

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ESCALAS MÚLTIPLES (E.M.) A LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES NO LINEALES DE UNA MEMBRANA POR ELEMENTOS FINITOS (E.F.).

Ricardo T. Ferreyra, Carlos A. Prato.
Departamento de Estructuras
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
Universidad Nacional de Córdoba.
Vélez Sarfield 1601. 5000 Córdoba, Argentina.

RESUMEN:

Se presenta la solución para regímenes estacionario y transitorio de una membrana por elementos finitos (E.F.) con no linealidades cúbicas. Es aplicado el método de escalas múltiples de primer orden a los casos de excitación modulada de tipo periódica de baja y alta frecuencia y excitación impulsiva. Posteriormente se muestra la dependencia de la respuesta no lineal con la existencia de combinaciones resonantes. Finalmente se estudia la presencia de resonancias internas y su repercusión en la respuesta no lineal.

ABSTRACT :

The solution for stationary and transitory states of a membrane by finite elements with cubic nonlinearities is presented. The method of multiple scales of the first order in the cases of amplitude modulated periodic excitation of low and high frequencies and impulsive excitation is applied. The existence of resonant combinations, showing the dependence of the nonlinear response is considered subsequently. The presence of internal resonances and their repercussion in the nonlinear answer is studied finally.

INTRODUCCIÓN :

Se obtendrá la respuesta de una membrana por elementos finitos (E.F.) aplicando el método de escalas múltiples (E.M.), en su versión de expansión de derivadas [1]. Serán aplicadas excitaciones del tipo campana en las formas periódica de alta y baja frecuencia, y también excitación impulsiva. Las soluciones tendrán validez para regímenes transitorio y estacionario. De la comparación con la respuesta lineal exacta (L.E.), se extraerán algunas observaciones referidas a particularidades de (E.M.) para aproximaciones de primer orden con esa clase de carga. En referencia [2] se explica la importancia de realizar un análisis no lineal cuando se está aplicando una excitación multifrecuencia, debido a la presencia de alguna combinación resonante. Se observará además que, la respuesta no lineal depende de los valores de las frecuencias aplicadas.

Otro objetivo, es determinar los modos presentes en la respuesta no lineal, después de incorporarse en la formulación los términos de la totalidad de combinaciones lineales de uno de los patrones de resonancia interna.

MODELO :

Se trata de una membrana de dieciséis grados de libertad discretizada por elementos finitos (E.F.) [3] y [4], usando elementos rectangulares de cuatro nodos. El material es elástico lineal homogéneo e isótropo. El amortiguamiento es viscoso de matriz diagonalizable. Presenta no linealidad geométrica debida a grandes rotaciones en el plano medio, lo cual origina fuerzas restaurativas que dependen de desplazamientos al cubo. La excitación es multifrecuencia de 5 términos, periódica o del tipo pulsante, con forma de campana en alguno de los casos considerados. Dos situaciones distintas se tratan : excitación fuerte no resonante y combinación resonante del tipo $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = \epsilon \sigma \epsilon t + w(ns)$. Se incluyen en el análisis no lineal la totalidad de modos naturales de la estructura, pero sólo se consideran las resonancias internas de la forma $-w(\alpha) - w(\beta) + w(\gamma) + w(\delta) = \epsilon \sigma_2$.

ECUACIONES :

Una vez discretizada la membrana por (E.F.), se llega al sistema de ecuaciones diferenciales no lineales siguiente :

$$M^{ij} \ddot{X}^j + C^{ij} \dot{X}^j + \alpha_1^{ij} X^j + \alpha_3^{ijkl} X^j X^k X^l = F^i(t) \quad (1)$$

que en coordenadas modales toma la forma :

$$\ddot{\Psi}_n + 2\mu_n \dot{\Psi}_n + w_n^2 \Psi_n + \Gamma_{nmpq} \Psi_m \Psi_p \Psi_q = F_n(t) \quad (2)$$

ADIMENSIONALIZACIÓN :

Tomando como magnitudes características X_0 y W_0 de amplitud y frecuencia angular, siendo ellas elegidas como el ancho de la membrana y la primer frecuencia natural respectivamente, y agrupando términos, las ecuaciones en forma adimensional se pueden escribir :

$$\ddot{\Psi}_n + w_n^2 \Psi_n = - \epsilon [2\mu_n \dot{\Psi}_n + \Gamma_{nmpq} \Psi_m \Psi_p \Psi_q] + F_n(t) \quad (3)$$

donde ϵ , es el parámetro de perturbación, que agrupa los términos de amortiguamiento y rigidez cúbica que tienen el mismo orden en el modelo [5].

EJEMPLO NUMÉRICO :

El valor del parámetro de perturbación, las frecuencias naturales, el vector de amortiguamiento, y el tensor de rigidez cúbica de cuarto orden de las ecuaciones (3), se obtienen a partir de los datos de la siguiente Tabla :

Tabla I. Valores numéricos : geometría y material.

a (ancho)	2.6 m.
b (largo)	2.01 m.
h (espesor)	0.01 m.
ρ (densidad)	2690 Kg/m ³
E (mod. elast.)	68.6 x 10 ⁹ N/m ²
γ (coef. Poisson)	0.3 adimensional
ξ (coef. amortig.)	0.1 adimensional
ϵ (parámetro de perturbación)	0.1

Respuestas a excitaciones periódica de alta y baja frecuencia, e impulsiva :

Se aplica a la membrana una excitación fuerte no resonante del tipo campana periódica que no produce resonancias secundarias ni combinaciones resonantes (C.R.). Se hace que la frecuencia de excitación de menor valor, sea más grande que la frecuencia natural máxima. El período adimensional de la excitación es de esta forma pequeño e igual a 0.000299. Los valores numéricos de cada uno de los cinco términos se encuentran en Tabla II y su grafo en Figura 1 :

Tabla II. Amplitudes, frecuencias, y fases de cada término de la excitación periódica de alta frecuencia.

	1	2	3	4	5
$K(i)$	500.0000	250.0000	250.0000	500.0000	500.0000
$\Omega(i)$	209877.0	230864.7	188889.3	0.000000	20987.70
$\theta(i)$	0.000000	3.141593	3.141593	0.000000	3.141593

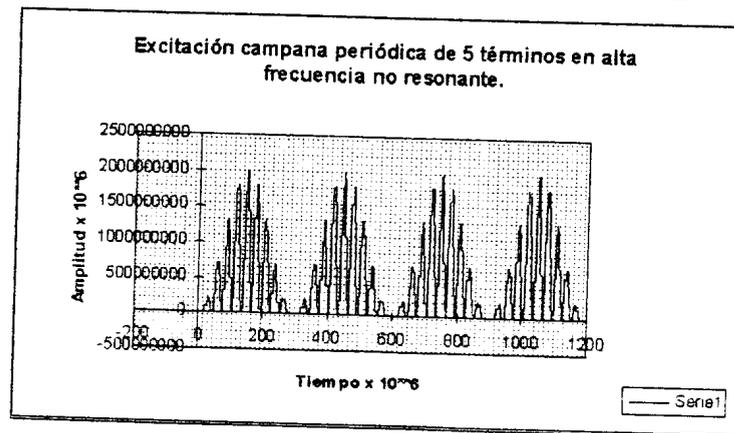


Figura 1 : Excitación campana periódica de alta frecuencia.

En las siguientes dos figuras se observa que en ambos regímenes, las respuestas L.E. y por E.M. son, en los gráficos, coincidentes. La diferencia numérica es pequeña. Para obtener la Figura 2, se tomaron condiciones iniciales no nulas.

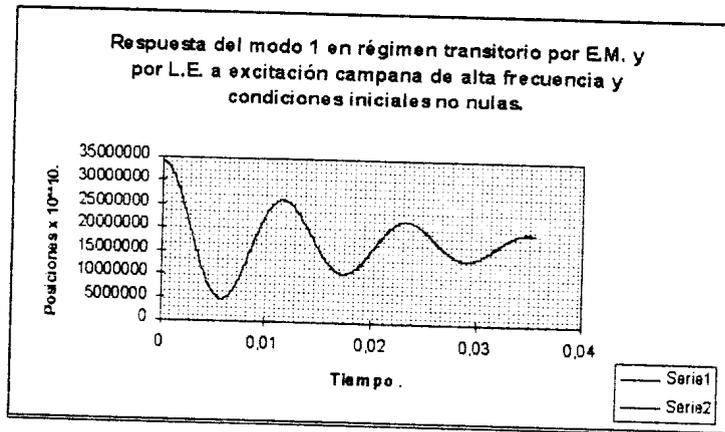


Figura 2 : Respuesta del modo 1 para régimen transitorio por E.M. y L.E.

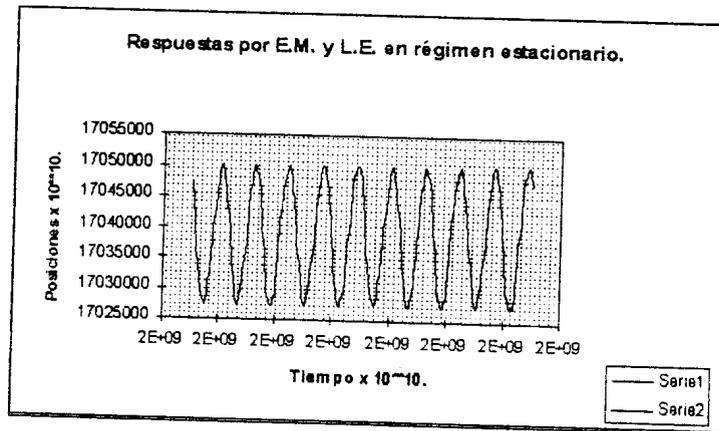


Figura 3 : Respuesta del modo 1 para régimen estacionario por E.M. y L.E.

En la última figura, el ancho de la base de cada pico, es el mismo que el de cada campana de la excitación. Las frecuencias más altas no aparecen visiblemente en ella. Manteniendo los mismos valores numéricos de Tabla II, pero tomando sólo el intervalo (0,0 ; 0,000299), es decir la primer campana, la excitación es de carácter impulsivo :

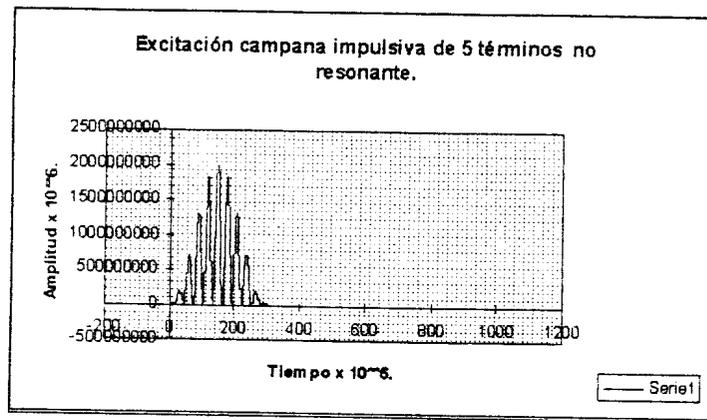


Figura 4 : Excitación impulsiva de amplitud modulada.

La respuesta del modo 1 por E.M. es muy parecida a la respuesta L.E. cuando está aplicada la excitación impulsiva anterior, lo cual se observa en Figura 5:

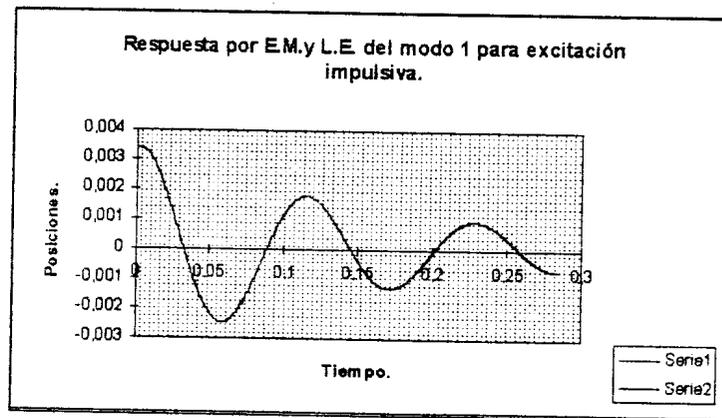


Figura 5 : Respuesta del modo 1 a excitación impulsiva.

Ahora aplicamos una excitación periódica de la misma forma de la que está en Figura 2, pero con frecuencias levemente menores a las naturales del sistema. Los valores están en la siguiente tabla :

Tabla III. Amplitudes, frecuencias, y fases de cada término de la excitación periódica que produce una combinación resonante.

	1	2	3	4	5
$K(i)$	4333.564	2166.782	2166.782	4333.564	4333.564
$\Omega(i)$	182.2373	200.461	164.0135	0.000000	18.22373
$\theta(i)$	0.000000	3.141593	3.141593	0.000000	3.141593

La respuesta es prácticamente coincidente para E.M., L.E. y Runge Kutta R.K. No se reconoce bajo este tipo particular de excitación, el beneficio de obtener una respuesta no lineal. Los resultados se ven en Figura 6.

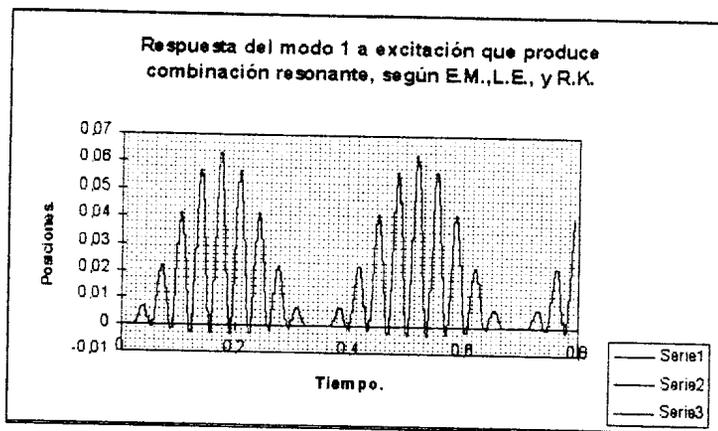


Figura 6 : Respuesta del modo 1 a excitación periódica que satisface combinación resonante por E.M., R.K., y L.E.

Respuesta no lineal y respuesta linealizada. Influencia del valor de frecuencias y fases intervinientes en la carga aplicada, cuando existen combinaciones resonantes de la forma $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = \epsilon \cdot \sigma_{ext} + w(ns)$.

Al examinar la diferencia entre las respuestas no lineal y linealizada con los valores de Tabla IV, los cuales no conservan la forma de campana que tenían las anteriores excitaciones, pero mantienen la misma condición resonante, se tiene :

Tabla IV. Amplitudes, frecuencias, y fases de cada término de la excitación periódica que produce una combinación resonante.

	1	2	3	4	5
$K(i)$	92520.53	92520.53	92520.53	92520.53	0.00000
$\Omega(i)$	54171180	54171180	438.3694	438.3694	0.00000
$\theta(i)$	0.000100	3.141593	-1.047147	2.071451	0.00000

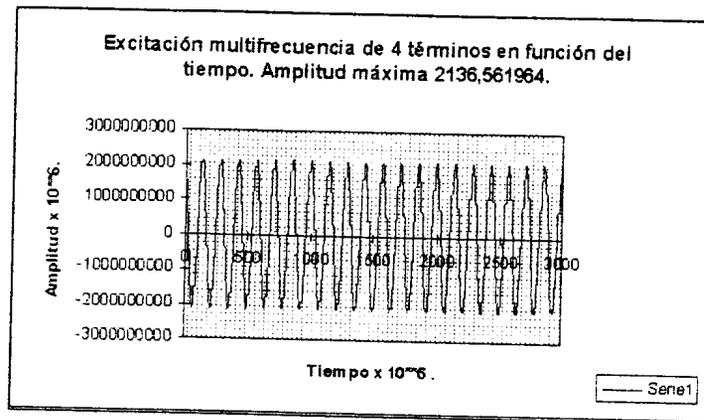


Figura 7 : Excitación periódica multifrecuencia que satisface combinación resonante.

El siguiente cuadro muestra la respuesta de la membrana a la excitación multifrecuencia de 4 términos del gráfico anterior, cuando la formulación por E.M. ha sido linealizada :

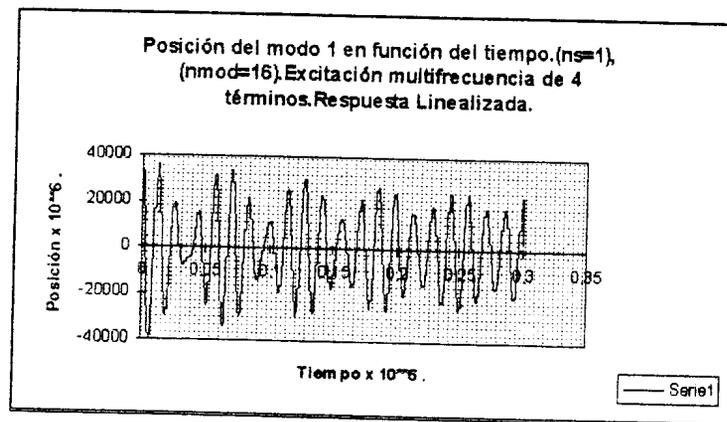


Figura 8 : Respuesta linealizada del modo 1 a excitación de Tabla IV que produce combinación resonante.

La respuesta no lineal por E.M., en cambio, tiene una amplitud aproximadamente cuatro veces mayor para el intervalo correspondiente a régimen estacionario:

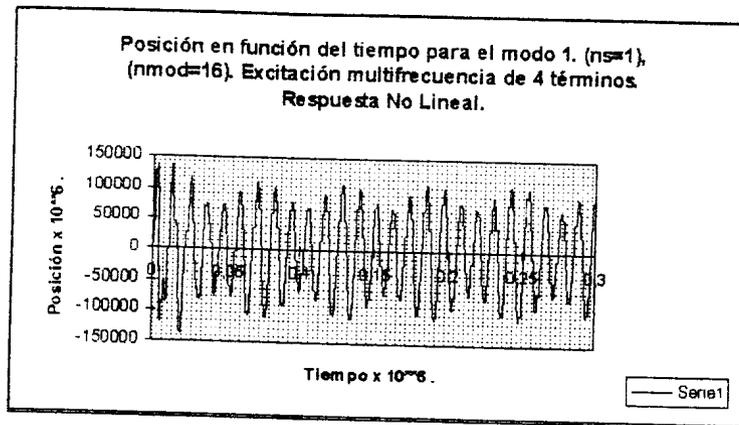


Figura 9 : Respuesta no lineal por E.M. del modo 1 a excitación de Tabla IV que produce combinación resonante.

Esta respuesta representa mejor el movimiento real, y justifica el tratamiento no lineal. En su obtención, fue incluida la combinación resonante dentro de la formulación. Formalmente la inclusión implica el agregado de dos términos en las ecuaciones que gobiernan la amplitud y fase. Uno de la forma de una excitación primaria de frecuencia $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ y de amplitud sk , y otro constante.

Si formamos una nueva excitación, modificando las frecuencias y las fases, pero manteniendo constantes el valor sk , y la condición $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = \epsilon \cdot \sigma \epsilon x t + w(n_s)$, se tiene la Tabla V. Luego de aplicar la excitación nueva, se observa un crecimiento de importancia en la amplitud de la respuesta no lineal. La tabla y los gráficos que ilustran lo mencionado, se ven a continuación.

Tabla V. Excitación periódica que resulta de modificar frecuencias y fases de la tabla anterior.

	1	2	3	4	5
$K(i)$	117756.9	117756.9	117756.9	117756.9	0.00000
$\Omega(i)$	182,2373	182.2373	182.2373	182.2373	0.00000
$\theta(i)$	0.00001	3.10000	1.550796	-1.560796	0.00000

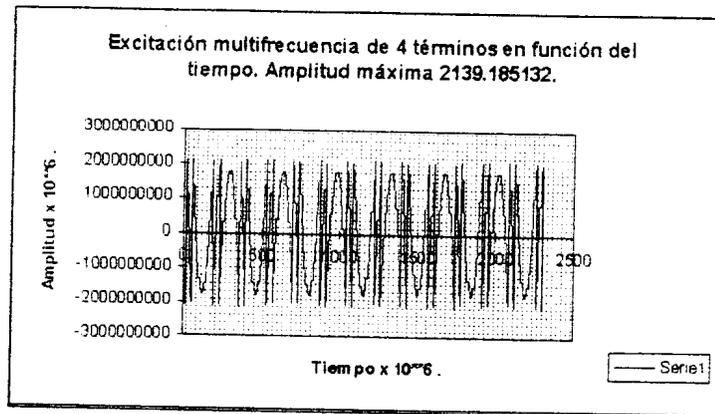


Figura 10: Grafo de la excitación definida en Tabla V.

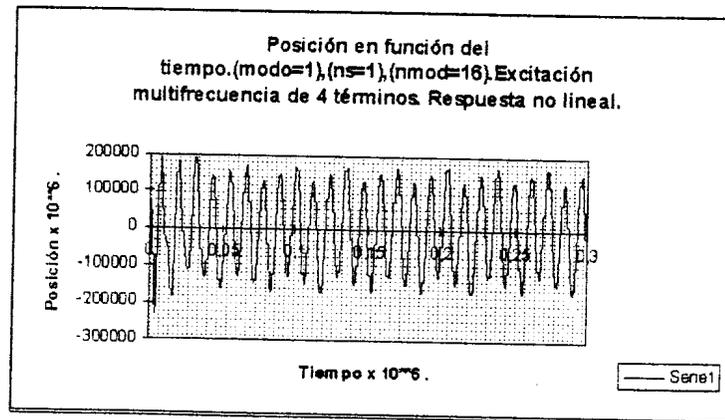


Figura 11: Respuesta no lineal por E.M. del modo 1 a excitación de Tabla V.

Se visualiza entonces una dependencia de la respuesta no lineal, con los valores de las frecuencias de la excitación sin modificar la condición resonante, ni la amplitud de la excitación primaria que está presente en la formulación. Las amplitudes máximas de las excitaciones de Figuras 7 y 10 difieren en un 0,001 %, mientras que sus respuestas de Figuras 9 y 11 difieren cercanamente al 25%. Es decir que, en las condiciones enunciadas, variar la forma de la excitación manteniendo su amplitud máxima aproximadamente constante, ocasiona significativas diferencias en la respuesta del sistema.

Resonancias Internas del tipo : $-w(\alpha) - w(\beta) + w(\gamma) + w(\delta) = \epsilon\sigma^2$

Fueron detectadas once combinaciones lineales de las frecuencias naturales del sistema lineal no amortiguado que satisfacen la condición anterior.

Tabla VI. Once soluciones de la ecuación $-w(\alpha) - w(\beta) + w(\gamma) + w(\delta) = \epsilon\sigma^2$

k	$\alpha (k)$	$\beta (k)$	$\gamma (k)$	$\delta (k)$
1	1	2	13	14
2	1	3	4	11
3	1	4	6	14
4	2	4	6	13
5	2	8	10	16
6	3	4	8	10
7	3	6	11	14
8	4	5	9	12
9	4	6	7	9
10	7	13	14	15
11	10	11	12	13

Con una excitación diferente para cada modo de manera que se cumplan las condiciones de la Tabla VII, se asegura que cada excitación es, desde el punto de vista de la formulación, equivalente a una excitación primaria. Por otro lado también se conserva la forma y amplitud máxima de la carga aplicada:

Tabla VII. Valores para excitación primaria equivalente.

ns	(número de modo exc.)	1, 2, 3, 4, ..., 16.
k_s	(amplitud de exc.)	10000.
$\Omega 1 + \Omega 2 + \Omega 3$	(frec. de exc.)	$w(ns) + 5$
σ_{ext}	(Factor desafinador)	50.

se resuelven las ecuaciones que gobiernan la variación de amplitud y fase como consecuencia de aplicar E.M. con aproximación de primer orden y con frecuencias que satisfacen $\Omega 1 + \Omega 2 + \Omega 3 = \epsilon\sigma^2 + w(ns)$, obteniéndose como amplitudes en régimen estacionario para cada modo a los valores $a(i, ns)$. Los resultados se pueden sintetizar en la forma :

$$a(i, ns) = \delta_{i, ns} \cdot \text{factor}(i) \quad \text{con} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 16).$$

donde $\delta_{l,ns}$ es el delta de Kronecker. Los valores numéricos adimensionales no nulos de factor $(i) \times 10^6$, están en Tablas VIII y IX.

Tabla VIII. Valores de amplitud en estado estacionario de modos 1 al 8.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
	74486	40796	36974	37912	27789	32339	47322	32006

Tabla IX. Valores de amplitud en estado estacionario de modos 9 al 16.

i	9	10	11	12	13	14	15	16
	26781	27724	26274	22320	22598	26120	18855	15642

Cuando es excitado el modo 'ns', los restantes se anulan en régimen estacionario, en las condiciones dadas. En los siguientes gráficos se ven respuestas típicas de amplitud en función del tiempo para el modo excitado, y para otro que no lo es.

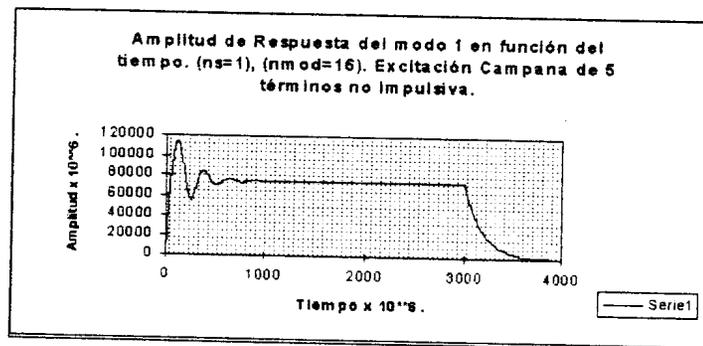


Figura 12: Amplitud del modo excitado en regímenes transitorio y estacionario.

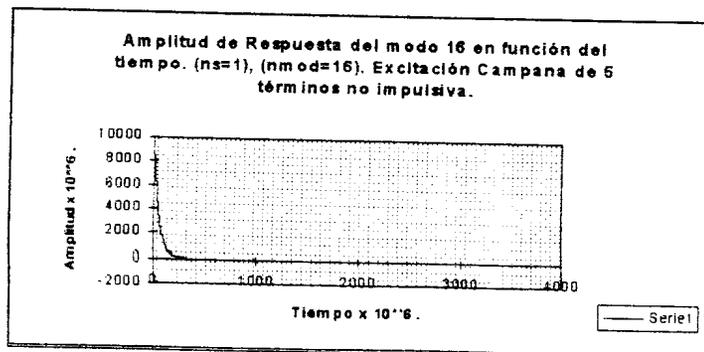


Figura 13: Amplitud de un modo que no es excitado en ambos regímenes.

En la primer figura, correspondiente al modo excitado, además de visualizarse dos regímenes transitorios (por aparición y desaparición de la carga aplicada), se observa un intervalo de tiempo asociado al régimen estacionario en el cual la amplitud es constante. La segunda figura muestra la participación del modo no excitado en régimen transitorio.

CONCLUSIONES :

En las formas de excitación que se definen en Tabla II, la solución por E.M. en una aproximación de primer orden no difiere significativamente de la solución lineal exacta en transitorio o estacionario para una excitación no resonante del tipo campana periódica sea o no de alta frecuencia. Tampoco difiere mucho en el caso de excitación presentado en Tabla III, pese a satisfacerse una condición de combinación resonante e incrementarse la amplitud máxima de excitación. Se explica porque las frecuencias intervinientes en la combinación resonante ocasionan que la corrección de primer orden por E.M. sea mucho más pequeña que las amplitudes de la respuesta lineal.

La valoración de las frecuencias $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, manteniendo constante su suma, que es próxima a una frecuencia natural, en una excitación multifrecuencia de tres o más términos, es de gran importancia en la respuesta no lineal; ya que, como se vió, es una variable de la cual depende. Como consecuencia, una vez reconocida la necesidad del estudio no lineal por existencia de la combinación resonante, se hace también necesario en su análisis, determinar el rango de valores de cada una de las frecuencias participantes en la excitación para definir la combinación de valores más crítica. Es decir, la que provoca mayores amplitudes en la respuesta no lineal.

De los resultados del análisis de R.I. se deduce que en régimen estacionario con excitación multifrecuencia no impulsiva del tipo campana definida en tabla III y considerando presentes en el análisis todas las posibles secularidades ligadas a exponentes de la forma $-w(\alpha) - w(\beta) + w(\gamma) + w(\delta) = \epsilon \sigma^2$, la respuesta de la membrana en estudio sólo incluye la frecuencia del modo excitado, además de las frecuencias presentes en la excitación.

REFERENCIAS :

- (1) NAYFEH, A. H., *Perturbation Methods*, John Wiley and Sons, 1973.
- (2) NAYFEH, A. H., MOOK, D. T., *Nonlinear Oscillations*, John Wiley and Sons, 1979.
- (3) PRATO, C. A., *Introducción al Método de Elementos Finitos en Mecánica Computacional.*, Dirección General de Publicaciones de la Universidad Nacional de Córdoba., 1970.
- (4) FLORES, F., *Cálculo Estructural Avanzado*, Publicación Interna del Departamento de Estructuras de la F.C.E.y N. de la Universidad Nacional de Córdoba., 1995.
- (5) NAYFEH, A. H., *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons, 1981.