

ESQUEMA LAGRANGIANO A MALLA FIJA PARA COLADA CONTINUA DE METALES

Víctor D. Fachinotti, Alberto Cardona
Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería
CONICET - Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450, 3000, Santa Fe, ARGENTINA

RESUMEN

Se presenta un método para el análisis de tensiones y deformaciones en una barra de metal a su paso por una región fija del espacio. Dicha región constituye el dominio de interés del problema y está definida por los distintos segmentos de la máquina de colada continua. Se supone que el proceso ha alcanzado el régimen estacionario. El metal solidificado es modelado como un sólido inelástico estándar con endurecimiento isotrópico. El problema se define siguiendo un enfoque Lagrangiano, lo que evita considerar efectos advectivos y facilita la integración de las ecuaciones constitutivas del material en el tiempo. Con ese fin, se emplea el esquema (implícito) retro-Euler en diferencias finitas. La discretización espacial se lleva a cabo sobre el dominio de interés. El historia de la deformación en una partícula que ocupa un punto de muestreo de la malla fija en un instante dado se determina por seguimiento de la partícula, lo cual resulta trivial debido a hipótesis usuales en el análisis de colada continua: dominio casi cilíndrico y campo de velocidades constante y uniforme. Las ecuaciones no lineales de equilibrio, obtenidas para elementos finitos mixtos, son linealizadas exactamente (método de Newton-Raphson).

ABSTRACT

We present a method for the stress and strain analysis in a strand of metal while it is passing through a spatial fixed region. This region constitutes the domain we are interested in and is defined by the different segments of the continuous casting machine. The process is assumed under steady state. The solidified metal is modeled as an inelastic standard solid with isotropic hardening. The problem is defined using the Lagrangian approach, which avoids considering advection effects and facilitates integrating the material constitutive equations in time. The backward-Euler (implicit) finite difference scheme is applied to this end. Spatial discretization is carried over the domain of interest. The deformation history of a particle occupying a sampling point of the fixed mesh at a given instant is determined by particle tracking, which turns to be trivial due to usual hypothesis in continuous casting analysis: quasi-cylindrical domain and constant and uniform velocity field. The non-linear equilibrium equations, obtained for mixed finite elements, are exactly linearized (Newton-Raphson method).

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo apunta a la determinación de las tensiones y deformaciones que se originan en una barra de metal colado, o más precisamente en su cáscara solidificada, a su paso por el dominio de interés conformado por los distintos segmentos de la máquina de colada continua. Como en todo problema de flujo, resulta de fundamental importancia la relación entre los movimientos del material y de la malla surgida de la discretización espacial del dominio de definición

del problema. Al respecto, existen dos enfoques básicos: definir el problema sobre los puntos del espacio por los que pasa el material (formulación Euleriana), o bien sobre las partículas del material (formulación Lagrangiana).

El hecho de que el dominio de interés sea una región fija del espacio induce a adoptar la primera opción. Sin embargo, la descripción del material se complica por la presencia de términos advectivos en las ecuaciones constitutivas, a lo que debe sumarse en materiales inelásticos la necesidad de conocer la historia de deformación de cada partícula que ocupe a cada instante cada punto de muestreo de la discretización.

La formulación Lagrangiana sortea esos inconvenientes, aunque usualmente a expensas de discretizar no ya el dominio de interés sino una porción dada del material. Considerando que la barra de metal colado sufre pequeñas deformaciones y su sección transversal varía mínimamente en todo el proceso, prácticamente no se requiere remallado alguno a medida que el material avanza –ello es particularmente cierto si, como se procede habitualmente, se desprecia la conicidad del molde y la curvatura de la barra–. Pero el seguimiento de la malla a efectos de registrar la historia de deformación del material obliga a realizar tantos análisis como pasos se hayan tomado en la discretización del proceso en el tiempo.

Para reducir el costo computacional a menudo se considera sólo una sección transversal de la barra, o bien una delgada rodaja de ella, que se supone sometida a un estado plano de deformación. Esta alternativa resulta poco precisa por razones obvias: la hipótesis de deformación plana es difícil de sostener en un proceso a lo largo del cual varían tanto las condiciones de borde como el campo de temperaturas determinante de las propiedades termofísicas del material, lo cual es más marcado cuando se pasa de un elemento de la máquina a otro.

Un intento por reunir las características más favorables de uno y otro enfoque lleva a los métodos Lagrangiano-Eulerianos (LE) mixtos. Entre estos se cuentan los métodos Lagrangiano-Eulerianos arbitrarios (ALE), cuyo nombre refiere al movimiento arbitrario de la malla con respecto al material. La técnica consiste en calcular el incremento de las variables de estado en puntos de muestreo materiales (paso Lagrangiano), y luego transportar por convección esos incrementos a los puntos de muestreo de la malla (paso Euleriano). Al implementar un esquema de este tipo para el análisis del proceso de colada continua [1], suponiendo la malla fija y usando una técnica de volúmenes finitos tipo Lax-Wendroff para el remapeo Euleriano [2], encontramos resultados similares en cuanto a precisión y costo a los obtenidos con la técnica Lagrangiana.

Otros métodos LE son los de seguimiento de la partícula (PT, por “Particle Tracking”). Dado un punto de muestreo de la malla, que está fija en el espacio, se hace un seguimiento de la historia de la partícula que ocupa dicho punto a cada instante. Si bien el algoritmo de seguimiento es normalmente costoso (ver por ejemplo, [3]), las peculiaridades del problema de colada continua en régimen estacionario lo tornan prácticamente trivial: a la simpleza de un dominio casi cilíndrico, debe sumarse que la velocidad de las partículas sólidas puede asimilarse a la velocidad nominal de colada, a menos del término infinitesimal de velocidad de deformación.

Basados en esas consideraciones, proponemos una formulación Lagrangiana extendida solamente al material que ocupa el dominio de interés, que es el que ha de discretizarse. La historia de la partícula que ocupa un punto de muestreo de la malla es reconstruida siguiendo su trayectoria (trivial) previa.

DEFINICIÓN DEL MATERIAL

Definimos el metal solidificado como un material viscoplástico estándar [4] con endurecimiento isotrópico que obedece al criterio de fluencia de von Mises, cuya regla de flujo puede escribirse como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i = \dot{\gamma} \mathbf{n}, \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ es la deformación inelástica (el punto superpuesto denota su tasa), $\mathbf{n} = \mathbf{s}/\|\mathbf{s}\|$, siendo $\mathbf{s} = \text{dev } \boldsymbol{\sigma}$ es el desviador de la tensión de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, $\|\mathbf{s}\| = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ su norma, y el multiplicador $\dot{\gamma}$ está definido por la ley

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} g(f) h(\alpha), \quad (2)$$

siendo η un parámetro del material denominado fluidez, $g(f)$ una función escalar no negativa de la función de fluencia f , tal que $g(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$. La función de fluencia de von Mises está dada por

$$f = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [R(\alpha) + \sigma_Y], \quad (3)$$

donde $R(\alpha)$ es una función de la variable interna α que define la expansión de la superficie de fluencia y σ_Y es la tensión inicial de fluencia. Por su parte, el término $h(\alpha)$ sólo aparece en materiales con endurecimiento viscoso multiplicativo (en cuyo caso, $R = 0$).

Adoptamos como variable de endurecimiento la deformación inelástica equivalente acumulada, cuya tasa resulta entonces

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}. \quad (4)$$

INTEGRACIÓN TEMPORAL DE LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Las leyes de evolución (1) y (4) se discretizan empleando el método de diferencias finitas hacia atrás (esquema implícito conocido como retro-Euler). Frente a un incremento $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ del campo de deformaciones en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, el estado de una partícula característica \mathbf{X} al instante t_{n+1} queda entonces definido por las ecuaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t_n) + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t_{n+1}), \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{X}, t_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{X}, t_n) + \Delta t \dot{\gamma}(\mathbf{X}, t_{n+1}) \mathbf{n}(\mathbf{X}, t_{n+1}), \quad (6)$$

$$\alpha(\mathbf{X}, t_{n+1}) = \alpha(\mathbf{X}, t_n) + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta t \dot{\gamma}(\mathbf{X}, t_{n+1}). \quad (7)$$

Quedan definidas entonces como variables dependientes la deformación elástica (reversible) usando la hipótesis de descomposición aditiva válida para pequeñas deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{X}, t_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t_{n+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{X}, t_{n+1}), \quad (8)$$

y la tensión de Cauchy, dada para materiales isotrópicos linealmente elásticos por la ley de estado:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t_{n+1}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t_{n+1}) \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{X}, t_{n+1}), \quad (9)$$

donde \mathbf{C} es el tensor de módulos elásticos

$$C_{ijpq} = 2\mu I_{ijpq} + \lambda \delta_{ij} \delta_{pq}, \quad (10)$$

siendo μ y λ los coeficientes de Lamé, δ_{ij} la delta de Kronecker ($= 1$ si $i = j$, $= 0$ si no) que define los componentes del tensor identidad de segundo rango δ , $I_{ijpq} = \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})$ un componente del tensor identidad de cuarto rango.

Sea \mathbf{X}^n la partícula que ocupa actualmente ($t = t_{n+1}$) la posición que detentaba \mathbf{X} en el instante anterior ($t = t_n$), o sea:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t_n) = \mathbf{x}(\mathbf{X}^n, t_{n+1}). \quad (11)$$

Teniendo presente la hipótesis de estacionaridad, el estado de la partícula \mathbf{X} en el instante t_n coincidirá con el estado actual de la partícula \mathbf{X}^n :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t_n) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}^n, t_{n+1}), \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{X}, t_n) = \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{X}^n, t_{n+1}), \quad (13)$$

$$\alpha(\mathbf{X}, t_n) = \alpha(\mathbf{X}^n, t_{n+1}). \quad (14)$$

La regla de flujo discreta queda entonces completamente definida en el instante actual t_{n+1} ¹

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{X}^n) + \Delta t \dot{\gamma}^i, \quad (15)$$

$$\alpha = \alpha(\mathbf{X}^n) + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta t \dot{\gamma}. \quad (16)$$

FORMULACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Sea la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ descompuesta en sus partes desviadora \boldsymbol{s} y esférica $p\boldsymbol{\delta}$:

$$\boldsymbol{s} = 2\mu \text{dev } \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (17)$$

$$p = \kappa \varepsilon_{ii}^e, \quad (18)$$

donde $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ es el módulo de compresibilidad del material.

La regla de flujo (1) implica que la deformación inelástica evoluciona sin cambio de volumen, por lo tanto $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^e$. Es de esperar entonces que a medida que la deformación aumenta el material tienda a comportarse como un sólido incompresible. La formulación típica por elementos finitos, donde se interpola sólo el campo de desplazamientos \mathbf{u} , produce aproximaciones muy pobres en problemas de medios incompresibles o cuasi-incompresibles. En ese caso se recurre frecuentemente a una formulación mixta pensando en la "presión"² p como una incógnita adicional y exigiendo que su ecuación constitutiva (18) se verifique en forma débil. Definimos las funciones de desplazamientos y "presiones" como

$$\mathbf{u} = N\mathbf{U}, \quad p = N_p p, \quad (19)$$

siendo N y N_p las funciones de forma de desplazamientos y "presiones" y \mathbf{U} y p los vectores de desplazamientos y "presiones" nodales. Generalmente, las interpolaciones son de distinto orden, y consecuentemente los nodos de desplazamiento y "presión" no coinciden. Ver [5] para la elección apropiada de N y N_p .

La formulación mixta tipo Galerkin (espacio de funciones de prueba y de peso coincidentes) produce las siguientes ecuaciones de equilibrio linealizadas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_d & \mathbf{K}_p \\ \mathbf{K}_p^T & -V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

¹En adelante, siempre que no se indique la partícula y/o el instante de evaluación, nos estaremos refiriendo por omisión a la partícula típica \mathbf{X} en el instante actual t_{n+1} .

²La tensión hidrostática p coincide con la presión hidrostática sólo en el caso incompresible ($\kappa = \infty$).

siendo \mathbf{F} el vector de cargas nodales y

$$\mathbf{K}_d = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{U}} dV, \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_p = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta \mathbf{N}_p dV, \quad (22)$$

$$\mathbf{V} = \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p dV, \quad (23)$$

donde Ω es el dominio discretizado, $\mathbf{B} = \nabla^T \mathbf{N}$ es la matriz gradiente definiendo la aproximación al campo de deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}. \quad (24)$$

Nótese que en la formulación de elementos finitos los tensores simétricos de segundo rango se hallan mapeados en vectores: $\mathbf{s} = [s_{11} s_{22} s_{33} s_{12} s_{23} s_{13}]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} 2\varepsilon_{12} 2\varepsilon_{23} 2\varepsilon_{13}]^T$ y $\boldsymbol{\delta} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

La técnica de Newton-Raphson [6], que garantiza tasa de convergencia cuadrática en la solución de problemas no lineales, requiere el cálculo exacto de la matriz de coeficientes de la ecuación (20), cuyo único desafío recae en el cálculo exacto de

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial U_k} = 2\mu \left[\left(I_{ijpq} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq} \right) \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial U_k} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}^i}{\partial U_k} \right]. \quad (25)$$

La derivada de $\boldsymbol{\varepsilon}$ con respecto a U_k está definida con la matriz gradiente \mathbf{B} , prestando atención al ordenamiento vectorial de $\boldsymbol{\varepsilon}$ en la relación (24).

Por su parte, definida $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ por la ecuación (15), su derivada resulta

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^i}{\partial U_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^i}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n} + n_{ij} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial U_k} \Delta t + \dot{\gamma} \frac{\partial n_{ij}}{\partial U_k} \Delta t. \quad (26)$$

Para materiales estándar con criterio de fluencia de von Mises, hallamos:

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial U_k} = \omega \left[2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}^i}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n} + \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}^i}{\partial U_k} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}^i}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n} \right) + \left(gh' - \sqrt{\frac{2}{3}} R' hg' \right) \frac{\partial \alpha}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n} \right], \quad (27)$$

donde

$$\Theta^{-1} = \eta - \sqrt{\frac{2}{3}} gh' \Delta t + \left(2\mu + \frac{2}{3} R' \right) hg' \Delta t. \quad (28)$$

Por su parte, la derivada de \mathbf{n} toma la forma

$$\frac{\partial n_{ij}}{\partial U_k} = \frac{2\mu}{\|\mathbf{s}\| + 2\mu \dot{\gamma} \Delta t} (I_{ijpq} - n_{ij} n_{pq}) \left[\left(I_{pqrs} - \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{rs} \right) \frac{\partial \varepsilon_{rs}}{\partial U_k} - \frac{\partial \varepsilon_{pq}^i}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n} \right]. \quad (29)$$

Introduciendo las expresiones (27) y (29) en la ecuación (26), ésta puede describirse como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^i}{\partial U_k} &= \left[\omega \left(I_{ijqp} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq} \right) + \theta n_{ij} n_{pq} \right] \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial U_k} + \\ & \left[(1 - \omega) I_{ijqp} - \theta n_{ij} n_{pq} \right] \frac{\partial \varepsilon_{pq}^i}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n} + \theta n_{ij} \frac{\partial \alpha}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n}, \end{aligned} \quad (30)$$

con

$$\omega = \frac{2\mu\dot{\gamma}\Delta t}{\|\mathbf{s}\| + 2\mu\dot{\gamma}\Delta t}, \quad \theta = 2\mu h g' \Theta \Delta t - \omega, \quad \vartheta = \left(g h' - \sqrt{\frac{2}{3}} R' h g' \right) \Theta \Delta t. \quad (31)$$

Reemplazando (30) en la ecuación (25), llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{ij}^i}{\partial U_k} = & 2\mu \left[(1 - \omega) \left(I_{ijqp} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq} \right) - \theta n_{ij} n_{pq} \right] \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial U_k} - \\ & 2\mu [(1 - \omega) I_{ijqp} - \theta n_{ij} n_{pq}] \frac{\partial \varepsilon_{pq}^i}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n} - 2\mu \vartheta n_{ij} \frac{\partial \alpha}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n}. \end{aligned} \quad (32)$$

Si calculamos la derivada de la tensión total σ ,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^i}{\partial U_k} = C_{ijpq}^i \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial U_k} - 2\mu [(1 - \omega) I_{ijqp} - \theta n_{ij} n_{pq}] \frac{\partial \varepsilon_{pq}^i}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n} - 2\mu \vartheta n_{ij} \frac{\partial \alpha}{\partial U_k} \Big|_{\mathbf{x}^n}, \quad (33)$$

podemos identificar el clásico tensor de módulos inelásticos C^i [7], de componentes

$$C_{ijpq}^i = C_{ijpk} - 2\mu \left[\omega \left(I_{ijpq} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq} \right) + \theta n_{ij} n_{pq} \right]. \quad (34)$$

La ecuación (33) evidencia entonces que la presente formulación cubre la formulación clásica del problema de evolución de sólidos inelásticos en reposo (ver [7]).

REFERENCIAS

- [1] A. E. Huespe, A. Cardona y V. Fachinotti. Thermomechanical model of a continuous casting process. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 182:439-455, 2000.
- [2] H. C. Stoker y J. Huétink. The arbitrary Lagrangian-Eulerian method in large deformation problems. In *Numerical Methods in Engineering '96*, pages 184-189. John Wiley & Sons Ltd., 1996.
- [3] H.-P. Cheng, J.-R. Cheng y G.-T. Yeh. A particle tracking technique for the Lagrangian-Eulerian finite element method in multi-dimensions. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 39:1115-1136, 1996.
- [4] J. Lemaitre y J.-L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1994.
- [5] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1987.
- [6] O. C. Zienkiewicz y R. L. Taylor. *El Método de los Elementos Finitos*, volumen 2: Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y No Linealidad. McGraw-Hill, CIMNE, 1995.
- [7] J. C. Simo y T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New York, 1998.