

Teorías Locales y Nolocales en Falla Localizada de Sólidos Cohesivo-Frictionales

G. Etse⁽¹⁾ y M. Nieto⁽²⁾

- (1) Universidad Nacional de Tucumán, CC 134, Correo Central, 4000 Tucumán.
(2) Universidad Nacional de Santiago del Estero, Belgrano(S) 1912, 4200 Sgo. del Estero.

1 Resumen.

Se analiza la capacidad regularizadora del ablandamiento de formulaciones elastoplásticas basadas en la teoría micropolar de Cosserat. El trabajo incluye un estudio sobre la influencia de la orientación de mallas de elementos finitos en las predicciones de falla obtenidas con sólidos elastoplásticos clásicos y micropolares. Los resultados numéricos muestran la capacidad regularizadora de los continuos enriquecidos con los giros micropolares, si bien se indica que aun en este caso la influencia de la orientación de la malla es importante.

2 Abstract.

The capability of elastoplastic micropolar formulations based on Cosserat theory to regularize the softening behavior during computational failure simulations is analyzed. The attention also focuses on the influence of the mesh orientation on the failure predictions. The results included in this work indicate that micropolar continuum are able to suppress localization and therefore lead to objective predictions. However, these predictions strongly depend on the mesh orientation.

3 Introducción.

La respuesta inelástica de un amplio espectro de materiales ingenieriles, incluidos hormigones y aceros, está caracterizada por localizaciones del campo de deformación en bandas de reducida dimensión. La simulación computacional de los problemas de localización ha sido y es un área de intensa actividad científica. Los desarrollos realizados hasta el presente pueden ser *a priori* clasificados en dos grupos según el método utilizado para la descripción de las fisuras o fallas. Por un lado la descripción difusa y por el otro la descripción discreta de fracturas. Estos métodos o conceptos han convergido en algún aspecto debido, primeramente, al hecho que el análisis de localización de discontinuidades

de segundo orden intersecta los dos conceptos de procesos de falla de volumen dominante y de superficie dominante.

La descripción de procesos de falla mediante modelos continuos basados en la plasticidad y la mecánica de daño han recibido considerable atención. Sin embargo, el uso de tales formulaciones continuas o difusas en simulaciones computacionales de procesos de falla conduce a predicciones fuertemente dependientes del tamaño y de la orientación de los elementos de la malla. Para evitar esta deficiencia se han propuesto y desarrollado diferentes teorías o formulaciones constitutivas, las cuales conducen a reducciones de mayor o menor importancia de la pérdida de objetividad de las predicciones de resistencia límite y residual. Entre estas formulaciones *regularizantes* del comportamiento de ablandamiento se destacan principalmente las formulaciones no locales integrales (Pijaudier-Cabot y Bazant 1987), las formulaciones no locales de gradientes, los modelos elastoplásticos basados en mecánica de fracturas (Etse y Willam 1994), las teorías viscoplásticas de tiempo dependiente (Needleman 1987, Etse y Willam 1997) y las formulaciones basadas en continuos micropolares de Cosserat (de Borst 1990, Dietsche et al 1992, Sluys 1992).

Invariablemente, todas las formulaciones regularizantes del ablandamiento introducen una longitud característica en la relación tensión-deformación aunque el significado físico de la misma varía considerablemente de acuerdo a la formulación considerada.

En el presente trabajo se analizan las características de las predicciones de falla obtenidas con formulaciones materiales continuas basadas en la teoría micropolar de Cosserat. Especial atención se presta al análisis de la capacidad regularizadora del ablandamiento de formulaciones constitutivas basadas en dicha teoría. Los resultados numéricos que se incluyen están orientados también a analizar la sensibilidad de las predicciones de falla obtenidas con formulaciones micropolares frente a perturbaciones introducidas por la orientación de la malla.

Los resultados obtenidos soportan la conclusión que si bien la teoría micropolar regulariza el comportamiento de ablandamiento, la misma conduce a predicciones de falla sensibles a la orientación de la malla.

4 Continuo Micropolar de Cosserat.

En esta sección se detallan las propiedades mas relevantes de la teoría de continuos micropolares, los cuales, contrariamente a los continuos clásicos o continuos Boltzmann, exhiben giros independientes de las deformaciones en cada punto de masa. En este sentido, la extensión resultante de las ecuaciones cinemáticas y estáticas es definida mediante la teoría de Cosserat (1909).

Los trabajos mas relevantes sobre esta teoría se encuentran en las publicaciones de Gunther (1958), Schaefer (1967) y Mindlin (1963).

4.1 Estática y Cinemática.

Considerando el caso bidimensional ($i, j=1,2$), el tensor de tensiones toma la forma

$$\sigma_{ij} = \sigma_{(ij)} + \sigma_{[ij]} \quad (1)$$

donde $\sigma_{(ij)} = \sigma^{sim}$ es la parte simétrica del tensor y $\sigma_{[ij]}$ representa la parte antimétrica del mismo, siendo

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 1/2(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \\ 1/2(\sigma_{21} + \sigma_{12}) & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\sigma_{[ij]} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2(\sigma_{12} - \sigma_{21}) \\ 1/2(\sigma_{21} - \sigma_{12}) & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La consideración del equilibrio en el dominio B, despreciando las fuerzas inerciales, conduce a las ecuaciones

$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad (4)$$

$$z_{i3,i} + e_{ij3}\sigma_{ij} = 0 \quad (5)$$

En la descripción anterior, el primer subíndice denota la normal a la superficie y el segundo la dirección de la componente. Mas aún, $z_{i3,i}$ representa las cuplas tensoriales, propias de los continuos micropolares.

Por otro lado, el campo de deformaciones

$$\epsilon = \epsilon_{ij} = \epsilon_{(ij)} + \epsilon_{[ij]} \quad (6)$$

está también constituido por una parte simétrica y otra antimétrica, definidas de la forma

$$\epsilon_{(ij)} = 1/2(u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (7)$$

$$\epsilon_{[ij]} = 1/2(u_{j,i} - u_{i,j}) - e_{ij3}\omega_3 \quad (8)$$

donde ω_3 representa el giro que experimenta un sistema de coordenadas cartesianas con centro en cada punto de masa del continuo y que es independiente del campo de desplazamientos. Evidentemente, el caso particular del continuo clásico se recupera cuando el giro medio en el campo $1/2(u_{j,i} - u_{i,j})$ toma el valor ω_3 .

Una medida adicional de la deformación es el tensor de giro

$$\kappa_{i3} = \omega_{3,i} \quad \text{ó} \quad \kappa_{ij} = \omega_{j,i} \quad (9)$$

el cual representa el giro relativo entre puntos vecinos del continuo.

4.2 Elasticidad Lineal Micropolar.

Las ecuaciones constitutivas pueden ser escritas de la forma

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (10)$$

$$z_{ij} = C_{ijkl} \kappa_{kl} \quad (11)$$

Esta forma particular de la teoría lineal de Cosserat está basada en la función de densidad de energía, desacoplada en la parte dependiente de las deformaciones y de los giros micropolares

$$U = U(\epsilon, \kappa) = U_\epsilon(\epsilon) + U_\kappa(\kappa) \quad (12)$$

En el caso tridimensional y en término de las constantes de Lamé, el tensor elástico toma ahora la forma

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + 2\mu_c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (13)$$

donde ahora las constantes de Lamé pasan a ser 3 y toman el valor λ , $\mu + \mu_c$ y $\mu - \mu_c$ respectivamente.

4.3 Formulación Variacional.

La forma débil del Principio de Trabajos Virtuales involucra el siguiente funcional

$$\int_B \delta \epsilon : \sigma dV + \int_B \delta \kappa : z dV = \int_{\partial B} \sigma^t \delta u \cdot t dA + \int_{\partial B} \delta \omega \cdot z dA \quad (14)$$

Siendo $\sigma^t \cdot n = t$ y $z \cdot n = Z$ las tracciones y momentos superficiales.

Análogamente a lo indicado en el caso de deformaciones y tensiones, también la parte de la energía interna de deformación representada por el primer término de la derecha de la ec. (14) puede ser descompuesta en una componente simétrica y en otra antimétrica. Además el segundo término de la derecha representa la energía interna de deformación debida a las cuplas tensionales.

4.4 Discretización de Elementos Finitos de Continuos Micropolares.

El campo de desplazamientos puede ser discretizado de la forma estandard

$$u \rightarrow u^h = \sum_{j=1}^n N_j d_j \quad (15)$$

donde se consideraron n nodos para la definición de las funciones de forma N . Análogamente, los giros micropolares pueden ser discretizados como

$$\omega \rightarrow \omega^h = \sum_{j=1}^N N_j \omega_j \quad (16)$$

En notación vectorial, los campos de tensiones, de deformaciones, de fuerzas y de desplazamientos incluyen las siguientes componentes

$$\sigma^t = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, z_{13}, z_{23}] \quad (17)$$

$$\epsilon^t = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}, \epsilon_{21}, \kappa_{13}, \kappa_{23}] \quad (18)$$

$$u^t = [u, v, w] \quad (19)$$

$$p^t = [t_1^\sigma, t_2^\sigma, t_3^\sigma] \quad (20)$$

Para la determinación de las deformaciones $\epsilon = B d$ con $d^t = [u_1, v_1, w_1, \dots, u_n, v_n, w_n]$ siendo n el número de nodos, se considera la forma apropiada de la matriz de deformaciones parciales dada en Dietsche (1993).

En la evaluación de la matriz de rigidez de elementos k es conveniente separar la contribución de los grados de libertad traslacionales de la correspondiente a los grados de libertad adicionales de la teoría Cosserat. De esta manera la relación fuerza desplazamiento en el elemento se define de la forma

$$\begin{pmatrix} k_{tt} & k_{tr} \\ k_{rt} & k_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_t \\ d_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_t \\ f_r \end{pmatrix} \quad (21)$$

Siendo d_t y d_r las componentes traslacionales y rotacionales, respectivamente, del vector generalizado de desplazamientos.

4.5 Material Elastoplástico de Cosserat.

Para el comportamiento plástico consideramos la extensión micropolar de la condición de fluencia J_2 expresada como

$$F(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = \sqrt{3J_2} - Y(\epsilon_p, \kappa_p) = 0 \quad (22)$$

donde el segundo invariante del deviator de tensiones viene dado por la forma extendida

$$J_2 = f_1 \mathbf{s} : \mathbf{s} + f_2 \mathbf{s} : \mathbf{s}^t + f_3 \frac{1}{l_c^2} \mathbf{z} : \mathbf{z} \quad (23)$$

y $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3\mathbf{I}_2$. Mas aun, Y designa la resistencia en tracción uniaxial.

Los factores f_1 , f_2 y f_3 se definen con diferentes criterios en la literatura. Asi por ejemplo Muehlhaus y Vardoulakis (1987) consideran para la determinación de dichos factores la influencia micromecánica de los materiales granulares, mientras que de Borst (1990), para el caso de metales, toma los valores $f_1 = f_2 = 1/4$ y $f_3 = 1/2$. Estos serán los que se considerarán en el presente trabajo para evaluar la capacidad de regularización del comportamiento de ablandamiento de las formulaciones micropolares de Cosserat.

El parámetro de endurecimiento \dot{q} es en el caso de sólidos micropolares Cosserat, una función de las deformaciones plásticas y de los giros plásticos. En el presente análisis se considera la función de evolución

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{1}{3}\epsilon_{ij}^p \epsilon_{ij}^p + \frac{1}{3}\epsilon_{ij}^p \epsilon_{ji}^p + \frac{2}{3}\kappa_{ij}^p \kappa_{ij}^p l_c^2} \quad (24)$$

que en el caso de plasticidad asociada toma la forma simplificada

$$\dot{q} = \lambda \frac{1}{\sqrt{3J_2}} \sqrt{3 \left(\frac{1}{4} s_{ij} s_{ij} + \frac{1}{4} s_{ij} s_{ji} + \frac{1}{2} \frac{z_{ij} z_{ij}}{l_c^2} \right)} = \lambda \quad (25)$$

De esta manera, en forma idéntica a la plasticidad clásica, se mantiene la igualdad entre el parámetro de endurecimiento y el multiplicador plástico. El término $Y = Y(q) = Y_0 + E_p q$ describe el límite de resistencia a tracción en analogía a una ley lineal de endurecimiento de deformación.

De especial interés resulta el análisis del indicador de falla localizada en continuos elastoplásticos micropolares. En este caso la condición de falla localizada a lo largo de una superficie de discontinuidad es definida no solamente por la nulidad de las tracciones sino también por la nulidad de las cuplas tensoriales. Resulta de esta manera un tensor acústico asimétrico el cual deviene en uno simétrico al retomar las características del continuo clásico o de Boltzmann.

El modelo elastoplástico de Cosserat basado en el criterio de von Mises fue implementado en el marco del presente trabajo. La integración numérica fue desarrollada mediante utilización del Método de Retorno de Euler, el cual garantiza una solución en caso de superficies convexas y que deviene en el Método de Retorno Radial cuando se consideran superficies de fluencia tipo J_2 , como en el presente trabajo.

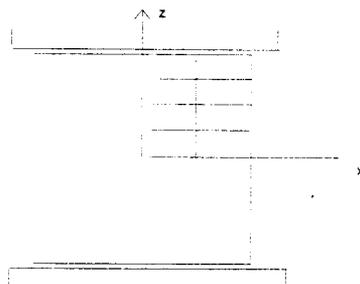


Figure 1: Geometría y condiciones de borde.

5 Análisis Computacional

Para los fines del análisis computacional se consideró el caso de compresión inhomogénea de la placa indicada en la Fig. 1, bajo estado de deformación plana. Debido a la doble simetría del problema, se discretizó solo un cuarto de la placa, lo cual suprime la posibilidad de formas no simétricas de falla. La altura total de la placa es de $h = 120\text{mm}$ y la base $b = 60\text{mm}$, mientras que se consideró un espesor unitario $t = 1\text{mm}$. En el análisis se utilizó en el borde izquierdo y en el inferior no solamente un impedimento al desplazamiento horizontal y vertical respectivamente, sino también un impedimento a los giros a fin de garantizar las condiciones de simetría del continuo micropolar supuesto para el material constitutivo. Los parámetros materiales elásticos considerados fueron $E = 4000\text{N/mm}^2$, $\nu = 0,25$, juntamente con el límite de fluencia de 100N/mm^2 y un módulo plástico de $-0,1\nu$ que define un comportamiento material de endurecimiento. Para los parámetros de Cosserat se consideraron los valores $\nu_c = 0,5\nu$, mientras que la longitud característica variaba en un rango importante a fin de analizar su influencia en las predicciones de falla obtenidas.

A fin de convertir el problema de bifurcación en un problema de estado límite se ha introducido una imperfección consistente en una reducción del 10% de la tensión de fluencia en el elemento ubicado en el extremo inferior izquierdo de la malla.

En la primera etapa se utilizan mallas regulares (no direccionadas) de elementos isoparamétricos planos de 4 nodos a fin de evitar posibles interferencias en el desarrollo del mecanismo de falla. Sin embargo la capacidad de los elementos micropolares

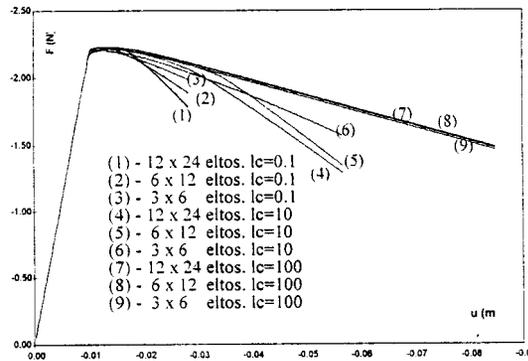


Figure 2: Diagramas Fuerzas-Desplazamiento de mallas regulares con l_c variable

isoparamétricos de 4 nodos, ubicados en mallas no regulares, para reproducir comportamientos de falla según direcciones no coincidentes con sus lados será analizada también en el presente trabajo.

La Figura 2 incluye los diagramas carga desplazamiento de la cara superior de las mallas regulares, obtenidos con 3 valores de longitudes características ($l_c = 0.1$, $l_c = 10$, $l_c = 100$). Para cada valor de la longitud característica se consideraron 3 mallas, de 3×6 , 6×12 y de 12×24 elementos, respectivamente.

Observamos que para los valores mayores de la longitud característica se alcanza una objetividad o identidad de las predicciones de los comportamientos Fuerza-Desplazamiento en el régimen de ablandamiento que sigue luego de alcanzado la resistencia pico. Por otro lado, el menor valor de la longitud característica conduce a predicciones fuertemente dependientes de las dimensiones de los elementos y coincidentes con las correspondientes a la plasticidad clásica. Es decir, reducciones importantes de la longitud característica de Cosserat conduce a soluciones computacionales con las mismas deficiencias que las correspondientes a los sólidos elastoplásticos clásicos o locales, tales como localización y pérdida discontinua de la unicidad. Esto último acontece a su vez por la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones de equilibrio del problema.

La Figura 3 muestra las mallas deformadas de 3×6 y de 12×24 elementos obtenidas con el valor extremo de la longitud característica $l_c = 0.1$. Se observa claramente que para este valor de l_c la región involucrada por las deformaciones plásticas depende fuertemente de la densidad de elementos considerada en la malla. En particular la malla deformada de 12×24 elementos muestra una marcada localización en comparación con la configuración deformada de la malla de 3×6 . Es importante notar que la banda de localización posee una inclinación de 45 grados, similar a la inclinación obtenida con la teoría clásica de von Mises.

Para los fines del análisis de la banda de corte que se desarrolla durante la falla, es de interés también la consideración de la distribución del tercer grado de libertad nodal, correspondiente a los giros. En la Figura 4 se indica en representación tridimensional la distribución de los giros nodales en mallas de 12×24 elementos en las cuales se consideraron

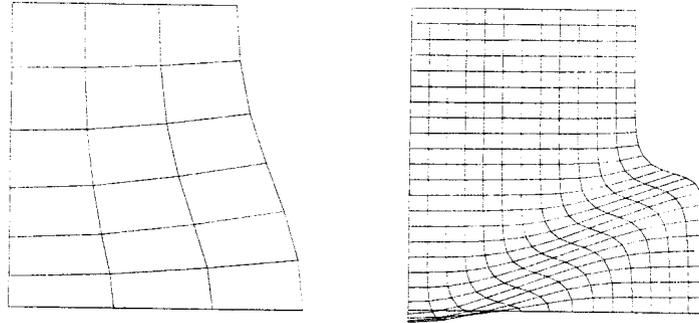


Figure 3: Mallas deformadas de 3x6 y 12x24 elementos con $lc=0.1$.

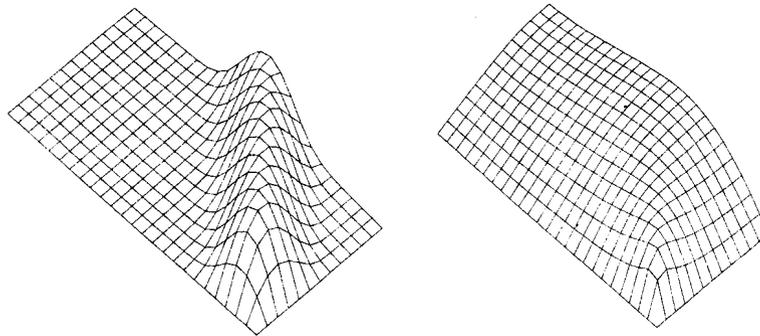


Figure 4: Giros nodales. Malla 12x24 con $lc=0.1$ y $lc=100$

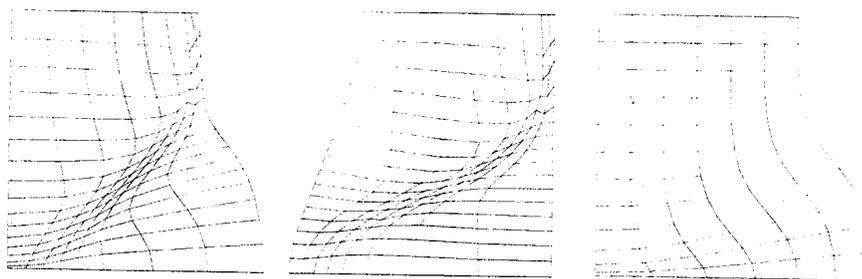


Figure 5: Configuración deformada de malla irregular; irregular girada y regular de 6x12 eltos. $l_c=0.1$.

los valores $l_c = 0.1$ y $l_c = 10$ de la longitud característica. Valores crecientes de la longitud característica conllevan a la supresión de la localización, obteniéndose modos difusos o continuos de falla. Es decir, la inclusión de los giros micropolares regulariza el comportamiento de ablandamiento debido a que las ecuaciones diferenciales de equilibrio conservan su buen condicionamiento durante historias de deformaciones arbitrarias.

A fin de analizar la influencia de la orientación de la malla de elementos isoparamétricos de 4 nodos en la objetividad de las predicciones de falla, se consideraron para el mismo ejemplo de compresión uniaxial, 2 mallas de 8x16 elementos con perturbaciones en las orientaciones de los elementos. En la Figura 5 se incluyen las mallas deformadas obtenidas con estas 2 mallas juntamente con la configuración deformada obtenida con la malla regular de 6x12 elementos. En todos estos análisis se consideró el valor $l_c = 0.1$. La primera de las 2 mallas irregulares incluye una densificación de elementos en una dirección cercana a los 60 grados, es decir, no coincidente con la inclinación propia de la banda de corte. La segunda de las mallas irregulares es idéntica a la primera pero girada respecto al eje de simetría axial, de tal forma que la densificación de elementos ahora está inclinada cerca de 75 grados respecto de la banda de localización que se desarrolla en este ejemplo. Observamos claramente en la Figura 5 que la mayor localización se obtiene en la malla regular seguida por la malla irregular no girada. La malla irregular girada produce una fuerte difusión de la falla, conllevando a una distribución casi continua de la deformación.

La Figura 6 muestra las curvas carga-desplazamiento obtenidas con las 3 mallas antes indicadas y considerando los valores $l_c = 0.1$ y $l_c = 100$ de la longitud característica. Observamos que el valor mayor de l_c produce resultados objetivos de las 2 mallas irregulares consideradas. Sin embargo estas predicciones son mas dúctiles que la correspondiente a la malla regular con idéntico valor de l_c , pero de menor cantidad de elementos. Estos resultados demuestran que la orientación de elementos isoparamétricos influye notablemente en las predicciones de falla, aun en el caso de utilizar teorías regularizantes del ablandamiento, tales como la teoría micropolar de Cosserat

6 Conclusiones.

Un modelos elastoplástico de von Mises basado en la teoría micropolar de Cosserat fue desarrollado. En la discretización del problema de valores de borde se extendió la aplicación

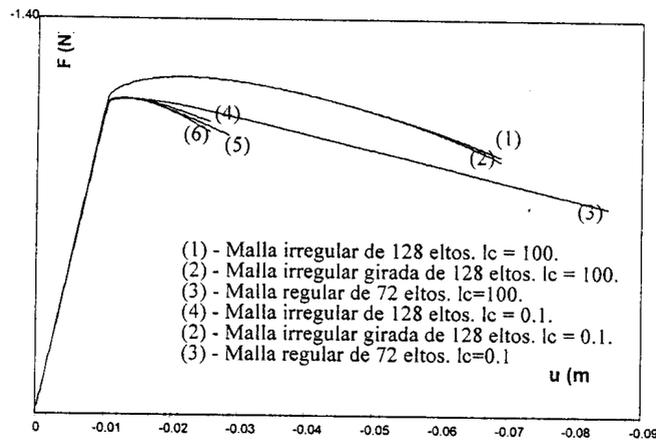


Figure 6: Carga-Desplazamiento de malla regular e irregulares.

de las funciones de interpolación lineales a los grados de libertad adicionales, correspondientes a los giros micropolares. Los resultados obtenidos demuestran que los continuos enriquecidos Cosserat brindan objetividad de las soluciones cuando se utilizan valores adecuados de la longitud característica. En este caso las ecuaciones diferenciales de equilibrio no pierden sus características elípticas durante historias de deformaciones cuasiestáticas, obteniéndose de esta manera modos de falla difusos en lugar de localizados.

Los resultados demuestran también que valores bajos de la longitud característica conduce a predicciones idénticas a las obtenidas con continuos elastoplásticos clásicos, caracterizadas por fuertes dependencias en la densidad de la malla de elementos finitos. Finalmente, se pudo establecer que las predicciones obtenidas con continuos micropolares y con elementos isoparamétricos lineales son igualmente sensibles a la orientación de los elementos.

7 Referencias.

- Borst, R. de, (1990). "Simulation of localization using Cosserat theory." *2nd. Conf. Computer Aided Analysis*. Ed. Bicanic & Mang. 931-944.
- Cosserat, E. y F. (1909). "Theorie des corps deformables." Herman et fils, Paris.
- Dietsche, A. (1993). "Lokale Effekte in linear-elastischen und elasto-plastischen Cosserat-Kontinua." Tesis doctoral, Universidad de Karlsruhe, Alemania.
- Etse, G., Willam, K. (1994). "Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavior of Plain Concrete." *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, 1983-2009.
- Etse, G; Willam, K. (1997). "Failure Analysis of Elastoviscoplastic Models." Remitida a *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*.

-
- Gunther, W. (1958). "Zur Statik und Kinematik des Cosserat'schen Kontinuums." *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 195-213.
- Mindlin, R.D. (1963). "Influence of Couple-Stress on stress concentrations." *Experimental Mechanics*. Vol. 3, 1-7.
- Needleman, A. (1988). "Material Rate Dependence and Mesh Sensivity in Localization Problems." *Comp. Meth. Appl. Mech. Engr.*, 67, 69-85.
- Nieto, M. y G. Etse (1996). "Soluciones de diferencias finitas y de Rayleigh Ritz de flexión lineal de sólidos micropolares de Cossera." *Mecánica Computacional*. Vol. XVII. Compilado por G. Etse y B. Luccioni. 383-392.
- Pijaudier-Cabot G. and Bazant, Z.P. (1987). "Nonlocal Damage Theory." *ASCE J. Eng. Mech.*, Vol. 113, 1512-1533.
- Schaefer, H. (1967). "Das Cosserat-Continuum." *ZAMM*. 47, 485-498.
- Sluys, L. (1992). "Wave propagation, localization and dispersion in softening solids." Tesis doctoral, Universidad de Delft, Holanda.

