

DESPLAZAMIENTO DE UN LÍQUIDO POR UNA FASE GASEOSA EN UN TUBO DE SECCIÓN CIRCULAR: INFLUENCIA DE LAS FUERZAS DE INERCIA.

Silvia P. Britos, María D. Giavedoni y Fernando A. Saita

INTEC (UNL – CONICET)
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
e-mail: sbritos@alpha.arcrude.edu.ar

RESUMEN

En este trabajo se estudia numéricamente el desplazamiento en estado estacionario de un líquido Newtoniano e incompresible, confinado en un tubo capilar de radio d , por una burbuja gaseosa. El objetivo es analizar la influencia del tamaño de la burbuja, de las fuerzas capilares, y, principalmente de las fuerzas de inercia sobre la relación entre la velocidad del fluido suspendido y la velocidad media de la fase líquida continua, la caída de presión a través de la burbuja (Δp) y la forma de la superficie libre.

ABSTRACT

In this work the steady displacement of an incompressible Newtonian liquid confined in a capillary tube of radius d , by a bubble, is numerically studied. The main objective is to analyze the influence of bubble's size, capillary forces, and, principally inertial forces on the relation between the velocity of the suspended fluid and the average velocity of the continuous liquid phase, the pressure drop across the bubble (Δp) and the shape of the free surface.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento de los mecanismos involucrados en el desplazamiento de un fluido por otro fluido, inmiscibles entre sí, es relevante para diversos procesos de interés tanto tecnológico como biológico.

En particular, el desplazamiento de un sistema líquido-gas en un tubo capilar de sección circular es comúnmente empleado como modelo para analizar sistemas multifásicos. Ejemplos de estos se encuentran en los procesos de recuperación secundaria de petróleo y en sistemas fisiológicos, como es el flujo de sangre a través de pequeños capilares

Cuando el tamaño de la fase suspendida es comparable con el diámetro del tubo, el confinamiento de las paredes afecta la forma de la burbuja. Δp y la movilidad (U/V), relación entre la velocidad del fluido suspendido (U) y la velocidad media de la fase líquida continua (V). Los parámetros adimensionales que gobiernan el flujo son la relación entre el radio de la burbuja no deformada respecto al radio del tubo (λ), el número Capilar y el número de Reynolds.

Existen numerosos trabajos, tanto teóricos como experimentales sobre el comportamiento de burbujas largas ($\lambda \gg 1$), y $Re=0$. Taylor [1] usó una versión refinada del método empleado por Fairbrother y Stubbs [2] y reportó valores de $m=(1-(V/U))$ en un amplio rango de Ca . Los experimentos de Taylor [1] muestran que al aumentar Ca , m tiende a un valor asintótico igual a 0.55.

A valores de $\lambda \gg 1$ y velocidades de desplazamiento bajas (Re y $Ca \rightarrow 0$), la formación de un film de espesor muy delgado entre la burbuja y la pared del tubo, (h_{∞}), permite analizar este tipo de sistemas usando métodos asintóticos. Bretherton [3] computó, mediante una aproximación de lubricación, tanto la caída de presión (ΔP) en la fase líquida debida a la presencia de la burbuja como h_{∞} y encontró que ambas variables dependen del Ca .

A velocidades mayores la no linealidad introducida por las ecuaciones que gobiernan el comportamiento interfacial; requiere de técnicas numéricas para la resolución. Los resultados publicados como, por ejemplo, [4] y [5], corresponden a rangos reducidos del número Capilar y en ningún caso se consideran los efectos de las fuerzas de inercia. Recientemente, Giavedoni y Saita [6] extendieron el análisis del desplazamiento de un fluido a valores de Ca entre $5 \cdot 10^{-3}$ y 10 , y analizaron, además, el efecto de las fuerzas de inercia sobre h_{∞} en burbujas largas.

Para el caso $\lambda < 1.15$, que corresponden a burbujas de tamaño intermedio y pequeñas, pueden citarse varios trabajos experimentales ([7], [8] y [9]) como también algunos análisis numéricos (ej. [10]).

Debido a que los trabajos previamente citados no consideran el efecto de las fuerzas de inercia sobre U/V , Δp y la forma de la superficie libre, para el caso de burbujas de tamaño intermedio y pequeñas, y trabajan en un rango reducido del Número Capilar, el principal objetivo del presente trabajo es analizar la influencia de las fuerzas de inercia para distintos valores de número capilar cuando $\lambda < 1.15$.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA

El desplazamiento en estado estacionario por un gas invíscido, de un líquido Newtoniano e incompresible, confinado en un tubo horizontal de sección circular está gobernado por las fuerzas viscosas, capilares e inerciales. Considerando al líquido incompresible, de viscosidad (μ) y densidad (ρ), las ecuaciones adimensionalizadas que gobiernan el comportamiento del flujo son la conservación de masa

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (1)$$

y la conservación de cantidad de movimiento

$$Re(\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) - \nabla \cdot \underline{T} = 0 \quad (2)$$

con

$$\underline{T} = -\frac{p}{Ca_{(V)}} \underline{I} + [(\nabla \underline{u}) + (\nabla \underline{u})^T] \quad (3)$$

En (3) p es la presión e \underline{I} es el tensor identidad. Las escalas características empleadas en la adimensionalización fueron la velocidad media del fluido lejos de la burbuja (V) y el radio (d) del tubo; la tensión y la presión se midieron en unidades de (σ/d), siendo σ la tensión interfacial. Los números adimensionales que surgen y permiten caracterizar el sistema son, el número de Reynolds

$Re = \frac{\rho V d}{\mu}$, que relaciona las fuerzas inerciales y las viscosas, y el número capilar $Ca_{(V)} = \frac{\mu V}{\sigma}$ que

relaciona las fuerzas viscosas y las capilares. En la Figura 1, se muestra una representación del dominio del flujo y las condiciones de frontera asociadas, considerando la simetría del problema.

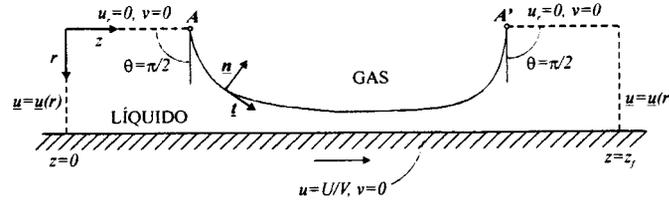


Figura 1: Representación del dominio axisimétrico de flujo, condiciones de contorno adimensionalizadas y sistema coordenado adoptado para el modelo.

Sobre las paredes, las condiciones de frontera están dadas por la condición de no-deslizamiento y no-penetrabilidad, las componentes u y v del vector velocidad (\underline{u}) adoptan los siguientes valores

$$u = UV, \quad v = 0 \quad \text{en } r = 1, \quad 0 \leq z \leq z_f \quad (4)$$

En el eje del tubo se consideran condiciones de simetría, es decir

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0 \quad \text{en } r = 0 \quad 0 \leq z < A \quad \text{y} \quad A' < z \leq z_f \quad (5)$$

Los vértices de la burbuja son puntos de estancamiento, en consecuencia la velocidad debe ser igual a cero en los mismos.

Como el flujo lejos de la burbuja (en $z = 0$ y $z = z_f$) es unidimensional, el perfil de velocidades debe ser parabólico y además satisfacer las condiciones (4) y (5); resulta entonces

$$u(r) = -2(1-r^2) + \frac{U}{V}, \quad v=0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{y} \quad z = z_f \quad \text{para } 0 \leq r \leq 1 \quad (6)$$

Las condiciones de frontera impuestas a lo largo de la interfase líquido-gas incluyen el balance de tensiones en la interfase y la condición de no transferencia de materia a través de la misma.

En este trabajo el gas se considera inviscido, la fase gas no ejerce esfuerzos de corte. La presión del gas es uniforme en todo punto interior a la burbuja y se fija arbitrariamente igual a cero, por lo que el balance de tensiones en la interfase resulta

$$\underline{T} \cdot \underline{n} = \frac{1}{Ca(V)} \left(\frac{dt}{ds} + \frac{-\underline{n} \cdot \underline{e}_r}{r_{SL}} \right) \quad (7)$$

En la ecuación (7) \underline{t} representa el versor tangente a la interfase, apuntando en la dirección de longitud de arco (s) creciente y \underline{n} es el versor normal a la superficie libre dirigido hacia afuera de la fase líquida r_{SL} corresponde a la coordenada r de la superficie libre en el punto de interés.

La condición de no transferencia de materia está determinada por

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \quad (8)$$

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

El conjunto de ecuaciones no lineales, junto con las condiciones de contorno asociadas, se resolvió numéricamente discretizándolo con el Método de Elementos Finitos, utilizando la técnica de Galerkin.

La superficie libre se parametrizó mediante la técnica expuesta en [11] para flujos con superficie libre, la cual tiene como ventaja fundamental la simplicidad con la que pueden ser ingresadas las condiciones de contorno de la interfase en el código numérico y la facilidad con que son computadas las variables superficiales, permitiendo la resolución simultánea de las ecuaciones.

Para la resolución numérica del sistema discretizado se eligió el método de Newton - Raphson. Debido a que en este trabajo se analiza la influencia de distintos parámetros adimensionales (Re , Ca_{η} y λ) en un amplio rango, se recurrió, para la inicialización, al uso de la técnica de continuación de orden cero.

RESULTADOS

Se presentan algunos de los resultados obtenidos correspondientes a U/V y formas de burbujas para distintos valores de Ca_{η} en función del Re y λ .

Los resultados numéricos indican que la influencia de las fuerzas de inercia sobre U/V es despreciable a número Capilar bajo, predominando en este caso el efecto de las fuerzas capilares, Figura 2 (A). La influencia aumenta al aumentar el número capilar, siendo notoria para $Ca_{\eta} \geq 0.5$, Figuras 2: (C) y (D).

En general, a medida que el Re aumenta, la movilidad de la burbuja disminuye, cualquiera sea su tamaño. Para $Ca_{\eta} \leq 0.1$, parece observable que el valor de U/V tiende a un valor asintótico al aumentar el número de Re , Figuras 2: (A) y (B).

Para burbujas muy pequeñas, $\lambda \ll 1$, U/V tiende a 2, independientemente de las fuerzas de inercia o capilares, la burbuja tiende a desplazarse a la velocidad máxima del fluido, la cual en un flujo Poiseuille, es igual a $2V$, los resultados concuerdan con lo reportado en [12] y [13].

Por otra parte para $\lambda \gg 1$ entre la pared del tubo y la interfase líquido-gas se forma un film estanco de espesor constante, h_{es} ; por lo que U/V es dependiente del Ca y el Re .

Para número Capilar pequeño las burbujas mantienen su forma simétrica, por el efecto de las fuerzas capilares y ésta no se ve alterada al variar el Re en forma significativa. Al aumentar el número Capilar se pueden observar variaciones en la dirección axial y en la curvatura de la parte posterior por aumento del Re para tamaños comparables de burbujas, Figuras 3 y 4.

Resultados numéricos, que no se ilustran aquí, indican que Δp vs. λ es independientemente del Re para valores pequeños de número Capilar. Del análisis de los mismos se puede concluir que el efecto de las fuerzas de inercia sobre Δp es considerable para valores de Ca_{η} mayores que 0.1 lo cual se relaciona con efectos de las fuerzas inerciales sobre la forma de la superficie libre y la movilidad relativa.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan los resultados de las simulaciones numéricas en términos de los efectos de los parámetros adimensionales que caracterizan el sistema, Ca_{η} , λ y principalmente Re , sobre la relación U/V , la deformación de la burbuja, la caída de presión a través de la burbuja, ΔP .

A partir de la resolución numérica de las ecuaciones que gobiernan el problema, se determinó la forma de la superficie libre, desconocida a priori, conjuntamente con los campos de velocidades y presión.

Los resultados obtenidos se compararon con los trabajos teóricos y experimentales de la bibliografía.

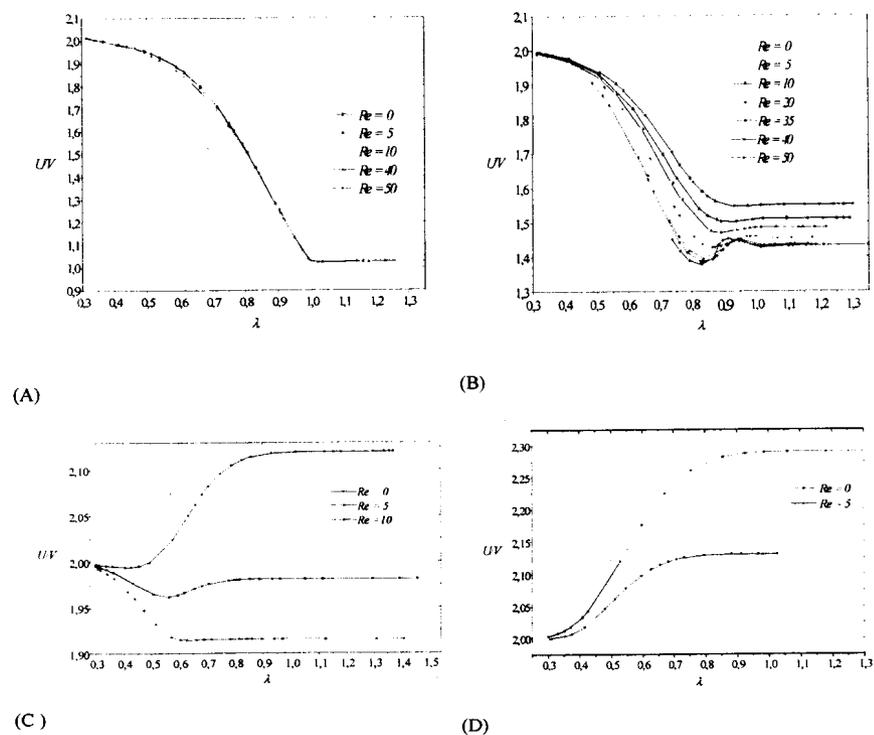


Figura 2: Gráfica de UV vs. λ para valores fijos de Ca y distintos valores de Re . (A) $Ca = 0.001$. (B) $Ca = 0.1$. (C) $Ca = 0.5$. (D) $Ca = 1$.

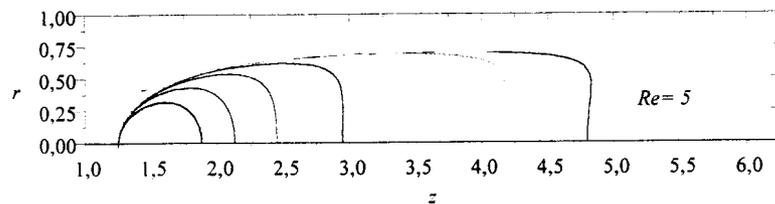


Figura 3: Forma de la burbuja para valores de $\lambda = 0.32, 0.43, 0.57, 0.72, 0.93, 1.02$ y 1.14 , $Re = 5$ y $Ca = 0.5$.

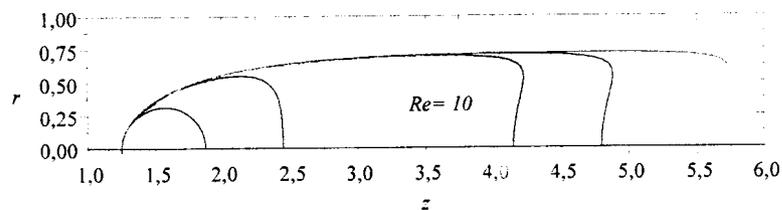


Figura 4: Forma de la burbuja para valores de $\lambda=0.32, 0.42, 0.57, 0.72, 0.94, 1.01$ y 1.12 , $Re=10$ y $Ca_M=0.5$.

REFERENCIAS

- [1] Taylor G. I., *Deposition of a viscous fluid on the wall of a tube*, J. Fluid Mech., vol. 10, 1961, 161.
- [2] Fairbrother, F. y Stubbs, A. E., *Studies in electroendosmosis. Part VI: the bubble-tube method of measurement*, J. Chem. Sci., vol. 1, 1935, 527.
- [3] Bretherton, F. P., *The motion of long bubbles in tubes*, J. Fluid Mech., vol. 10, 1961, 166.
- [4] Reinelt D. A., Saffman P. G., *The penetration of a finger into a viscous fluid in a channel and tube*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., vol. 6, 1985, 542.
- [5] Martínez M. J., Udell K. S., *Boundary integral analysis of the creeping flow of long bubbles in capillaries*, Trans. ASME E: J. Appl. Mech., vol. 56, 1989, 211.
- [6] Giavedoni M. D., Saita F. A., *The axisymmetric and plane cases of a gas phase steadily displacing a newtonian liquid - A simultaneous solution of the governing equations*, Phys. Fluids, vol. 9, 1997, 1.
- [7] Ho B.P., Leal L.G., *The creeping motion of liquid drops through a circular tube of comparable diameter*, J. Fluid Mech., vol. 71, 1975, 361.
- [8] Kung D.M., Olbricht W.L., *The interaction and coalescence of liquid drops in flow through a capillary tube*, J. Colloid Interface Sci., 1987, vol. 120, 229.
- [9] Olbricht W.L., Kung D.M., *The deformation and breakup of liquid drops in low Reynolds number flow through a capillary*, Phys. Fluids, 1992, vol. 4, 1347.
- [10] Martínez M.J., Udell, K. S., *Axisymmetric creeping motion of drops through circular tubes*, J. Fluid Mech., vol. 210, 1990, 565.
- [11] Kistler, S. F. y Scriven, L. E., *Coating Flows*, en J. R. A. Pearson and S. M. Richardson (eds), *Computational Analysis of Polymer Processing*, Applied Science Publishers, New York, 1983, 283.
- [12] Hetsroni G., Haber S y Wacholder E., *The flow field in and around a droplet moving axially within a tube*, J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, 689.
- [13] Hyman W.A., Skalak R., *Viscous flow of a suspension of liquid drops in a cylindrical tube*, Appl. Sci. Res., 1972, vol. 26, 27.