

ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS
DEL COEFICIENTE DE FRICCION
EN UN MODELO PORO-ELASTOHIDRODINAMICO
DE JUNTA SINOVIAL

José Di Paolo, Carlos M. Corvalán

Grupo Biomecánica Computacional - Facultad de Ingeniería - UNER
Casilla de Correo 57 Suc. 3, 3100 Paraná, Argentina

Fernando A. Saita

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC)
Universidad Nacional del Litoral - CONICET
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina

RESUMEN

Se presentan los resultados de la solución simultánea de las ecuaciones de un modelo poro-elastohidrodinámico de junta sinovial a través de una técnica computacional basada en el método de elementos finitos-Galerkin que ha permitido extender el rango de valores explorados en el parámetro representativo de la porosidad de los cartílagos respecto de otras metodologías. Los resultados muestran que el factor de fricción disminuye a medida que crece el parámetro de porosidad, a la vez que se acrecienta el efecto de autolubricación debido a que los cartílagos exudan prácticamente todo el fluido necesario para permitir la lubricación de la junta.

ABSTRACT

The results of the simultaneous solution of the equations of synovial joint Poro-elastohydrodynamic model, obtained by a computational technique based on Galerkin-Finite Element method are presented; this technique has allowed to extend the range of explored values of the cartilage porosity in relation to other solution techniques. The results shows a reduction in the friction factor as the porosity parameter increases; at the same time a self-lubrication effect arises owing to cartilage exudation which provides almost the total fluid necessary to permit the joint lubrication.

INTRODUCCION

Las articulaciones de los vertebrados, también llamadas juntas sinoviales, son contactos lubricados que poseen la particularidad de trabajar en distintos modos de funcionamiento (arranque, movimiento pleno, parada) y distintos regímenes de cargas

(estática, dinámica) con elevada performance, específicamente, con muy bajos coeficientes de fricción (del orden de 10^{-3}) [1]. Su larga vida en buenas condiciones de operación hacen de las juntas sinoviales un interesante objeto de estudio que más allá de su complejidad fisiológica, pueden indagarse a través de las leyes de la mecánica a las cuales están subordinadas.

Dentro de las distintas fases del movimiento alternante de una articulación, la de movimiento pleno muestra un comportamiento mecánico análogo al de los cojinetes de máquinas. Es decir, los sólidos debido a su movimiento arrastran un fluido viscoso por un canal estrecho originando en el seno del fluido una distribución de presión que soporta la carga evitando que aquellos se toquen; a su vez la presión del fluido interactúa deformándolos. Los sistemas que presentan estas características se conocen con el nombre de Elastohidrodinámicos (EHD) y sus ecuaciones representativas [2] usualmente se toman como base para modelar el comportamiento de las juntas sinoviales.

Existe, empero, otra característica fundamental de las articulaciones que ha sido señalada como principal responsable en la formación de la película lubricante: la porosidad de los cartílagos [3]. En virtud de sus poros los cartílagos son capaces de exudar fluido por compresión o absorberlo por expansión variando las condiciones locales de la lubricación de la junta. Debido a ello las juntas sinoviales, más que como sistemas EHD, deben considerarse como sistemas Poro-Elastohidrodinámicos (PEHD).

Recientemente Corvalán y colaboradores [4], a través de un simple modelo PEHD de junta sinovial, han mostrado las variaciones en el comportamiento del sistema que la porosidad de los cartílagos induce frente al caso EHD no poroso. Estas variaciones básicamente son: aumento del canal de flujo en la mayor parte del contacto y variaciones del caudal circulante por dicho canal debido a la exudación o absorción de fluido en las regiones de compresión o descompresión. Sin embargo, el análisis de estos fenómenos fue limitado por la metodología utilizada para la solución de las ecuaciones del modelo; la misma sólo permitió obtener resultados para valores muy pequeños del parámetro representativo de la porosidad de la junta.

En este trabajo se obtienen soluciones del modelo planteado en [4] con una técnica computacional que ha permitido resolver problemas similares relacionados con los cojinetes de fricción [5] y el recubrimiento de papel [6] entre otros; esta técnica se basa en la solución simultánea de las ecuaciones utilizando el método de Elementos Finitos-Galerkin, el método de Newton, discretización adaptable y continuación paramétrica.

De las características previamente detectadas de los sistemas PEHD, el aumento del canal de flujo como consecuencia del aumento de porosidad sugirió la posible disminución de los efectos de fricción en el contacto. Los resultados que aquí se presentan permiten confirmar dicha presunción al mostrar el descenso del factor de fricción y el afianzamiento del fenómeno de autolubricación a medida que el parámetro de porosidad crece en cierto entorno.

ECUACIONES DEL MODELO

El sistema de ecuaciones está fundado en las leyes de conservación de masa y cantidad de movimiento aplicadas al contacto lubricado representado en la figura 1. Esta figura es una abstracción física de la compleja conjunción entre huesos, cartílagos y líquido sinovial donde los huesos se comportan como materiales rígidos y los cartílagos como materiales muy deformables y porosos que, a pesar de su complejidad constitutiva, serán tratados como sólidos con propiedades mecánicas isotrópicas [7]. El fluido sinovial que es una mezcla de ácido hialurónico y plasma, actúa como lubricante de la junta y posee

características viscoelásticas [8] pero, por razones de simplicidad será modelado como un fluido newtoniano [7].

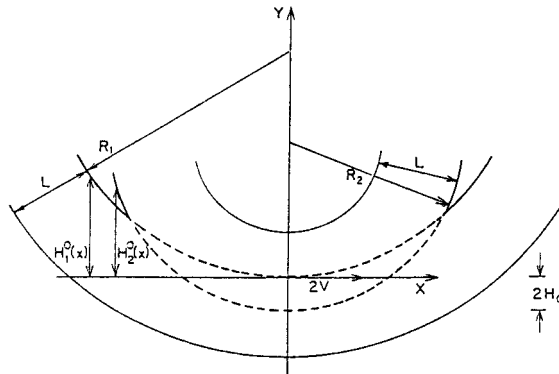


Figura 1: Representación simplificada de la región de contacto lubricado de una junta sinovial.

El modelo y sus ecuaciones representativas han sido detallados en [9]; estas últimas se exponen seguidamente en su forma adimensional.

El canal de flujo está dado por:

$$h(x) = 2h_0 + x^2 + d(x) \quad (1)$$

donde $d(x)$ es la deformación total, $2h_0$ el cruzamiento de los sólidos en estado indeformado y las longitudes características adoptadas en las direcciones X e Y son $(RL)^{1/2}$ y L respectivamente, siendo R el radio equivalente del contacto y L el espesor del cartilago. La ecuación para obtener el campo de presiones en el contacto es la ecuación de Reynolds, que en virtud de lo mostrado en [10] se ha tomado en su formulación integral:

$$p(x) = 12 \int_{-\infty}^x \frac{h - 2q_e}{h^3} dx \quad (2)$$

donde se han definido la presión y el caudal adimensional como $p = \frac{PL}{\mu V} \left(\frac{L}{R}\right)^{1/2}$ y $q_e = \frac{Q_e}{2VL}$, siendo μ la viscosidad del fluido y V la velocidad media de los sólidos.

La distribución de presión debe satisfacer como condiciones de contorno las siguientes: lejos de la línea de centros hacia la entrada del canal ésta debe tener el valor ambiental y luego de haber desarrollado su perfil de variación al llegar a la salida del canal en un punto cuya ubicación se desconoce (\bar{x}), la presión debe retomar el valor ambiental con pendiente nula para evitar que se induzcan presiones subambientales que causen la cavitación del fluido [2]. Estas condiciones de borde reciben el nombre de condiciones de contorno de Reynolds y simbólicamente son:

$$x \rightarrow -\infty, \quad p = 0$$

$$x = \bar{x}, \quad p = \frac{dp}{dx} = 0$$

La determinación de la ubicación de \bar{x} implica una complicación adicional que se resuelve a través de la ecuación que satisface la condición de gradiente de presión nulo en \bar{x} ; es decir:

$$h|_{\bar{x}} = 2 q_e|_{\bar{x}} \quad (3)$$

La satisfacción de la condición de presión nula (ambiental) en \bar{x} en la ecuación (2), permite determinar el caudal de entrada $q_e(-\infty)$ al cual estarán relacionados los valores de q_e en el resto del contacto como se verá más adelante:

$$0 = \int_{-\infty}^{\bar{x}} \frac{h - 2q_e}{h^3} dx \quad (4)$$

La deformación total, según el modelo elástico de columna [7], resulta proporcional a la presión:

$$d(x) = N_e p(x) \quad (5)$$

donde $N_e = \frac{2\mu V}{L E^*} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}$ y $E^* = \frac{(1-\nu) E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$. E y ν son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson de los cartílagos respectivamente.

Por último, para satisfacer la continuidad del flujo másico de lubricante, el caudal circulante en cada sección del canal estará conformado por el caudal de ingreso al contacto $q_e(-\infty)$ y el caudal exudado o absorbido por los cartílagos. En variables adimensionales se tiene:

$$q_e(x) = q_e(-\infty) + \frac{1}{2} \theta p(x) \quad (6)$$

donde θ es la porosidad superficial de los cartílagos, o bien la fracción de fluido intersticial capaz de ser exudado. En adelante θ será llamado "factor de exudación" y será tratado como un parámetro puesto que no se conoce su valor.

Factor de fricción:

La carga por unidad de ancho axial actuante sobre el contacto es una fuerza normal a las superficies articulares y está dada en variables adimensionales por:

$$w = \int_{-\infty}^{\bar{x}} p(x) dx \quad (7)$$

mientras que las fuerzas tangenciales de fricción en cada una de dichas superficies están dadas por la integral del esfuerzo cortante en toda la extensión del contacto. En variables adimensionales son:

$$f_{1,2} = \int_{-\infty}^{\bar{x}} \tau_{1,2} dx \quad (8)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican las superficies inferior y superior respectivamente.

El esfuerzo cortante puede determinarse a través de la aproximación de lubricación entendiéndolo el canal en cada posición como dos placas paralelas separadas por una distancia igual a la altura del canal en dicha posición. En variables adimensionales resulta:

$$\tau_{1,2} = \mp 6 N_f \frac{h - 2q_e}{h^2} + \frac{2 N_f}{h} \quad (9)$$

donde $N_f = (L/R)^{1/2}$

Por último, se define el factor de fricción en cada superficie articular como el cociente entre la fuerza de fricción y la carga actuante sobre el contacto [11], es decir:

$$\phi_{1,2} = \frac{f_{1,2}}{w} \quad (10)$$

METODOLOGIA DE SOLUCION

El sistema PEHD de junta sinovial presentado ha sido resuelto previamente [4] a través de una metodología de solución simultánea fundada en el método integrador de Gear para ecuaciones diferenciales con algunas variantes particulares para este problema como lo son: la integración hacia atrás (entre \bar{x} y $-\infty$) y un lazo de Newton para ajustar el caudal $q_e(-\infty)$ de forma de satisfacer la condición de contorno para la presión a la entrada del contacto. Dicha metodología es computacionalmente muy rápida, sin embargo, la convergencia del lazo de Newton es dificultosa aún para bajos valores del parámetro θ , a tal punto que fue imposible obtener soluciones para valores superiores a 4×10^{-3} .

A fin de explorar el comportamiento del sistema a mayores valores del parámetro de exudación en este trabajo se implementó la técnica de resolución basada en:

- 1) Discretización de las ecuaciones por el método de Elementos Finitos y los residuos ponderados de Galerkin.
- 2) Solución simultánea de las ecuaciones por medio del método de Newton.
- 3) Discretización adaptable. En este caso en función de la posición de la frontera desconocida \bar{x} .
- 4) Control del paso del parámetro y continuación paramétrica.

La metodología tiene su origen en los años '80 con el advenimiento de las grandes computadoras y con el estudio de problemas de flujo con superficies libres relacionados con procesos de recubrimiento. El manejo de la frontera libre \bar{x} y la adaptabilidad de la discretización nodal en función de ella consiste en una implementación unidimensional del método de los *spines* creado para la localización de las superficies libres antes referidas [12].

Los nodos cuya posición se varía en cada iteración, de acuerdo a la localización de la frontera de descarga, son los que se encuentran desde el centro del dominio hacia la frontera de salida mientras que los restantes se mantienen fijos. Mayores detalles de la implementación de esta discretización adaptable puede verse en [5] donde la metodología de solución aquí empleada se utilizó exitosamente para la solución del problema de contacto lineal en su formulación EHD.

RESULTADOS

Los resultados que se presentan fueron obtenidos para un grupo de parámetros físicos y operativos representativos de una rodilla humana (Tabla I [7]) y corresponden a los mismos números adimensionales N_e , N_f y h_0 , siendo el parámetro diferenciador de los mismos el factor de exudación θ . Las predicciones, fueron obtenidas con una distribución nodal de 140 nodos ejecutando el código computacional desde el estado de cargas muy bajas tal como se ha hecho en [5]. Un estado de cargas bajas está representado por un valor de h_0 positivo (por ej. 0.4), en estas condiciones la frontera libre (\bar{x}) se ubica muy

próxima a la línea de centros y tanto las presiones como las deformaciones resultantes son despreciables, lo que permite que el uso de una estimación inicial de valores nulos sea satisfactoria para la convergencia del método de Newton.

Después de la primera convergencia, se obtienen nuevos resultados a través de un proceso de continuación paramétrica disminuyendo h_0 hacia valores negativos hasta llegar a un valor de carga típico para la articulación en estudio. A partir de allí, manteniendo constante h_0 , se realiza continuación paramétrica de forma de aumentar el parámetro θ desde un valor nulo hasta llegar a un valor límite donde la iteración de Newton deja de converger. Dicho valor límite de θ disminuye a medida que se incrementa la carga soportada; esto es para valores de h_0 más negativos.

Tabla I

R	0.7 m
V	0.0191 m/seg
μ	0.01 Pa seg
E	16×10^6 Pa
ν	0.4
H_0	0.2451×10^{-4} m
L	1.2×10^{-3} m
θ	0.02
W	5.715×10^3 N/m

El intervalo de variación del parámetro de exudación que ha sido explorado es pequeño, el máximo valor para el cual se obtuvieron resultados es 0.04; no obstante, este valor es un orden de magnitud mayor que el obtenido en [4].

En las figuras que siguen se comparan tres resultados correspondientes a tres valores de θ , dos de ellos pertenecientes a estados extremos como el de $\theta = 0$ (no poroso) y $\theta = 0.04$, y el restante corresponde a un factor de exudación intermedio $\theta = 0.02$ tomado como base para la comparación.

Las figuras 2 a 5 presentan un comportamiento del sistema análogo al mostrado en [4]. La figura 2 muestra la distribución de presión para los tres valores ya señalados del factor de exudación, puede observarse que la presión (y como consecuencia la carga soportada) es casi insensible a las variaciones de θ . Sin embargo, estas alteraciones mínimas de la presión producen alteraciones significativas tanto en el canal de flujo como en el caudal de líquido que fluye en dicho canal.

La figura 3 muestra los canales de flujo correspondientes a las presiones de la figura 2. Se ve con claridad que el canal pasa de ser levemente convexo cuando $\theta = 0$ a ser cada vez más concavo y más estrecho a la salida a medida que θ aumenta. Por ejemplo, para la porosidad base el canal ha aumentado en el centro ($x = 0$) un 50% y en la salida, donde se encuentra el mínimo, se ha estrechado un 38% respecto del canal no poroso. Es notorio el cierre del canal en la zona de salida de flujo al aumentar el parámetro de exudación; como se verá inmediatamente este efecto se debe a la fuerte disminución del caudal de entrada que se produce al aumentar los valores de θ y dado que el caudal de salida debe ser igual al de entrada el sistema satisface este requerimiento reduciendo la sección de paso.

La figura 4 muestra las variaciones del caudal circulante a lo largo del contacto con el factor de exudación. Puede entenderse ahora que los ensanchamientos que sufre el canal en

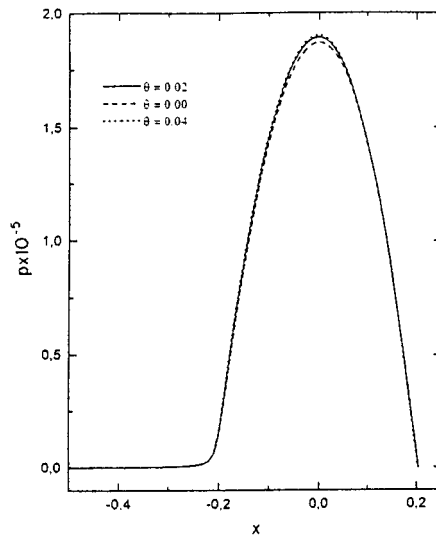


Figura 2: Distribuciones de presión.

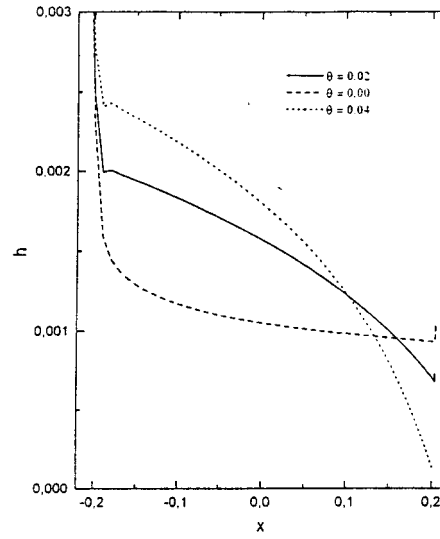


Figura 3: Canales de flujo deformados.

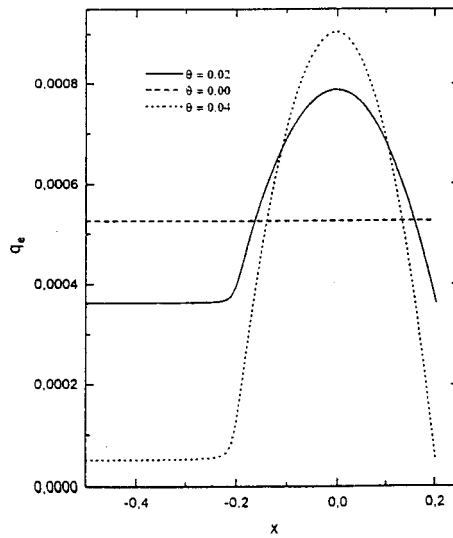


Figura 4: Caudales circulantes por los canales.

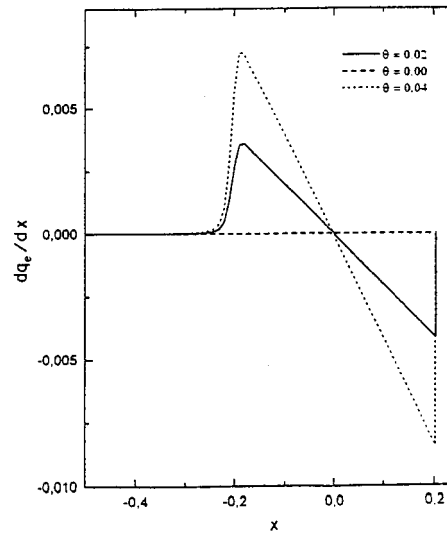


Figura 5: Velocidades de exudación/absorción.

la zona central del contacto vistos en la figura 3, resultan necesarios para permitir la circulación de los correspondientes caudales; estos crecen fuertemente respecto a los valores de ingreso al contacto debido a la exudación de los cartílagos. Asimismo, la reducción del caudal de entrada/salida alcanza cuando $\theta = 0.02$, un 30.9% respecto del caudal existente para $\theta = 0$ y dicha reducción llega al 89.9% cuando $\theta = 0.04$. En síntesis, las predicciones mostradas en la figura 4 indican que el fenómeno de exudación/imbibición induce en el sistema un funcionamiento de autolubricación, obteniéndose parte del fluido necesario para la formación de la película lubricante a expensas del contenido en los cartílagos, y que esta característica se acentúa al aumentar el factor de exudación.

La figura 5 muestra la velocidad con que los cartílagos exudan o absorben fluido (dq_e/dx) en los intervalos de gradiente de presión positivos, y los intervalos de gradiente de presión negativos respectivamente. Como las curvas de presión no son simétricas respecto a la línea de centros, las velocidades de exudación y absorción no son iguales. Sin embargo, como todo el caudal exudado debe ser luego absorbido para satisfacer la conservación de masa, el área que encierran las velocidades de exudación debe ser igual a la que encierran las velocidades de absorción.

El cómputo de los factores de fricción $\phi_{1,2}$ reveló valores pequeños en concordancia con mediciones experimentales, pero además muestran una característica descendente respecto del aumento del factor de exudación en la mayor parte del intervalo de variación de éste como puede verse en la figura 6.

Mientras el factor de fricción ϕ_1 desciende un 34% entre $\theta = 0$ y $\theta = 0.029$, ϕ_2 desciende alrededor de un 15% entre 0 y 0.018 del mismo parámetro. Este descenso está relacionado fundamentalmente con el aumento del canal en la mayor parte del contacto como se ve en la figura 3; los factores de fricción mínimos que se observan sugieren entonces la existencia de un canal de flujo óptimo y por lo tanto una porosidad óptima para cada una de las superficies de los sólidos en contacto.

La recuperación de ambos factores de fricción después de alcanzar los valores mínimos, se debe a que luego de cada canal óptimo, la zona de estrechamiento al final del contacto se vuelve tan pronunciada que el aumento de la fricción en esa zona supera la disminución de la fricción que se experimenta en la región de ensanchamiento del canal (ver figura 3).

Las predicciones del modelo en cuanto al estrechamiento del canal en la zona de descarga con el aumento del parámetro de porosidad son, cuanto menos, sugestivas. En primer lugar, a medida que el valor de θ se aproxima a 0.04 se notan problemas en la convergencia del método iterativo que son parcialmente superados mediante el uso de una discretización más refinada en la zona donde el canal de flujo se cierra. Sin embargo, las dificultades aumentan a medida que el cierre progresa hasta llegar a un punto donde el método de Newton deja de converger. Una de las razones más evidentes para que ello suceda tiene su origen en la ecuación (2) donde el denominador del integrando es el cubo de la altura del canal; es claro que a medida que $h \rightarrow 0$ puedan aparecer problemas numéricos.

No obstante, es probable que el cierre del canal de descarga y los problemas numéricos que conlleva, no sean más que una manifestación de la pérdida de validez del modelo (y/o de las condiciones de contorno supuestas) a medida que se incrementa el factor de exudación. Este es un problema aún no dilucidado y que al presente está siendo objeto de estudio; en consecuencia, los resultados presentados, particularmente aquellos obtenidos en condiciones extremas, deben ser tomados con resguardo.

Remitiéndonos a las predicciones obtenidas para valores del parámetro de exudación ale-

jados del valor extremo de 0.04, podemos concluir que el modelo sugiere que el fenómeno de exudación/imbibición resulta beneficioso en cuanto induce un funcionamiento autolubrificante y produce la disminución del coeficiente de fricción con que las mismas trabajan.

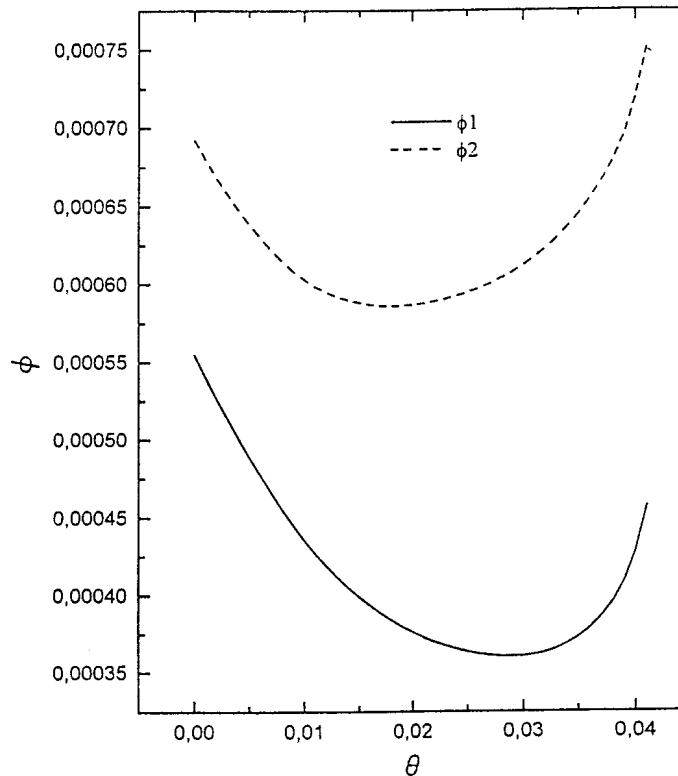


Figura 6: Coeficientes de fricción en función del factor de exudación.

CONCLUSIONES

Se han presentado los resultados de la solución simultánea de un modelo PEHD de junta sinovial alcanzados mediante una técnica computacional que ha mostrado ser efectiva en mayores rangos de variación del factor de exudación que los obtenidos con otras metodologías. En virtud de ello y a pesar del simple modelo utilizado, las predicciones del mismo sugieren que el proceso de exudación-imbibición de fluido por parte de los cartílagos sería uno de los mecanismos que induce el fenómeno de autolubricación y los bajos coeficientes de fricción característicos de las articulaciones óseas. El modelo de articulación propuesto puede considerarse válido para bajos valores del factor de exudación; a medida que éste aumenta dicha validez es cuestionable y deberá ser objeto de estudios adicionales.

En trabajos futuros se espera resolver un modelo PEHD de junta sinovial como el presentado, que contenga además las ecuaciones que modelen el fenómeno de filtración del fluido sinovial que producen los cartílagos. Estos, al no permitir el ingreso de las macromoléculas de ácido hialurónico en los microporos de los mismos producen, por variación de concentración, variaciones en la viscosidad local del líquido sinovial y por ende sobre todas las variables del sistema. Asimismo, se pretende extender el modelo PEHD y la metodología de solución al caso bidimensional denominado "contacto puntual" para estudiar las articulaciones a través de modelos más realistas y en particular, las coyunturas con geometrías claramente bidimensionales como por ejemplo la existente entre la cadera y la cabeza del fémur que impiden totalmente su aproximación unidimensional.

REFERENCIAS

- [1]- Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena and Living Systems*, John Wiley and Sons, 1974.
- [2]- Dowson, D. and Higginson, G.R., *Elastohydrodynamic Lubrication*, Pergamon Press, 1977.
- [3]- Mow, V. C. and Lai, W.N., *Recent development in synovial joint biomechanics*, Siam Review, **22**, Num. 3, 1980, 275.
- [4]- Corvalán, C.M., Di Paolo, J. y Saita, F.A., *Un simple modelo unidimensional de junta sinovial con exudación*, Mecánica Computacional (AMCA), **XVI**, 1996, 72-82.
- [5]- Di Paolo, J. y Saita, F.A., *Solución del problema elastohidrodinámico de contacto lineal*, Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing., **8**, Núm. 4, 1992, 427-438.
- [6]- Corvalán, C.M., *Análisis de los Flujos de Recubrimiento de Materiales Elastoporosos*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, 1993.
- [7]- Dowson, D. and Jin, Z.M., *Microelastohydrodynamic lubrication of low-elastic-modulus solids on rigid substrates*, J. Phys. D: Appl. Phys., **25**, 1992, 116-123.
- [8]- Dintenfuss, L., *Rheology of complex fluids and some observations on joints lubrication*, Fed. Proc., **25**, 1966, 1054-1060.
- [9]- Corvalán, C.M., Di Paolo, J. and Saita, F.A., *Elastohydrodynamic lubrication of porous substrates. Application to synovial joint analysis*, submitted to Journal of Biomechanical Engineering (ASME), 1997.
- [10]- Di Paolo, J., Corvalán, C.M. y Saita, F.A., *Solución numérica de la ecuación de Reynolds. Formulación diferencial vs. formulación integral*, Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing., **11**, Núm. 3, 1995, 303-322.
- [11]- Ghosh, M.K. and Hamrock, B.J., *Thermal elastohydrodynamic lubrication of line contact*, ASLE Trans., **28**, Num 2, 1984, 159.
- [12]- Kistler, S.F., *The fluid mechanics of curtain coating and related viscous free surface flows*, Ph.D. Thesis, University of Minnesota, U.S.A., 1983.