

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE PUNTOS FINITOS A LA RESOLUCIÓN DE LA  
ECUACIÓN DE POISSON EN 2D

Román E. Chomicz, Mario A. Storti, Sergio R. Idelsohn  
Grupo de Tecnología Mecánica, INTEC, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina  
<http://venus.unl.edu.ar/gtm-eng.html>

RESUMEN

Se presenta un procedimiento libre de mallas para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a partir de la combinación del método de colocación puntual y el método de interpolación de mínimos cuadrados móviles aplicada a la ecuación general de residuos ponderados. Como aplicación se estudia el caso de resolución de la ecuación de Poisson en dos dimensiones considerando condiciones de borde de Dirichlet y Neumann. Se realiza un análisis de la convergencia del método así como también una estimación del error.

ABSTRACT

This paper presents a meshless procedure for the solution of partial differential equations, using a combination of point collocation method and moving least squares interpolation with the weighted residual method. As application example, the Poisson equation in two dimensions have been solved by this procedure taking into account Dirichlet and Neumann boundary conditions. Error evaluation and convergence analysis have been presented.

1. MÉTODO DE PUNTOS FINITOS

Supongamos un problema escalar representado por la ecuación diferencial

$$A(u) = b \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

con las condiciones de contorno

$$B(u) = t \quad \text{en } \Gamma_t; \quad u - u_p = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (2)$$

donde  $\Omega$  representa el dominio en estudio y  $\Gamma = \Gamma_t + \Gamma_u$  su contorno.  $A$  y  $B$  son operadores diferenciales y  $u$  es una función escalar incógnita. Dicha función  $u$  depende de la posición elegida para su evaluación dentro de  $\Omega$ , en general

$$u = u(x) \quad (3)$$

donde  $x$  representa la posición dentro de  $\Omega$ . Para el caso unidimensional  $x = x$ , para el caso bidimensional  $x = [x, y]$ .

Una técnica bastante común para la resolución numérica de este problema es el método de los residuos ponderados [6] en el cual, la función desconocida  $u$  es aproximada por una función  $\hat{u}$  y las ecuaciones anteriores son llevadas a la siguiente forma integral

$$\int_{\Omega} W_i [A\hat{u} - b] d\Omega + \int_{\Gamma_i} \bar{W}_i [B\hat{u} - t] d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{\bar{W}}_i [\hat{u} - u_p] d\Gamma = 0 \quad (4)$$

donde  $\hat{u}$  puede expresarse en función de los valores de  $u$  en ciertos puntos de  $\Omega$  de la siguiente manera

$$u(x) \cong \hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{n_p} N_i(x) u_i^h \quad (5)$$

y en forma matricial como

$$N^T(x) \mathbf{u}^h \quad (6)$$

en esta expresión las  $N_i(x)$  representan las funciones de interpolación para cada uno de los puntos en los que se tienen los valores  $u_i^h$ , y  $x$ , como ya mencionamos, define las coordenadas en el dominio  $\Omega$ . En general tomaremos

$$N_i(x) \neq 0 \quad \text{si } x \in \Omega_i; \quad N_i(x) = 0 \quad \text{si } x \notin \Omega_i \quad (7)$$

donde  $\Omega_i$  es un subdominio de  $\Omega$  que contiene  $n$  puntos en los que se tienen los valores  $u_i^h$ , y tal que  $n \ll n_p$ . Esto último le otorga a la formulación la capacidad de trabajar localmente para resolver el problema global, ayudando además a la formación de matrices en banda. En el método de puntos finitos [1], [5] estos subdominios  $\Omega_i$  son llamados 'nubes'. Cabe aclarar que los valores  $u_i^h$  son las incógnitas de nuestro problema y no datos como se viene exponiendo. Pero la sustitución de (5) en (4) y la apropiada elección de las funciones  $W_i$ ,  $\bar{W}_i$  y  $\bar{\bar{W}}_i$  permitirá encontrar estos valores  $u_i^h$ , que como se entenderá son, en general, de carácter aproximado a los verdaderos valores de  $u$ .

Veamos cómo se evalúan las funciones de forma en el método en cuestión. Para ello consideremos una nube  $\Omega_i$  con  $n$  puntos cuyas coordenadas son  $x_j$  donde se tienen, o se pretende tener, los valores  $u_j^h$ . Nos proponemos aproximar la función  $u(x)$  en el dominio de la nube a través de una interpolación polinómica

$$u(x) \cong \hat{u}(x) = \sum_{l=1}^m p_l(x) \alpha_l \quad (8)$$

en forma matricial

$$\mathbf{p}^T(x) \boldsymbol{\alpha} \quad (9)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}$  es un vector de la forma  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m]^T$  con las constantes de interpolación y  $\mathbf{p}(x)$  contiene los monomios que dependen del orden de aproximación y de la dimensión del problema. Por ejemplo para el caso bidimensional e interpolación cuadrática

$$\mathbf{p} = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad m=6 \quad (10)$$

y la función aproximante será para este caso

$$u(x) \cong \hat{u}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \quad (11)$$

Teniendo definido el grado de la función aproximante a usar para interpolar la función incógnita en cada nube, el próximo paso a seguir es tratar de expresar  $\hat{u}$  en función de los valores  $u_i^h$  dados, o que se pretenden hallar, para ciertos puntos dentro del dominio  $\Omega_i$ . Para ello  $\hat{u}$  es evaluada en esos  $n$  puntos de  $\Omega_i$ . En general se tendrá  $n > m$  y el problema de interpolación posee más datos que parámetros de ajuste (los  $\alpha_i$ ), por lo que debe resolverse como un problema de minimización de algún funcional. Utilizando técnicas de mínimos cuadrados pesados el problema consiste en minimizar el siguiente funcional del error en la nube  $\Omega_i$  para hallar los parámetros de ajuste  $\alpha_i$

$$J = \sum_{j=1}^n \varphi(u_j^h - \hat{u}(x_j))^2 \quad (12)$$

La función  $\varphi$  se denomina función de peso. Dependiendo del tipo de función de peso que se adopte se obtendrán diferentes técnicas de interpolación por mínimos cuadrados pesados [3]. La que se propone aquí es el método de interpolación por mínimos cuadrados móviles [2], [3]. En este método la función de peso  $\varphi$  se 'traslada' con el punto  $x^*$  (punto arbitrario del dominio) en el cual se la desee evaluar (a ella y al funcional) convirtiéndose este punto en lo que denominaremos 'punto principal de la nube'. Este tipo de dependencia de la función de peso lo pondremos de manifiesto a través de la siguiente expresión

$$\varphi = \varphi(x_j - x^*) \quad (13)$$

con esto, (12) se transforma en

$$J = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j - x^*) (u_j^h - \hat{u}(x_j))^2 \quad (14)$$

Nuestro objetivo al momento, es encontrar los valores de los parámetros  $\alpha_i$  que minimicen (14). Esto lo logramos derivando (14) respecto de cada uno de los  $\alpha_i$  e igualando a cero dichas derivadas. Así encontramos

$$\alpha = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}^h \quad (15)$$

$\begin{matrix} m \times n & m \times m & m \times n & n \times 1 \end{matrix}$

donde  $\alpha$  es el vector que contiene los parámetros  $\alpha_i$ , y para el caso unidimensional y en función de la componente de posición

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j - x^*) \mathbf{p}(x_j) \mathbf{p}(x_j) \quad (16)$$

$m \times m$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(x_1 - x^*) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(x_n - x^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

obsérvese que  $\mathbf{A}$  depende tanto de la posición de los puntos  $x_j$  dentro de la nube como del  $x^*$  adoptado, esto último a través de la dependencia mencionada de las funciones peso con  $x^*$ . La inversa de esta matriz, que es lo que se requiere en la expresión (15) se evalúa numéricamente en el punto  $x^*$  en cuestión. Teniendo en cuenta la definición del vector  $\mathbf{p}$  dada anteriormente (ec.(10) por ejemplo) esta expresión puede reescribirse de la siguiente manera

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(x_1 - x^*) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(x_n - x^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{bmatrix} \quad (18)$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \varphi(x_1 - x^*) \mathbf{p}(x_1) & \varphi(x_2 - x^*) \mathbf{p}(x_2) & \dots & \varphi(x_n - x^*) \mathbf{p}(x_n) \end{bmatrix} \quad (19)$$

válidas estas, cualquiera sea la dimensión del problema.  
Con todas estas expresiones se puede reescribir la función de interpolación como

$$\hat{u}(x) = \underset{1 \times n}{\mathbf{N}^T}(x) \underset{n \times 1}{\mathbf{u}^h} \quad (20)$$

con

$$\underset{1 \times n}{\mathbf{N}^T} = \underset{1 \times m}{\mathbf{p}^T}(x) \cdot \left( \underset{m \times m}{\mathbf{A}}^{-1} \underset{m \times n}{\mathbf{B}} \right) \quad (21)$$

que contiene las funciones de forma. La (21) es la función de forma para  $x^*$ . En dicha expresión se puede observar que todos los factores guardan una dependencia respecto de  $x$ , en particular  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  a través de la función de peso  $\varphi(x^*$  es arbitrario), por lo que discontinuidades, o cambios de forma en  $\varphi$  relacionados con  $x$ , pueden acarrear discontinuidades en las funciones de forma.

Hasta ahora no se ha requerido en la formulación propuesta más que de la posición de los puntos donde se tienen dados los  $u_i^h$ . Pero para que el método conserve dicha característica que lo hace libre de la necesidad de un mallado, será necesario utilizar una técnica apropiada para resolver el problema integral planteado a través de la ecuación general del método de los residuos ponderados dada por (4). Aplicando el método de colocación puntual [6] se tiene

$$W_i = \overline{W}_i = \overline{\overline{W}}_i = \delta_i \quad (22)$$

donde  $\delta$  es la función delta de Dirac, y el sistema que se obtiene resulta en la evaluación de

$$\left\{ \left[ A(\hat{u}) \right]_i - b_i \right\}_{\Omega} = 0; \quad \left\{ \left[ B(\hat{u}) \right]_i - t_i \right\}_{\Gamma_t} = 0; \quad (\hat{u}_i - u_p)_{\Gamma_u} = 0 \quad (23)$$

para cada uno de los puntos  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n_p$ , lo cual es equivalente a un sistema de la forma

$$\underset{n_p \times n_p}{\mathbf{K}} \underset{n_p \times 1}{\mathbf{u}^h} = \underset{n_p \times 1}{\mathbf{f}} \quad (24)$$

donde el vector  $\mathbf{u}^h$  contiene las incógnitas del problema,  $u_i^h$ .  
En la (23) el término correspondiente a las condiciones de contorno de Dirichlet puede anularse si se 'fuerza' a  $\hat{u}$  a cumplir con dichas condiciones, con lo que la (23) queda reducida a los primeros dos términos.

## 2. APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON

El método descrito se utilizó para resolver la ecuación de Poisson en dos dimensiones

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (25)$$

con las siguientes condiciones de contorno

$$k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_y \frac{\partial u}{\partial y} - u_p = 0 \quad \text{en } \Gamma_t; \quad u - u_p = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (26)$$

adoptando en lo que sigue  $k_x = k_y = 1$ .

Para dicho problema se requiere la evaluación de las derivadas segundas de la función aproximante.

Comenzaremos con el problema de la elección de la función de peso  $\varphi = \varphi(x_j - x^*)$ . Para obtener una función de forma global continua dicha función de peso deberá ser continua y diferenciable en  $\Omega_i$ , y además debe tender a cero a medida que  $x$  tiende al contorno de  $\Omega_i$  (nos alejamos de  $x^*$ ). Una función que reúne dichas características es la gaussiana

$$\varphi(x_j - x^*) = \frac{e^{-((d)/c)^2} - e^{-(x_m/c)^2}}{1 - e^{-(x_m/c)^2}} = \varphi(d) \quad (27)$$

donde, para el caso bidimensional

$$d(x_j, y_j) = \sqrt{(x_j - x^*)^2 + (y_j - y^*)^2} = \|x_j - x^*\| \quad (28)$$

que da un valor unitario sobre el punto  $x^*$ , el punto principal de la nube.

El lector debe observar que la definición de  $\Omega_i$  y la de  $\varphi = \varphi(x_j - x^*)$  están íntimamente relacionadas a partir de las condiciones que esta última debe satisfacer dentro de  $\Omega_i$ , y dado que  $\Omega_i$  es el soporte de la función de peso.

Para la discretización de (4) los puntos  $x$  en los que se requiere evaluar la función  $\hat{u}$ , son precisamente los puntos  $x = x_i, i = 1, \dots, n_p$ . Para aclarar, los  $x_j$  que forman parte de la nube son un subconjunto de los  $x_i$ , y para cada uno de estos  $x_i$  deberá establecerse una nube  $\Omega_i$ .

Volviendo a las condiciones que debe cumplir la función de peso. La condición de derivabilidad es indispensable dado que para la resolución de (25) se requiere la derivada de las funciones de forma dadas por (21). La segunda condición, de que la función tienda a cero hacia el contorno de la nube es más fácil de analizar a partir de las gráficas de la fig.1., en las que se considera por sencillez un dominio unidimensional sobre el que se ha establecido un conjunto de puntos  $x_i$  equiespaciados unitariamente.

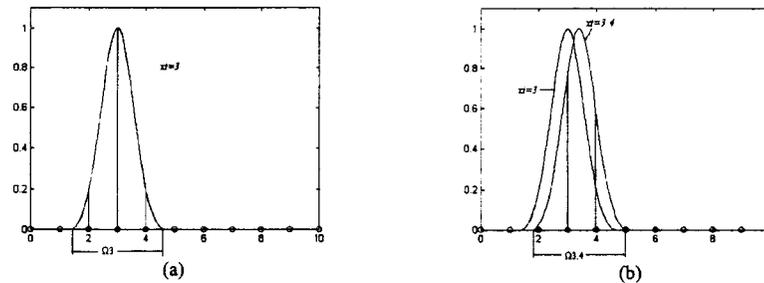


fig.1.: funciones de peso y nubes para dominio unidimensional

En las figuras 1.a y 1.b los puntos de discretización se identifican mediante círculos. Los llenos son aquellos que son pesados por la función de peso, los  $x_j$  pertenecientes a la nube en cuestión. Para tomar nubes de tres puntos, cantidad apropiada para el caso  $m=2$  (ec.(10)) según [1], la dimensión de  $\Omega_i$  se toma igual  $2x_m=3.2$  (que nos asegura tres puntos dentro de  $\Omega_i$ ), manteniéndose (salvo hacia el contorno del dominio) la forma de  $\varphi = \varphi(x_j - x^*)$ . En la figura 1.a. la función de peso  $\varphi = \varphi(x_j - x^*)$  corresponde a  $x = x^* = x_i = 3$ , y define la nube  $\Omega_i = \Omega_3$  alrededor de este punto. Dentro de esa nube los pesos de los  $x_j$  correspondientes se señalan con líneas verticales. En la figura 1.b se observa lo mismo para  $x = x^* = 3.4$ . Para este punto, y todos los intermedios desde  $x = 3$  los puntos que deben pesarse dentro de la nube siguen siendo los mismos, variando los valores de los pesos para cada uno de ellos en forma continua dado que, por hipótesis, la forma de la función de peso no cambia. Así vemos que el

punto  $x_j = 2$  es 'abandonado' con un peso despreciable al igual que el 'entrante'  $x_j = 5$ . Lo que se pretende mostrar aquí es que la condición de decrecimiento hacia el contorno de  $\Omega_i$  mantiene la continuidad de  $\hat{u}$  (ver ec. (20) (21)) cuando se produce un cambio en el conjunto de puntos  $x_j$  que se pesan.

Esta apreciación es de interés en la etapa de postproceso si es que se pretende utilizar el método de interpolación expuesto para hallar la función  $\hat{u}$  entre los valores  $u_i^h$ . Por economía de calculo (dada las inversiones y evaluaciones que se deben realizar en cada punto) se podría utilizar una combinación con un método más económico en esta fase, una interpolación lineal por ejemplo.

Para calcular los valores  $u_i^h$  en cada punto de discretización se tomará a cada uno de ellos ( $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n_p$ ) como puntos principales ( $x^*$ ), por lo que se tendrá una nube por cada uno de dichos puntos y por ende la función de forma correspondiente.

Volviendo a nuestro problema. Como dominio  $\Omega$  donde rige (25), se escogió el rectangular de la figura 2.a. Para comenzar, los puntos de discretización se eligieron distribuidos de forma regular sobre dicho dominio, así se puede apreciar en la fig.2.a. La elección de los puntos vecinos a ser pesados (definición de la nube) para obtener la función de forma dada por (21), dependerá de la ubicación de los  $x_i$ . La definición de la función de peso correspondiente también de se ve afectada por esto. Así por ejemplo, para los nodos del interior del dominio se adopta un criterio de selección diferente al usado para los nodos del contorno. En este trabajo se ha adoptado una aproximación cuadrática, expresión (10), para la que [1] [5] sugieren se adopte una cantidad de puntos por nube  $n = 9$ . Los diferentes criterios de selección de estos puntos para cada  $x_i$  se pueden apreciar en las figuras siguientes.

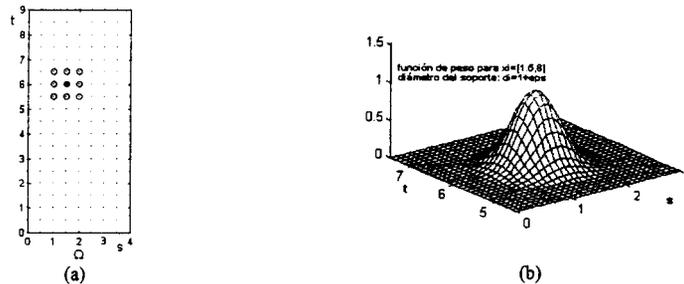


fig. 2.: (a) nodos vecinos de un punto interior del dominio,  $n = 9$ ; (b) función de peso para la nube determinada en (a)

Las figuras muestran las nubes correspondientes a diferentes puntos así como las respectivas funciones de peso. En estos dibujos, los puntos marcados con un círculo son aquellos incluidos en la nube del punto marcado con un círculo lleno (punto principal).

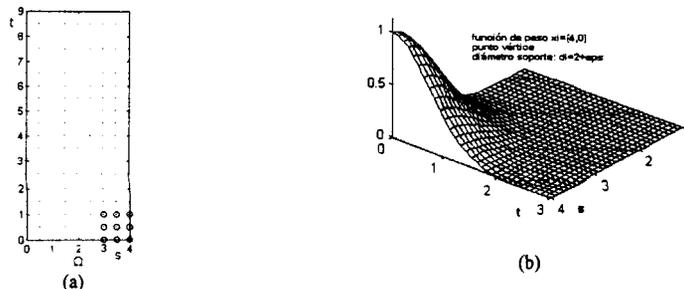


fig. 3.: (a) selección de nodos vecinos de un punto vértice,  $n = 9$ ; (b) función de peso para la nube determinada en (a)

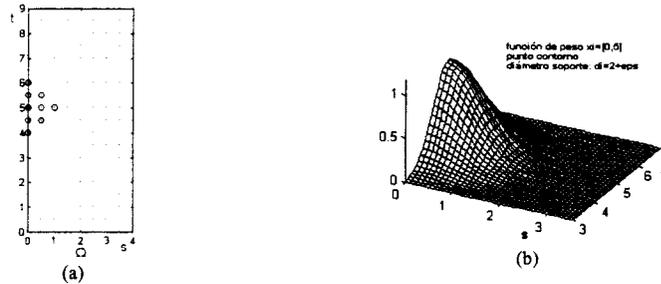


fig. 4.: (a) selección de nodos vecinos de un punto del contorno,  $n = 9$ ; (b) función de peso para la nube determinada en (a)

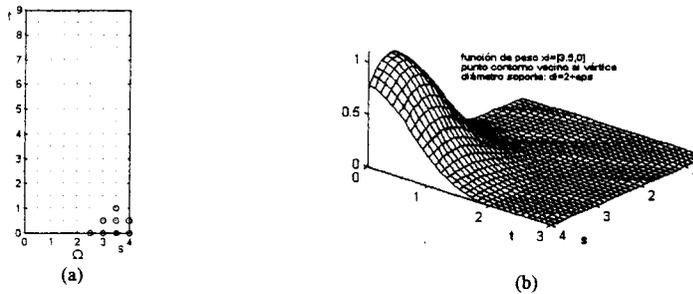


fig. 5.: (a) selección de nodos vecinos de un punto vecino al vértice,  $n = 8$ ; (b) función de peso para la nube de (a)

Se debe notar que para los nodos del tipo de la fig. 5, la cantidad de puntos adoptados  $n$  es menor. Esta elección no es única, así como tampoco lo son las anteriores, no existiendo un criterio de selección determinado. Pero los resultados obtenidos de esta forma han sido aceptables.

Una vez definido el criterio de selección de las nubes y la función de peso a utilizar veamos como evaluar las derivadas de la función aproximante  $\hat{u}$ , necesarias para discretizar (25) y (26). Para ello trabajaremos sólo con la componente espacial  $x$  pudiéndose deducir expresiones similares para  $y$ . La función de forma viene dada según (21) por

$$\mathbf{N}^T = \mathbf{p}^T(x) \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}) \quad (29)$$

$\begin{matrix} 1 \times n & & 1 \times m & & m \times m & & m \times n \end{matrix}$

derivando esta expresión respecto de  $x$  se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial x} \cdot \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{p}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial x} \quad (30)$$

$\begin{matrix} 1 \times n & & 1 \times m & & m \times n & & 1 \times m & & m \times n \end{matrix}$

donde

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (31)$$

Recordemos que si bien se tiene una expresión analítica para el cálculo de los coeficientes de  $\mathbf{A}$ , no sucede lo mismo con los de su inversa  $\mathbf{A}^{-1}$ . En caso de querer calcular  $\mathbf{A}^{-1}$  en un punto específico primero debemos evaluar  $\mathbf{A}$  en dicho punto, y luego calcular su inversa. Multiplicando a izquierda ambos miembros de la expresión (31) por  $\mathbf{A}$  se obtiene y derivando respecto de  $x$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \quad (32)$$

de donde se puede despejar  $\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial x}$  para poder evaluar (30).

En cuanto a las derivadas de  $\mathbf{A}$  y de  $\mathbf{B}$ , necesarias para evaluar  $\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial x}$  a partir de (32), se pueden evaluar a partir de las siguientes expresiones

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi(d)}{\partial x} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T \quad (33)$$

donde  $d$  viene dado por (28)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{p}(x_1, y_1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{p}(x_2, y_2) \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{p}(x_n, y_n) \right] \quad (34)$$

Las derivadas de la función de peso requeridas en (33) y (34) deben evaluarse para los puntos  $[x_j, y_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$  de cada nube por lo que se debe contar con una expresión analítica de la misma al igual que la función de peso. Esta expresión se puede obtener derivando (27) respecto de cada una de las variables espaciales. En caso de derivar respecto de la componente  $x$ , se tiene

$$\frac{\partial \varphi(d)}{\partial x} = \frac{2e^{-\left(\frac{d}{c}\right)^2} c^{-2} (x_j - x)}{1 - e^{-\left(\frac{x_m}{c}\right)^2}} \quad (35)$$

El mismo procedimiento utilizado para calcular la derivada primera se sigue para el cálculo de la derivada segunda.

Una vez obtenidas las expresiones para la discretización resta seguir los pasos establecidos en 1 para hallar los valores  $u_i^h$ . Nos queda sin embargo hacer algunas aclaraciones respecto al tratamiento de las condiciones de contorno forzadas. El método de interpolación utilizado consiste en una aproximación por mínimos cuadrados por lo que, es de mencionar que los valores  $u_i^h$  no serán en general coincidentes con los valores de la solución  $\hat{u}(x_i, y_i)$ . En el caso de condiciones de contorno forzadas el método puede entonces no respetarlas. Una manera de salvar esto es hacer

$$u(x_i, y_i) \equiv \hat{u}(x_i, y_i) = u_p \quad (36)$$

con lo cual, estas condiciones quedarán satisfechas.

La forma mostrada para la selección de los puntos de las nubes es una particularización del método de *cuadrantes* [1], [4]. Dicho método consiste en tomar para cada punto principal un cuadrante con origen en él. Los puntos que formarán la nube se tomarán de  $(n-1)/4$  en cada cuadrante, y como los más cercanos dentro de cada uno. Por ejemplo, para el caso de interpolación cuadrática tomaremos dos puntos de cada cuadrante ( $n = 9$ ). El radio del soporte ( $\Omega_i$ ) de la función de peso quedará determinado por la mayor de las distancias entre el punto principal y los puntos elgidos. En el caso de distribuciones no regulares de puntos de discretización, puede suceder que dentro de un cuadrante un punto quede demasiado alejado del punto principal en comparación con los demás. Se propone en estos casos rever la cantidad de puntos que entran en un radio determinado por esta distancia y tomarlos como parte de la nube. Esto incrementará el ancho de banda de la matriz  $\mathbf{K}$  en la medida en que entren nuevos puntos

en los demas cuadrantes para el radio del soporte seleccionado. Con este criterio se deberán utilizar distribuciones de puntos de discretización no demasiado irregulares y, o que varíen su densidad de puntos de una forma suave en caso de querer preservar un ancho de banda razonable.

### 3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

El método descrito se aplicó a la resolución de diversos casos sobre un dominio rectangular ( $l_x=4$ ,  $l_y=9$ ) sobre el que rige (25) con diferentes condiciones de contorno y con  $p$  dado por (10) aproximación cuadrática. Para soluciones contenidas en  $p$  y discretizaciones razonables la solución es exacta [2]. Por ejemplo, para el caso unidimensional que se muestra en la figura 6.

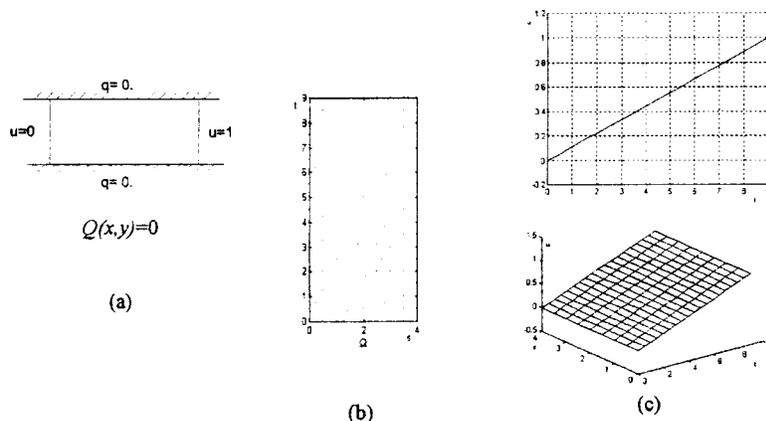


fig. 6.: (a) problema unidimensional, cond. de contorno y término fuente; (b) discretización irregular ( $n_p=137$ ); (c) solución caso (a).

Tanto para la discretización regular de la fig. 2.a. ( $n_p=171$ ) como para la de la fig. 6.a. el resultado es el mismo que se muestra en la fig. 6.c., y que coincide con la solución exacta. Para obtener una gráfica de la solución en el caso de discretizaciones irregulares como la de fig. 6.b., se interpola sobre una grilla regular utilizándose luego una interpolación lineal.

Otro caso estudiado sobre el mismo dominio para (25), es uno con condiciones de Dirichlet nulas sobre todo el contorno y término fuente dado por

$$Q(x,y) = \pi^2 \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 \right] \text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi y}{9}\right)$$

Para este caso es sencillo obtener la solución analítica. La expresión de la misma se ha utilizado para realizar un análisis de la convergencia del método para este problema particular. Para ello se han utilizado mallas estructuradas distorsionadas aleatoriamente, cada coordenada de los puntos de discretización interiores del dominio sufre un corrimiento entre 0 y  $.2h$  ( $h$ : distancia entre puntos de discretización de la malla estructurada original). Como aproximación a la norma  $L_2$  del error se utilizó la siguiente expresión

$$e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_p} (u_i - \hat{u}_i)^2}{n_p}}$$

La fig. 7.a muestra, en escala logarítmica, la gráfica de h-e, donde puede observarse el orden de convergencia (entre 1.5 y 2). En la fig. 7. b se observa una gráfica de la solución obtenida para  $h=.5$  ( $n_p=171$ ) mediante el método de puntos finitos.

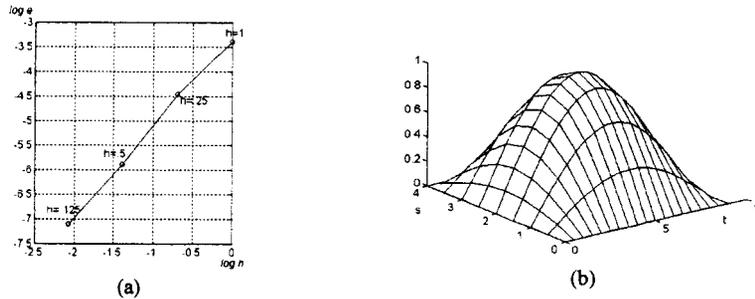


fig.7.(a) distancia entre puntos versus error, escala logarítmica; (b) solución obtenida mediante MPF ( $h=.5$ )

## 5. CONCLUSIONES

Además de obtener soluciones trabajando sobre discretizaciones irregulares, el método no requiere de conectividades ni existen problemas de elementos distorsionados como en MEF. Esto facilita el remallado y o el refinamiento en zonas del dominio donde se lo requiera para una mejor aproximación. Otra ventaja es la facilidad con que se puede reprogramar para obtener un orden de aproximación mayor.

Por otro lado quedan por resolverse problemas como el criterio de selección de las nubes que puede relacionarse con la generación de los puntos. Durante el desarrollo de este trabajo se ha observado que distribuciones de puntos cuyo gradientes de densidad varien bruscamente, son desfavorables para la aplicación del método. Aunque esto puede solucionarse con el agregado de más puntos que permitan una variación suave del mismo gradiente.

## 6. REFERENCIAS

- [1] Oñate, E., Idelsohn S., Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., *A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow*, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 39, 3839 (1996).
- [2] Taylor, R. L., Zienkiewicz, O. C., Oñate, E., Idelsohn S., *Moving least square approximations for the solution of differential equations*, Research Report n° 74, CIMNE, Barcelona. Diciembre 1995.
- [3] Lancaster, P, Salkauskas, K, *Curve and surface fitting, an introduction*, Academic Press, London, 1986.
- [4] Salman, H, *Potential solution of lifting aerofoils using the finite point method*, Research Report n° IT-213, CIMNE, Barcelona, Junio 1996.
- [5] Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C., Sacco, C., *Un método de puntos finitos en mecánica computacional*, III Congreso Métodos numéricos en ingeniería vol. 2, SEMNI, Mayo 1996.
- [6] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., *El método de los elementos finitos*, Mc Graw Hill, Madrid, 1994.