboratory, 1979.
- [6] Belytshko, T. and Neil, M.O. *Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods*, Int.J.Numerical Methods in Engineering, Vol.31, pp 547-572, 1991.
- [7] Oden, J.T., *Exterior Penalty Methods for Contact Problems in Elasticity*, In Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Wunderlich, Stein, Bathe (eds), Springer, Berlin, 1981.
- [8] Fortin, M. and Glowinski, R. *Augmented Lagrangian Methods*, North Holland, Amsterdam, 1983.
- [9] Wriggers, P., Wagner, W. and Stein, E. *Algorithms for Non-linear Contact Constraints with Application to Stability Problems of Rods and Shells*, Computational Mechanics, Vol.2, pp. 215-230, 1987.
- [10] Simo, J.C., Wriggers, P. and Taylor, R.L. *A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems*, Comp.Meth.in Applied Mechanics and Engng., Vol.50, pp 163-180, 1985.
- [11] Feijóo, R. A. and Barbosa, H.J.C *An introduction to the unilateral contact problem in mechanics*, Proc. I MECOM, Santa Fe-Paraná, octubre 1996, pp. 33-69, 1985.
- [12] Kikuchi, N. and Oden, J.T. *Contact Problems in Elasticity*, TICOM Reports 79-8, University of Texas, Austin, 1979.
- [13] Glowinski, R., Lions, J.L. et Trémolières, R. *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*, Dunod, Paris, 1976.