

**EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS  
APLICADO A LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

Agüero, A.C.: Actis, F.A  
CIMM - Centro Regional Multipropósito Córdoba - INTI  
Av. Vélez Sársfield 1561- C.C. Central 884  
(5000) Córdoba - Argentina  
Tel.: (+54) (051) 60-1334; Fax: (+54) (051) 69-9459; E-mail: adrian.factis@cimm.org.ar

**RESUMEN**

El Método de Elementos Finitos (MEF) se ha impuesto desde hace algunos años, como una de las herramientas más poderosas, utilizadas en la determinación de las distribuciones de campos electromagnéticos en dispositivos y sistemas eléctricos. En este trabajo se realiza una revisión de los modelos y métodos computacionales para análisis en la ingeniería eléctrica. Se presentará una clasificación de los programas electromagnéticos y sus aplicaciones más importantes. Además, a modo de ejemplo, se presentan trabajos de ingeniería integrada desarrollados en el Centro de Investigación de Materiales y Metrología (C.I.M.M.), en el área de diseño de motores eléctricos con imanes permanentes, motores monofásicos, prensa hidráulica bajo campo magnético para la producción de imanes permanentes y soporte magnético para odontología. Por último se citan las conferencias internacionales más prestigiosas en el tema, la sociedad que los vincula y los programas de cooperación vigentes en Latinoamérica y la Comunidad Europea con las perspectivas futuras en este campo.

**ABSTRACT**

The Finite Element Method (FEM) has emerged in the past decade as a powerful tool, applied in the analysis of magnetic fields in various electrical devices and systems. This work presents a review of the computational methods applied in electrical engineering. Examples of concurrent engineering studies conducted at CIMM (Materials and Metrology Research Center) in permanent magnet electric motors, magnetic press for production of permanent magnets and magnetic attachment implant. Finally a comment is made about international conferences, societies and cooperation programs currently undertaken in Latinamerica and Europe.

**INTRODUCCIÓN**

Los elementos finitos se han considerado como un método numérico para diseños eléctricos, evaluación de performance, y optimización de dispositivos en aplicaciones de bajas frecuencias para la ingeniería eléctrica. En las últimas dos décadas, se han desarrollado muchas variantes del método de elementos finitos y han sido aplicado con éxito a máquinas eléctricas rotativas, transformadores, motores con imanes permanentes, generadores de potencia y equipos de transmisión. Se discutirán algunos trabajos realizados en el CIMM y se harán consideraciones sobre las tendencias futuras en el modelado por los mismos.

Las técnicas numéricas han sido largamente reconocidas como métodos prácticos y precisos en el campo de la computación para ayudar en diseños eléctricos. Los precursores del método de elementos finitos son las técnicas de diferencias finitas y ecuaciones integrales. Aún cuando todos estos métodos han sido usados directamente o en combinación con otros métodos para diseñar, los elementos finitos han emergido como una técnica apropiada para aplicaciones en bajas frecuencias.

Un trabajo que marcó la aplicación del MEF a la ingeniería eléctrica fue desarrollado por Silverter y Chari en 1970 [1]. A partir de entonces, una serie de investigadores ha orientado sus esfuerzos a su aplicación a la resolución de problemas de la ingeniería eléctrica. Si bien las ecuaciones de Maxwell describen completamente los fenómenos electromagnéticos, su solución analítica es impracticable en geometrías complejas. Una alternativa es utilizar el método de cálculo numérico para obtener una solución aproximada.

Así, un amplio espectro de métodos computacionales han sido usados en el transcurso de los años para el análisis y diseño eléctrico de aparatos de potencia. El método de diferencia finita y las ecuaciones de integral de volumen fueron las primeras herramientas empleadas en los problemas de máquinas eléctricas, electrostáticas y corrientes de eddy. En los últimos 20 años, el MEF ha sido la elección para la mayoría de las aplicaciones.

El cálculo de campos electromagnéticos dependen completamente de la habilidad para resolver las ecuaciones de Maxwell. Las cuatro ecuaciones de Maxwell establecidas en 1860, son en la mayoría de los casos muy generales.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \dot{\vec{D}} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho\end{aligned}\tag{1}$$

El comportamiento de los campos electromagnéticos en dos dimensiones y en coordenadas cartesianas está representado como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -(J_o + J_e)\tag{2}$$

donde:

A es el vector potencial magnético

$\nu$  es la reluctancia

$J_o$  es la densidad de corriente de excitación

$J_e$  es la densidad de corriente de eddy

### ELECCIÓN DE POTENCIAL

Para los problemas de los campos magnéticos estáticos, las fórmulas de Maxwell pueden ser reducidas a la ecuación de Poisson o, como un caso muy especial, a la ecuación de Laplace. Esto implica la introducción de un vector o un escalar potencial.

La mayoría de los métodos numéricos para resolver los problemas de campos magnéticos tiene como solución a la ecuación

$$\nabla^2 A = -\mu_o j\tag{3}$$

donde  $A$  es el vector magnético potencial definido como  $\text{div } A = 0$  y  $B = \text{curl } A$ .

Esta ecuación diferencial elíptica parcial puede ser resuelta analíticamente para unas pocas condiciones de borde; para algunos, no son muy complicados. A primera vista, las soluciones analíticas no están disponibles. Una mayor complicación puede sobrevenir por la presencia de materiales ferromagnéticos, caracterizados por su permeabilidad relativa  $\mu_r$ , altamente no lineal en función de la inducción a la que está expuesta. Para empeorar las cosas la permeabilidad relativa puede ser direccionalmente anisotrópica. Cuando están ausentes los conductores que llevan corriente, el escalar potencial magnético  $\Omega$  es algunas veces usado en lugar del vector potencial. Por medio de la aplicación de un potencial adicional también es posible tener en cuenta la excitación de las corrientes, en cuyo caso se resuelve por un supuesto potencial total y un potencial reducido: el último es tomado para regiones que incluyen corrientes. Podría parecer que la elección de potenciales es una decisión importante al comienzo del desarrollo de un método de solución. Sin embargo, desde que los sistemas de ecuaciones para los potenciales son de caracteres similares, especialmente para los problemas estáticos, algunos programas aun pueden permitir la libre elección entre vector y potencial escalar. Es solamente en las fases de aplicación de las condiciones de borde y la interpretación de resultados, por ejemplo cuando se forman las derivadas del potencial, que las correspondientes diferencias deben ser respetadas.

## APLICACIONES

Detallaremos varios trabajos desarrollados en el CIMM para mostrar el campo de aplicación del MEF en electromagnetismo.

En primer lugar se presenta comportamiento de un motor monofásico con espira de sombra de uso en la industria de electrodomésticos, para determinar las variables de diseño tales como las corrientes inducidas en el rotor en cortocircuito y en las espiras de sombra, empleando el método de análisis de circuitos magnéticos por medio de elementos finitos en dos dimensiones.

Primero se realizó un estudio de variación en el tiempo y luego un análisis magnetoestático para un modelado completo de la máquina [2-4].

Se analiza la distribución de la densidad de flujo  $B$ , para la región entre las expansiones polares y en el estator que forma parte del circuito magnético. También se efectúa un cálculo de cupla para evaluar la performance del motor. La comparación entre la simulación con los resultados experimentales, obtenidos en un banco de prueba para motores eléctricos, nos da un error del 2%. La figura 1 indica la distribución de la densidad de flujo  $B$  y su módulo. El estator del motor está formado por un paquete de chapas de acero de bajo carbono laminadas en frío y el rotor es una jaula de ardilla formada por aluminio inyectado. Tiene dos bobinados conectados en serie y alojados en las expansiones polares.

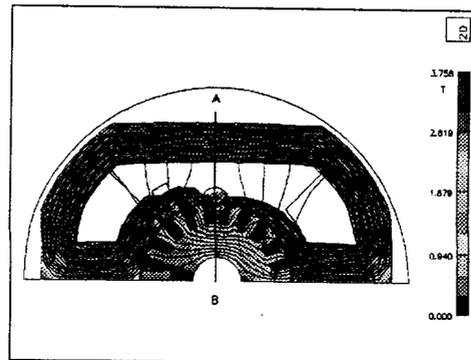


Figura 1: Análisis magnetoestático de un motor monofásico con espira de sombra  
Distribución de la densidad de flujo  $B$

El siguiente trabajo consiste en modelar un motor de 30 W de potencia, para una bomba de agua usando el MEF. Es un motor de histéresis que es una alternativa de un motor sincrónico. El rotor está formado por un cilindro de superficie lisa siendo el material un imán permanente con un lazo de histéresis ancho sin la necesidad de realizar ranuras con las correspondientes bobinas. El estator es bobinado y es indispensable para suministrar un flujo radial rotacional, idealmente distribuido en forma senoidal. El rotor toma el mismo número de polos que el estator. El motor de histéresis desarrolla cupla porque la densidad de flujo magnético arrastra a la corriente magnetizante un ángulo, debido esto a la relación no lineal entre B y H en los materiales magnéticos. Como los materiales magnéticos blandos tienen una pérdida de histéresis baja, el ángulo sería cero y no se desarrollaría cupla efectiva.

La calidad de la distribución del campo es importante para mantener las pérdidas del hierro bajas. En correspondencia a la componente fundamental del campo rotante producida por la corriente del estator, el flujo que se emana desde o entra a la superficie del rotor, se desfasa (en el espacio) detrás del eje de la intensidad de campo radial  $H_r$ , debido a las bobinas del estator. El ángulo del desfase es constante y provee una densidad de flujo pico constante, así el ángulo  $\delta$  depende meramente del lazo de histéresis del rotor y es independiente de la razón de cambio o velocidad a la cual el lazo se recorrió.

Si el rotor gira a una velocidad por debajo de la velocidad sincrónica, cada partícula del rotor está sujeta a un ciclo de histéresis repetitivo a la frecuencia de deslizamiento.

La pérdida de histéresis es proporcional al deslizamiento y el motor exhibe el único rasgo de desarrollar cupla en forma independiente al deslizamiento desde el estado de reposo hasta la velocidad sincrónica.

Usa materiales magnéticos duros, de coercitividad media y debe remarcarse que los amperes-vueltas del estator son necesarios para manejar el material del rotor a través del lazo completo de histéresis. Este tipo de motores encuentra una amplia aplicación en equipos registradores, relojes y en general donde se necesita una velocidad constante con una operación tranquila.

Este motor tiene una cupla de arranque alta y puede sincronizar cargas inerciales grandes sin equipos auxiliares de arranque. Las atractivas características de performance del motor de histéresis se balancean con el alto costo y dificultades en el mecanizado del material con que esta formado el rotor, es decir el imán permanente [5-6].

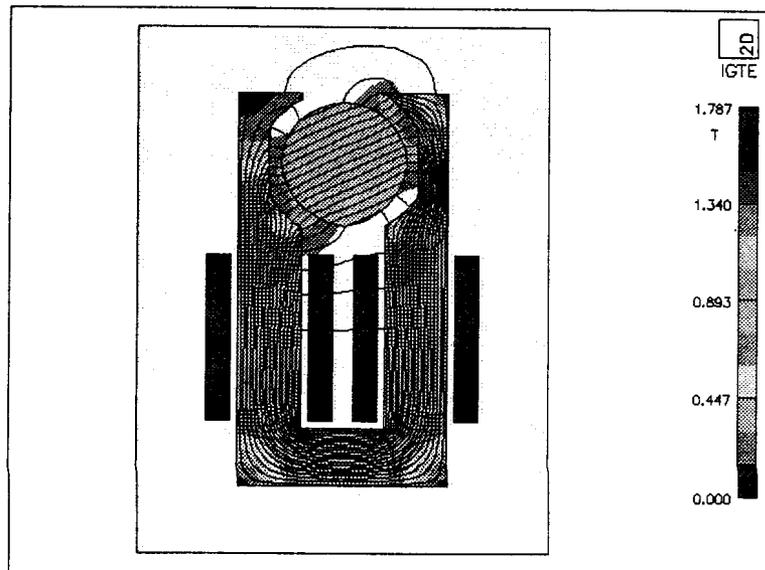


Figura 2: Distribución de la densidad de flujo B en un motor sincrónico

Un factor tecnológico importante en la obtención de los imanes permanentes de Neodimio-hierro-boro de alto producto de energía, es el conformado bajo campo magnético para producir cuerpos en verde con alto grado de orientación que luego de la sinterización y magnetización alcanzan remanencias elevadas. En este trabajo se diseñó la bobina y el sistema de alineación utilizando una solución analítica y el MEF. Se verificó la creación de un campo magnético de 1280 kA/m, dentro de la cavidad de la matriz. Empleando un sensor Hall se comprobó que la diferencia en el campo era de sólo 1,25 % [7-9]. La figura 3 nos muestra la distribución del campo entre los dos pistones de la prensa y la bobina de premagnetización que conduce una corriente de 1000 A con 20 V de corriente continua.

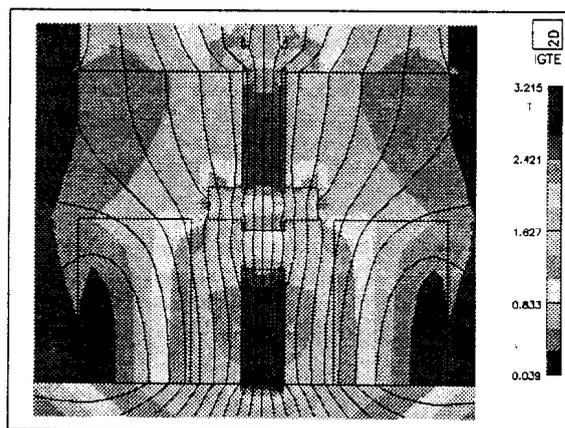


Figura 3: Orientación de polvos magnéticos para imanes permanentes

Otro trabajo fue el diseño de un dispositivo magnético capaz de actuar como medio de fijación de prótesis odontológicas. Está formado por un imán permanente fijado a la sobredentadura y un poste de material ferromagnético que puede ser fijo o desmontable denominado "keeper". De esta manera, se cierra el flujo magnético (Figura 4) entre el imán y el keeper fijando la prótesis a la encía. La fuerza es del orden de 350 gr. fuerza. A este par de elementos se los conoce como unidad de retención magnética. Se obtuvo un diseño con las menores dimensiones y la fuerza necesaria para la adhesión magnética.

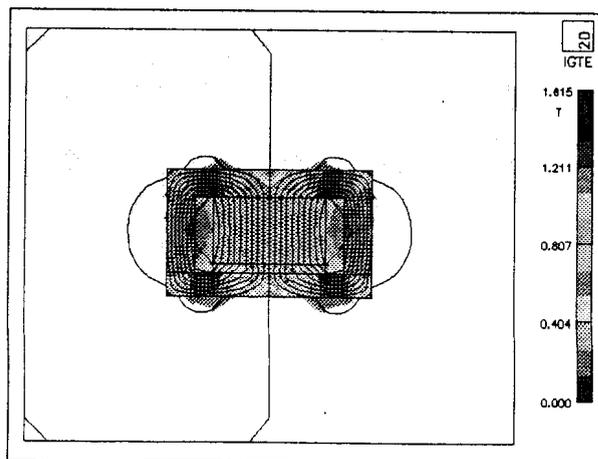


Figura 4: Medio de fijación de prótesis odontológicas

### COMUNIDAD DE ELECTROMAGNETISMO INTERNACIONAL

La comunidad de electromagnetismo computacional se ha convertido en un grupo fuerte y con inventiva. Los trabajos publicados demuestran que hay una amplia interacción entre los grupos de universidades, industrias y laboratorios de investigación y que esto ha conducido a un profundo entendimiento de como modelar e implementar procedimientos computacionales robustos. La Sociedad Internacional Compumag (ICS) es la organizadora de la conferencia Compumag la cual comenzó en 1976. El principal objetivo de ésta serie de conferencias es analizar los recientes desarrollos en computación numérica de campos electromagnéticos que son de interés a físicos e ingenieros comprometidos con el diseño de dispositivos electromagnéticos. Hasta ahora se han venido realizando diez conferencias, seis en Europa, tres en USA y una en Japón. El próximo encuentro se realizará en Río de Janeiro, en noviembre de 1997. Algunos detalles de los lugares, y estadísticas de los proceedings y papers se muestran en la Tabla I. Desde el comienzo, el comité directivo insistió en evitar las sesiones paralelas para permitir a los delegados involucrarse en todos los aspectos de la conferencia. Sin embargo desde Genova (1983), se incluyeron sesiones con posters las cuales resultaron muy exitosas. La Tabla II da algunas estadísticas de los papers publicados y tópicos científicos en que se trabajan.

Tabla I: Estadísticas de la Compumag

Fecha	Lugar	Días	Oral	Poster	Papers publicados	Número de delegados
Abril 76	Oxford, UK	3	65	-	67	213
Sept. 78	Grenoble, Francia	3	45	-	60	181
Sept. 81	Chicago, USA	4	83	-	76	153
Mayo 83	Genoa, Italia	4	64	44	98	174
Junio 85	Ft. Collins, USA	4	72	62	106	172
Agos. 87	Graz, Austria	4	58	103	143	232
Sept. 89	Tokio, Japón	4	59	162	177	306
Julio 91	Sorrento, Italia	4	46	178	193	322
Nov. 93	Miami, USA	4	29	273	225	357
Julio 95	Berlin, Alemania	4	25	332	263	385

La otra serie de conferencias internacionales es la Computational Electromagnetic Field Conference (CEFC) esponsorizada por la IEEE, la cual tuvo su origen en el encuentro anual de usuarios de la GFUN juntamente con el inicio de los laboratorios Rutherford y Argonne al comienzo de 1980. Después del encuentro que organizó la A. O. Smith Corp. en Milwaukee en 1982 se decidió extender el alcance para lograr una conferencia en CMU Pittsburgh en 1984. Han habido seis encuentros y el último fue en Okayama en 1996 y el próximo tendrá lugar en la Universidad de Arizona en 1998.

La ICS hizo recientemente una encuesta entre sus miembros para estimar que temas de investigación les resultan más interesantes. La Figura 5 muestra algunos de estos resultados donde las áreas de los campos estáticos y campos de LF son aún los dominantes, aunque las áreas de HF y EMC están incrementando su popularidad. Hay una clara distinción entre el núcleo de los temas como los métodos de solución (por ejemplo las técnicas de análisis numéricas, modeladores geométricos, mallas, análisis de error, etc.), metodología de software (GUI, base de datos, KB, AI, concurrencia, etc.), frecuencia (estáticos, LF, HF, y modelado de materiales, etc.) y el área de aplicaciones.

Los Workshops han sido también cruciales para el desarrollo de los temas por que son un medio de discusión e interacción a un nivel donde las fallas así como los aciertos pueden ser apropiadamente discutidos. Un gran número de estos encuentros han tenido lugar. Al comienzo de 1960 lo organizó la Universidad de Reno, el laboratorio Rutherford a fines de 1970 y a comienzo de los 80 y más recientemente

Tabla II: Número de papers publicados sobre cada tema

Tema	Conf.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
1 Campos estáticos	76	78	81	83	85	87	89	91	93	95		189
2 Campos variables en el tiempo	31	22	26	30	33	35	26	33	34	30		300
3 Ondas y EMC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	29	40	69
4 Optimización y análisis	0	2	2	0	0	6	9	20	16	36		91
5 Modelado de material	6	2	7	7	6	6	5	5	11	20		75
6 Problemas acoplados	0	0	1	3	2	13	12	15	35	30		111
7 Métodos numéricos	0	3	6	11	14	13	36	39	20	27		169
8 Metodología en software	2	5	3	9	9	20	21	12	17	13		111
9 Fuerzas de aplicación, etc.	4	7	14	20	27	37	52	52	36	42		291
Total	65	60	76	98	106	143	177	193	225	263		1406

un simposio IGTE en Graz han sido todos particularmente exitosos. Un evento muy importante que ha comenzado a asociarse con las conferencias son los workshops sobre Métodos de Testeo de Análisis Electromagnético (TEAM). Esta actividad comenzó con la fusión de la comunidad magnética en USA quien identificó que el incremento en el uso de soluciones computacionales necesita validación experimental. Se han realizado workshops internacionales junto con la Compumag desde 1985 y otros workshops regionales entre medio [10].

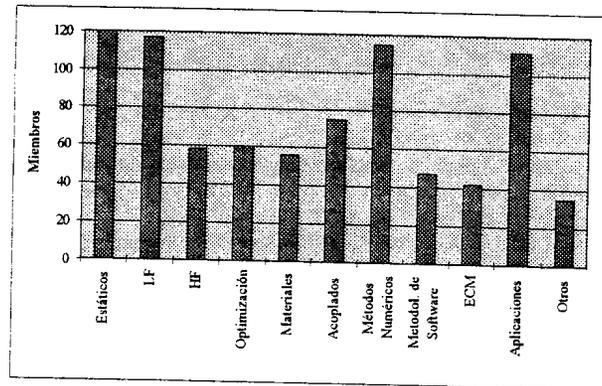


Figura 5: Estudio de la ICS de temas técnicos de interés para sus miembros

El área de electromagnetismo en Brasil vive un momento muy productivo, con varios grupos de investigación, desarrollando trabajos a nivel internacional, con una sólida base académica en diversas universidades del país, con muchas industrias utilizando el soporte científico y técnico que sale de las mismas. La historia de este desarrollo puede ser trazada por la organización de varios eventos que reunieron a la comunidad que actúa en el área. En 1987, se organizó en Florianópolis el 1º Simposio Franco-Brasileño sobre Cálculo de Campos Eléctricos y Magnéticos. En 1989 fue el segundo evento en San Pablo y en 1992 se organizó en Belo Horizonte un congreso similar llamado "Congreso Brasileiro de

Electromagnetismo Aplicado". Por lo anterior y el respeto mundial ganado, se le concedió la organización del congreso Compumag en este año. Así, con el crecimiento en esta área y las múltiples actividades de intercambio entre universidades y empresas, se creó y formalizó una sociedad científica que nació el 10 de junio de 1994 y se llama Sociedad Brasileira de Electromagnetismo, SBMAG. Cuenta con 200 socios y ya organizó dos congresos: en mayo de 1995 en Florianópolis y en noviembre de 1996 en Ouro Preto.

En nuestro país, en diciembre de 1993 se realizó el Workshop Latinoamericano sobre Materiales Avanzados y en mayo de 1995 el Primer Taller Argentino sobre Materiales Magnéticos y sus Aplicaciones. En ambos eventos, que tuvieron lugar en Córdoba, los grupos nacionales que presentaron contribuciones sobre MEF orientado a fenómenos electromagnéticos fueron el CINI, la empresa IMPSA y el CIMM.

### CONCLUSIONES

Una breve descripción del MEF y su especialización a baja frecuencia en aplicaciones eléctricas ha sido presentado. Los gráficos de distribución de campo en varios ejemplos han sido mostrados. Muchos programas existen o están bajo desarrollo en universidades, centros de investigaciones o dentro de grandes compañías electrotécnicas y en firmas comerciales. En argentina la actividad es incipiente.

### REFERENCIAS

- [1] Silvester, P.P., Chari, M.V., "Finite Element solution of Saturable Magnetic Field Problems", IEEE Trans. Power Appl. & Sys., PAS-89(7), pp. 1642-1651, 1970.
- [2] Agüero, A.C.; Roberi, J.; Ranciglio, R.; Knudsen, F. "Análisis de la Influencia del corte de una porción en los polos salientes de un motor monofásico con espira de sombra", I Taller Argentino de Materiales Magnéticos y sus Aplicaciones, Córdoba, 17 al 20 de Mayo de 1995, pág. 159-167
- [3] Agüero, A.C.; "Análisis del campo magnético en un motor monofásico con espira de sombra", publicado en el 9<sup>no</sup> Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, S.C. de Bariloche, 6 al 10 de Noviembre de 1995, pág. 43-52.
- [4] Agüero, A.C.; "Magnetic Field Analysis in a shaded-pole single-phase induction motor", 2<sup>do</sup> Congreso Brasileiro de Electromagnetismo, Ouro Preto, Brasil, 24 al 27 de Noviembre de 1996, pág. 69-72.
- [5] Electric Machinery" by A.E. Fitzgerald, Charles Kingsley, Stephen Umans; Fifth Edition; 1992; pag. 499-500.
- [6] "Electrical Machines and Drive Systems" by C. B. Gray; 1989; pag. 424-426.
- [7] Actis, F.A.; Cohen, G.B.; Agüero, A.C.; Moyano, H.R.; Portela, M. "Desarrollo de Imanes de Nd-Fe-B Sinterizados. Parte I: Estudio de la Influencia de la Composición y los Parámetros de Sinterización en la Densificación y la Remanencia de Imanes de Nd-Fe-B". II Jornadas Argentinas de Ciencia de los Materiales, INIFTA, La Plata, Octubre de 1993, pág. 69-72.
- [8] Actis, F.A.; Agüero, A.C.; Cohen, G.B.; Moyano, H.R.; Portela, M. "Desarrollo de Imanes de Nd-Fe-B Sinterizados. Parte II: Imanes de Alto Producto de Energía, Alta Temperatura de Curie o Alta Coercitividad Mediante la Incorporación Selectiva de Aditivos y el Empleo de Altos Campos de Orientación". II Jornadas Argentinas de Ciencia de los Materiales. INIFTA, La Plata, Octubre de 1993, pág. 73-76.
- [9] Agüero, A.C.; Actis, F.A.; Moyano, H.R.; Bessler, D.; "Sistema de Orientación de Polvos Magnéticos para Imanes de NdFeB". IV Seminario de Materiais Magnéticos e Eléctricos, Associação Brasileira de Metales, Rio de Janeiro, Brasil, 27 al 29 de Abril de 1994, pág. 223-240.
- [10] Trowbridge, C.W., "Computing Electromagnetic Fields for Research and Industry: major achievement and future trends", IEEE Mag. Trans, Vol 32 n° 3, pp. 627-630, May 1996.