

TRANSPORTE DE LA FUNCIÓN DISTRIBUCION DE TAMAÑO DE BURBUJAS EN CONDUCTOS VERTICALES

Marcela S. Politano^{1,2}, Pablo M. Carrica¹, Jorge L. Babiño¹ y Axel Larreteguy¹

¹ Instituto Balseiro

Av. Bustillo, Km. 9.5, 8.400 San Carlos de Bariloche, Argentina.

² Universidad Nacional de Río Cuarto

Ruta Nac. 36. Km. 601, 5800, Río Cuarto, Córdoba, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se estudian numéricamente las ecuaciones que describen el flujo gas-líquido en un conducto vertical en estado estacionario. Las ecuaciones de densidad numérica de burbujas y momento aplicadas a flujos polidispersos se promedian en el área para obtener un modelo unidimensional.

El sistema se discretiza en masa utilizando una aproximación multigrupo para considerar los distintos tamaños de las burbujas. La coordenada axial se divide en volúmenes de control. El modelo se comparó con datos experimentales, obteniéndose un buen ajuste.

ABSTRACT

We present a numerical study of the equations describing the steady-state upward gas/liquid flow on a duct. The bubble number density and momentum equations for polydisperse flows are area-averaged to derive a one dimensional model. The system is discretized in mass using a multigroup approach to represent the different possible bubble sizes. The axial coordinate is discretized using control volumes. The model was successfully compared against experimental data.

INTRODUCCION

La distribución de las fases gas-líquido en un conducto es un problema complejo que presenta interés en distintas áreas como procesos en la industria alimenticia, reactores químicos, ebullición/condensación, etc., para los cuales aún no existe una solución teórica aceptable.

Cuando la fracción de volumen de gas es baja se establece un flujo de "burbujas" con pequeñas burbujas dispersas. A medida que la fracción de volumen de gas aumenta las burbujas comienzan a coalescer y se forma un flujo "slug" caracterizado por burbujas del orden del diámetro de conducto (burbujas de Taylor) y pequeñas burbujas satélites [1]. La densidad numérica de las burbujas de un dado tamaño puede variar debido a rotura y coalescencia de las burbujas. Las velocidades de las burbujas dependen de parámetros locales como turbulencia, fracción de volumen del gas, interacciones burbujas-burbujas, burbujas-líquido y, a nivel macroscópico, del patrón de flujo. A consecuencia de lo anteriormente descripto, las ecuaciones de conservación resultantes están altamente acopladas entre si.

El objetivo del presente trabajo es determinar la distribución de las fases en un conducto vertical con burbujas ascendiendo en un líquido estanco en estado estacionario sin transferencia de masa interfacial (evaporación, disolución, reacción química, etc.). Como primera aproximación se utiliza un modelo unidimensional, el cual surge de integrar las ecuaciones de densidad numérica de burbujas y momento en el área del conducto de manera similar a lo realizado en [2] y [3].

Las ecuaciones se resuelven utilizando una aproximación multigrupo donde todas las burbujas con masa entre $m_{g-1/2}$ y $m_{g+1/2}$ se representan por un único grupo- g de masa constante m_g [4]. Esta simplificación tiene implícita la condición de que las variables cambian poco dentro del grupo, condición que debe ser verificada *a posteriori*. Cabe notar que en este esquema multigrupo los procesos de transferencia de masa entre grupos son numéricamente difusivos. Esto obliga a una fina discretización en la dimension- g . La selección del primer grupo y último grupo es tal que la *fdt* resultante en estos grupos sea suficientemente pequeña.

MODELO MATEMATICO

La ecuación de transporte de densidad numérica de burbujas del grupo- g puede escribirse como [4]:

$$u_g \frac{\partial N_g}{\partial z} = \sum_{j=g}^{NG} b_j X_{gj} N_j - b_g N_g + \sum_{j=1}^g \sum_{k \geq j}^g C_{jk} T_{jk} X_{gjk} N_j N_k - \sum_{j=1}^{NG} C_{jg} T_{jg} N_g N_j - C_{gg} T_{gg} N_g^2 \quad (1)$$

donde N_g es la densidad numérica de burbujas, u_g es la velocidad, C_{jk} es la probabilidad de coalescencia de burbujas de los grupos j y k , T_{jk} es la tasa de coalescencia y b_g es la tasa de rotura. NG es el número de grupos de la fase gaseosa. Las matrices X_{gjk} y X_{gj} dan el número de burbujas que son transferidas al grupo- g cuando coalescen dos burbujas de los grupos j y k , o cuando se rompe una burbuja del grupo- j , respectivamente.

Por conservación de masa, la velocidad superficial del gas j_g es constante y puede escribirse como:

$$\sum_{g=1}^{NG} \frac{m_g N_g u_g}{\rho_g} = j_g \quad (2)$$

De acuerdo con el modelo de dos fluidos [5, 6], la ecuación de continuidad del líquido nos indica que, en promedio, la velocidad del líquido es nula. Después de algunas simplificaciones al caso general de flujos gas-líquido [4, 7, 8, 9], la ecuación de momento para el grupo- g se puede escribir como:

$$0 = -\alpha_g \left(1 - \sum_{g=1}^{NG} \alpha_g \right) g - \alpha_g \rho_l C_g^{vm} u_g \frac{\partial u_g}{\partial z} - \alpha_g \rho_l C_g^D \pi R_g^2 u_g^2 + m_g \sum_{k=g}^{NG_g} b_k N_k X_{gk} (u_k - u_g) + m_g \sum_{j=1}^g \sum_{k \geq j}^g C_{jk} T_{jk} X_{gjk} N_j N_k \left(\frac{m_j u_j + m_k u_k}{m_j + m_k} - u_g \right) \quad (3)$$

donde C_g^{vm} y C_g^D son los coeficientes de masa virtual y arrastre del grupo- g . Los últimos dos términos representan el intercambio de momento debido a rotura y coalescencia.

La descripción completa del modelo requiere leyes de cierre apropiadas para los distintos regimenes de flujo. La tasa de rotura y *fdt* de burbujas hijas $h(m, m_j)$ pueden calcularse por [10]:

$$b_g = 0.29 \left(\frac{\varepsilon}{R_g^2} \right)^{1/3} (1 - \alpha_d) \int_0^1 \int_{\xi_{min}}^1 \frac{(1 + \xi_g^2)}{\xi_g^{11/3}} \exp \left(- \frac{1.89 Z(\chi_g) \sigma}{\rho_l \varepsilon^{2/3} R_g^{5/3} \xi_g^{11/3}} \right) d\xi_g d\chi_g \quad (4)$$

$$h(m, m_j) = \frac{2 \int_{\xi_{\min}}^1 \frac{(1 + \xi_j^2)}{\xi_j^{11/3}} \exp\left(-\frac{1.89 Z(\chi_j) \sigma}{\rho_l \varepsilon^{2/3} R_j^{5/3} \xi_j^{11/3}}\right) d\xi_j}{\int_0^1 \int_{\xi_{\min}}^1 \frac{(1 + \xi_j^2)}{\xi_j^{11/3}} \exp\left(-\frac{1.89 Z(\chi_j) \sigma}{\rho_l \varepsilon^{2/3} R_j^{5/3} \xi_j^{11/3}}\right) d\xi_j d\chi_j} \quad (5)$$

donde σ es la tensión superficial, R_g es el radio de las burbujas en el grupo- g , ε es la disipación de energía turbulenta, λ es la longitud de escala de los remolinos y α_d es la fracción de volumen del gas. $\xi_g = \lambda/2 R_g$, $\chi_g = m/m_g$ y $Z(\chi_g) = \chi_g^{2/3} + (1 - \chi_g)^{2/3} - 1$. El límite inferior de la integral se calcula de acuerdo a [11]. Además, se supone que las burbujas no pueden romperse en tamaños menores que 0.001 de su masa original o menores al tamaño del primer grupo y que las burbujas de Taylor no pueden romperse. La rotura en la estela de burbujas de Taylor no es considerada en este trabajo. La energía de disipación ε se calcula suponiendo que toda la energía entregada al líquido por las burbujas se transforma en turbulencia.

Utilizando las expresiones dadas por Prince & Blanch [12] para tasa de colisión turbulenta y por Sanz [13] para tasa de colisión debido a efectos boyantes, la tasa de coalescencia se puede escribir como:

$$T_{jk} C_{jk} = \frac{\alpha_c}{(\alpha_c - \alpha)} \left[1.41 (R_j + R_k)^2 \varepsilon^{1/3} (R_j^{2/3} + R_k^{2/3})^{1/2} C_{jk}^t + u_{jk} S_{jk} C^v \right] \quad (6)$$

donde u_{jk} es la velocidad relativa entre burbujas de grupos j y k , S_{jk} es el área efectiva de colisión y $\alpha_c \approx 0.99$ es la fracción de volumen máxima con burbujas deformables y/o distribución de tamaño no deltiforme. Se supone que la colisión turbulenta desaparece cuando la suma de los diámetros de las burbujas es mayor que el diámetro del conducto. La probabilidad de coalescencia debido a la fuerza boyante C^v es un parámetro de control ajustable. La probabilidad de coalescencia por turbulencia para sistemas aire-agua puede expresarse como [12]:

$$C_{jk}^t = \exp\left(-3.87 \left(\frac{1}{R_k} + \frac{1}{R_j}\right)^{5/6} \left(\frac{\rho_c}{16\sigma}\right)^{1/2} \varepsilon^{1/3}\right) \quad (7)$$

El coeficiente de masa virtual se calcula con la expresión propuesta por Ishii & Mishima [4]. El coeficiente de arrastre de una burbuja aislada en un conducto se calcula usando la velocidad terminal U_g [2]. La velocidad de ascenso de las burbujas cuando hay un velocidad superficial j_g , se calcula usando el modelo de *drift-flux* [14]:

$$u_g = C_{0g} j_g + U_g \quad (8)$$

En este trabajo $C_{0g} = 1.5$ para burbujas pequeñas y $C_{0g} = 1.2$ para burbujas de Taylor.

METODO NUMERICO

Las ecuaciones presentadas se resuelven numéricamente discretizando la longitud axial en volúmenes de control de tamaños apropiados para que las variaciones de la solución puedan ser adecuadamente representadas. El término convectivo de estas ecuaciones se calcula usando un esquema *upwind*.

Debido a que las ecuaciones no presentan términos difusivos, la información se transmite sólo en la dirección del movimiento, por lo tanto dadas las condiciones de contorno en el elemento de entrada, los volúmenes pueden resolverse de a uno a la vez. Las condiciones de contorno son: velocidad

superficial j_g , fracción de volumen de gas α_0 y distribución de tamaños, conocidos en la entrada del conducto. El tamaño de las burbujas en la alimentación es tal que, asumiendo que ingresan con la velocidad terminal, deben cumplir las condiciones de j_g y α_0 .

Las soluciones semilla son la velocidad y distribución de tamaños dadas en la condición de contorno cuando se resuelve el primer elemento, y las soluciones de los previos elementos en los demás volúmenes de control. Los términos no lineales provenientes de la coalescencia y términos convectivos se linealizan y se necesitan varias iteraciones para alcanzar la convergencia en cada elemento. El sistema se considera convergido cuando la norma L1 del error relativo en la densidad numérica de burbujas y la velocidad es menor que 10^{-7} . Para obtener convergencia el proceso iterativo debe relajarse fuertemente. Relajaciones típicas están en el orden de 5×10^{-3} a 0.5 para la ecuación de momento y entre 0.01 a 0.1 para las ecuaciones de densidad numérica de burbujas.

El sistema lineal resultante para la Ec. (1) está dado por:

$$\mathbf{A}_{ij}^n N_j^n = \frac{u_i^{n-1} N_i^{n-1}}{\Delta z} \quad (9)$$

donde el supraíndice n denota el nodo axial. La matriz \mathbf{A} puede descomponerse en una **LUD**. La matriz \mathbf{L} es diagonal inferior y contiene los términos de coalescencia:

$$\mathbf{L}_{ij}^n = \sum_{k \leq j} C_{jk}^n T_{jk}^n \mathbf{X}_{ijk} N_k^n \quad (10)$$

donde N_k^n se calcula en la iteración previa. Para la matriz \mathbf{X}_{ijk} se utilizó almacenamiento ralo ya que sus elementos son cero al menos que $m_{i-1} < m_j + m_k < m_{i+1}$ [5]. La matriz diagonal contiene las pérdidas de burbujas debido a coalescencia, rotura y al término convectivo:

$$\mathbf{D}_{ii}^n = - \sum_k C_{ik}^n T_{ik}^n \mathbf{X}_{ijk} N_k^n - C_{ii}^n T_{ii}^n N_i^n - b_i^n - \frac{u_i^n}{\Delta z} \quad (11)$$

La matriz superior \mathbf{U} contiene los términos de rotura y está dada por:

$$\mathbf{U}_{ij}^n = b_j^n \mathbf{X}_{ij}^{n-1} \quad (12)$$

La evaluación numérica de la matriz de rotura se realiza aproximando la función $h(m, m_j)$ por un conjunto de funciones lineales. El número de ecuaciones lineales depende de la curvatura de $h(m, m_j)$, la cual es función del tamaño de la burbuja madre. La disipación de energía turbulenta se calcula empleando un esquema *upwind*. El procedimiento emplea multiplicadores de Lagrange para incorporar la restricción (2). Finalmente se resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} A_{ij}^n & m_i u_i^n / \rho_i \\ m_i u_i^n / \rho_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_j^n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^{n-1} N_i^{n-1} / \Delta z \\ j_g \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. Nótese que el multiplicador de Lagrange es cero cuando se alcanza la solución. En cada iteración, luego de calcular la densidad numérica de partículas se calcula la velocidad de cada grupo mediante las Ecs. (3) y (8).

RESULTADOS Y COMPARACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES

El sistema se discretiza en z con 16 nodos comenzando a $5.6 \cdot 10^{-2} m$ de la entrada y se utilizan 30 grupos. La discretización fue mas fina cerca de la entrada y para pequeñas masas donde las variables

cambian mas abruptamente. La convergencia en grilla fue verificada con discretizaciones de 20 a 60 grupos. Las masas de las burbujas del primer y último grupo son de $2.81 \cdot 10^{-9} \text{ mg}$ y $3.51 \cdot 10^{-1} \text{ mg}$, respectivamente. Todas las propiedades físicas correspondieron a oxígeno-agua destilada en CNPT.

La Fig. 1 muestra la comparación del modelo con datos experimentales de Guido-Lavalle *et. al* [15], en el cual oxígeno se inyecta en una columna llena de agua de 1.02 m de largo y $2.34 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ de diámetro.

La probabilidad de coalescencia C^v es 1 para cualquier colisión con burbuja de Taylor. Para burbujas menores C^v es constante e igual a 0.03, valor obtenido del ajuste de los valores experimentales de la Fig. 1 a $j_g = 1.18 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$. Nótese que los valores obtenidos para la probabilidad de coalescencia son similares a los de pequeñas partículas sólidas, ver Williams & Loyalka [16].

La distribución de la fracción de volumen de gas se muestra en la Fig. 2 para velocidad superficial $j_g = 1.18 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$. Nótese que la población de burbujas favorece a las burbujas de mayor tamaño a medida que nos alejamos del punto de inyección. Se verifica que el efecto de la rotura puede ser despreciado y que el efecto predominante en la *fdt* resultante es la coalescencia. Considerar las fuentes de momento por rotura y coalescencia degrada la velocidad de convergencia del problema. En la Fig. 3 se muestra la evolución del error relativo en la densidad numérica de burbujas y velocidad con y sin la fuente de momento por coalescencia.

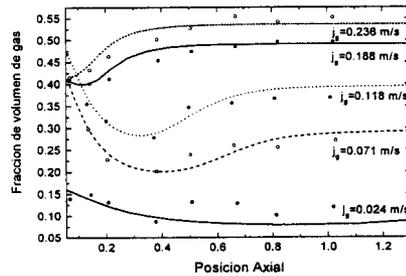


Figura 1 Fracción de volumen de gas vs. posición axial. Símbolos representan datos experimentales y líneas el modelo

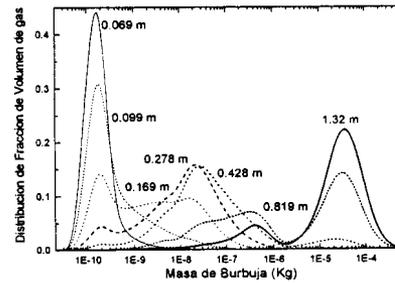


Figura 2 Distribución de la fracción de volumen de gas en distintas posiciones axiales.

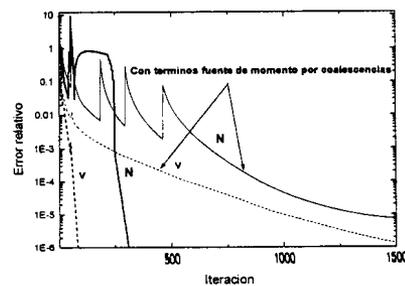


Figura 3 Evolución del error relativo

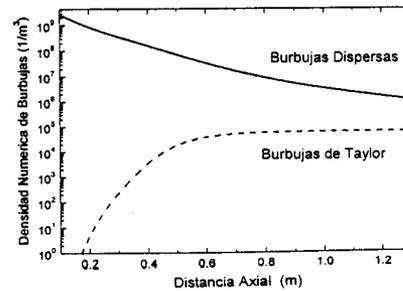


Figura 4 Densidad Numérica de burbujas de Taylor y burbujas dispersas vs. distancia axial

En la Fig. 4 se muestra el desarrollo de la densidad numérica de burbujas para $j_g = 1.18 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$. Se puede observar como crece el número de burbujas de Taylor a medida que se avanza a lo largo del conducto. En el final del conducto, el flujo es *slug* y está formado por burbujas de Taylor y burbujas satélites dispersas. Con este gráfico es posible determinar la posición en la cual se forma la primera burbuja de Taylor ($z \approx 0.18 \text{ m}$).

CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo unidimensional para predecir la distribución de tamaño de burbujas a lo largo de un conducto. El modelo se comparó con datos experimentales para una columna de burbujas. Futuros trabajos incluyen el modelado radial de flujo completamente desarrollado y la inclusión de un modelo de rotura de burbujas de Taylor.

REFERENCIAS

- [1] Wallis, G. B. 1969. "One Dimensional Two-Phase Flow". Mc Graw-Hill Book Company.
- [2] Wu, Q., Kim, S. & Ishii, M. 1998. One-group interfacial area transport in vertical bubble flow. *Int. J. Heat and Mass Transfer*. **41** 1103-1112.
- [3] Ishii M. & Mishima K. 1984. Two Fluid Model and Hydrodynamics Constitutive Relations, Nuclear Eng. Des. **82**, 107-126.
- [4] Carrica P, Drew D., Bonetto F. & Lahey R. 1999. A Polydisperse Model for Bubbly Two-Phase Flow Around a Surface Ship. *Int. J. Multiphase Flow*. **25**, 257-305.
- [5] Ishii, M. & Zuber, N. 1979. Drag Coefficient and Relative Velocity in Bubbly, Droplet or Particulate Flows. *AIChE J.* **25**, 843-855.
- [6] Drew D. A. & Lahey R. T., Jr. 1979. Application of General Constitutive Principles to the Derivation of Multidimensional two-phase Flow Equations *Int. J. Multiphase Flow*. **5**, 243-264.
- [7] Antal S. P., Lahey R. T. Jr. & Flaherty J. E. 1991. Analysis of Phase Distribution in Fully Developed Laminar Bubbly Two-Phase Flow. *Int. J. Multiphase Flow*. **17**, 635-652.
- [8] Lahey, R.T. Jr. & Drew, D.A. 1990. The current state-of-the-art in modeling of vapour/liquid two-phase flows. ASME paper-90-WA/HT-13.
- [9] Drew, D. A. & Passman S. L. 1999. Applied Mathematical Sciences. Theory of Multicomponent Fluids. Springer. N.Y.
- [10] Luo H., & Svendsen, H. F. 1996. Theoretical Model for Drop and Bubble Breakup in Turbulent Dispersions. *AIChE J.* **42**, 1225-1233.
- [11] Politano M., Carrica P. M., Balleño J. 2000. About Bubble Models to Predict Bubble Size Distributions in Homogeneous Flows. Enviado al *Chem. Eng. Comm.*
- [12] Prince, M. J. & Blanch, H. W. 1990. Bubble Coalescence and Break-up in Air-Sparged Bubble Columns. *AIChE J.* **36**, 1485-1499.
- [13] Sanz D. E. 1993. Una Contribución a la Formulación Geométrica-Estadística de la Topología del Flujo Bifásico. Trabajo Especial. Universidad Nacional de Cuyo. Argentina.
- [14] Zuber N. & Findlay, J. A. 1965. Average Volumetric Concentration in Two-phase Systems. *J. Heat Transfer*. **87** 453-468.
- [15] Guido Lavalle G., Carrica P., Clausse A. & Qazy M. 1994 A Bubble Number Density Constitutive Equation. *Nuclear Eng. Des.* **152**, 213-224.
- [16] Williams, M. M. R. & Loyalka, S. K. 1991. Aerosol Science Theory and Practice. Pergamon Press, Oxford.