

**ANÁLISIS POR RAYLEIGH-RITZ DE
LAS FRECUENCIAS NATURALES DE UNA
PLACA DELGADA CUADRANGULAR**

Agustín G. Rauschert, José Converti
Centro Atómico Bariloche, 8400, Río Negro, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se estiman las frecuencias naturales de placas delgadas mediante el método de Rayleigh-Ritz. Mediante una sencilla transformación de coordenadas, es posible con una formulación obtener resultados para distintas formas incluidas las cuadradas, rectangulares y oblicuas, y distintas condiciones de contorno. Se presentan numerosos ejemplos, comparando los resultados con los de procedimientos alternativos.

ABSTRACT

The Rayleigh-Ritz method is used to estimate the natural frequencies of thin plates (Kirchhoff's plates). Results for different shapes are obtained from a simple coordinate transformation. This includes square, rectangular and skew, with different boundary condition. Several examples are presented and the results are compared with alternative procedures.

2. DESARROLLO TEORICO

Las expresiones de la energía potencial de deformación y energía cinética provocadas por la flexión para una placa de delgada, sin efectos de corte e inercia rotatoria, en coordenadas rectangulares se encuentran dadas por [1]:

$$U = \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d\Omega \quad (1)$$

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_{\Omega} \dot{w}^2 d\Omega \quad (2)$$

Donde D es la rigidez a la flexión, ρ la densidad por unidad de área, ν el coeficiente de Poisson, h el espesor y w es el desplazamiento transversal de la placa. El Lagrangiano esta dado por

$$\Pi = U - T \quad (3)$$

Aproximando w de la siguiente forma: $\tilde{w} = \sum_i^N p_i W_i(x, y)$, reemplazando en las expresiones de las energías y determinando el extremo del funcional de la energía, se obtiene un conjunto de ecuaciones

homogéneas en termino de los coeficientes, lo que deja el siguiente problema de autovalores y autovectores:

$$(\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M})\{p\} = 0 \quad (4)$$

en donde \mathbf{M} corresponde a la matriz de masa en la cual la expresión de sus elementos esta dada por.

$$[\mathbf{M}_{ij}] = \rho h \int_{\Omega} W_i W_j d\Omega \quad (5)$$

y \mathbf{K} es la matriz de rigidez descrita por

$$[\mathbf{K}_{ij}] = \mathbf{D} \int_{\Omega} (W_{i,xx} W_{j,xx} + W_{i,yy} W_{j,yy} + \nu W_{i,xx} W_{j,yy} + \nu W_{j,xx} W_{i,yy} + 2(1-\nu) W_{i,xy} W_{j,xy}) d\Omega \quad (6)$$

Transformación del dominio y funciones de forma

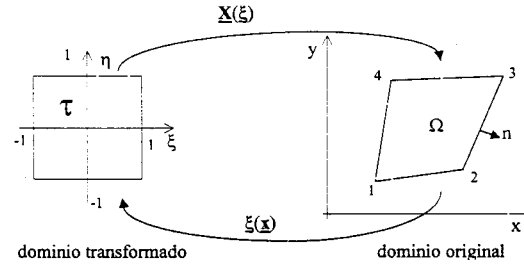


Fig. 1: Transformación del dominio de integración

A partir de la siguiente transformación [2] mapeamos el dominio original (fig 1) en otro, donde elegiremos e integraremos las funciones de forma.

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) X_i^e \quad ; \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) Y_i^e \quad (7)$$

donde X_i^e, Y_i^e son las coordenadas del vértice i del dominio y $N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$ con ξ_i, η_i como coordenadas del vértice i del dominio transformado. Tomando como funciones de forma a los polinomios de Legendre, que son ortogonales y se encuentran definidos en el intervalo $[-1, 1]$, obtendremos

$$W_i(x, y) = W_i[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] = \sigma_i(\xi, \eta) = P_\alpha(\xi) P_\beta(\eta) \quad (8)$$

donde P son los polinomios de Legendre de orden α y β e $i = (\alpha_{max} + 1)\alpha + \beta + 1$ con $\alpha, \beta = 0, \dots, \alpha_{max}, \beta_{max}$.

Con esto podremos transformar las integrales de los elementos de las matrices, obteniendo para la matriz de masa

$$[\mathbf{M}_{ij}] = \rho h \int_{\Omega} \sigma_i \sigma_j \mathcal{J}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \rho h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_\alpha(\xi) P_\beta(\eta) P_\alpha(\xi) P_\beta(\eta) \mathcal{J}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (9)$$

donde $\mathcal{J}(\xi, \eta)$ es el jacobiano de la transformación, y para la matriz de rigidez

$$[\mathbf{K}_{ij}] = \mathbf{D} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(W_{i,xx} W_{j,xx} + W_{i,yy} W_{j,yy} + \nu W_{i,xx} W_{j,yy} + \nu W_{j,xx} W_{i,yy} + 2(1 - \nu) W_{i,xy} W_{j,xy} \right) \mathcal{J}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (10)$$

Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno fueron impuestas mediante el método de Jen [3], en el cual éstas solo son satisfechas en ciertos puntos del contorno, completando (4) con la siguiente ecuación

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = 0 \quad (11)$$

con \mathbf{A} de $r \times n$, siendo r el número de condiciones impuestas y n el número de funciones de forma, y analizando mediante la descomposición en valores singulares (SVD) la matriz de restricciones \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^t \quad (12)$$

\mathbf{V} puede ser partida en $\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{V}_{nr} \quad \mathbf{V}_{n(n-r)} \right\}$ y el siguiente cambio de coordenadas es posible

$$\mathbf{p} = \mathbf{V}_{n(n-r)} \bar{\mathbf{p}} \quad (13)$$

obteniéndose al reemplazar (16) en (4) el siguiente problema de autovalores reducido

$$(\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \bar{\mathbf{p}} = 0 \quad (14)$$

donde $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{V}^t \mathbf{M} \mathbf{V}$ y $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{V}^t \mathbf{K} \mathbf{V}$ ω es la frecuencia angular.

A través de las siguientes expresiones se establecen las distintas condiciones vínculo estudiadas: simple soporte (S), empotrado (C) y libre (F)

$$w(x, y) \Big|_{\partial\Omega} = \sum_i P_i \sigma_i(\xi, \eta) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{S}) \quad (15)$$

$$w(\dot{x}, y) \Big|_{\partial\Omega} = w_{,n}(x, y) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{C}) \quad (16)$$

donde

$$w_{,n}(x, y) \Big|_{\partial\Omega} = \sum_i \frac{P_i}{J} \left[\sigma_{i,\xi} (a y_{,\eta} - b x_{,\eta}) + \sigma_{i,\eta} (b x_{,\xi} - a y_{,\xi}) \right] \Big|_{\partial\Omega} \quad (17)$$

siendo a y b las componentes del versor normal.

2. RESULTADOS NUMERICOS

Basándose en las ecuaciones anteriores se programaron y calcularon los parámetros de frecuencias $\lambda = \omega \sqrt{\rho h / D}$. El valor del coeficiente de Poisson utilizado en todos los ejemplos corresponde a 0.3, al igual que el módulo de elasticidad $E (=1)$ y la densidad de masa $\rho (=1)$. En las tablas correspondientes a cada uno se presentan también los valores de comparación.

Caso 1: Placa oblicua con bordes simplemente soportados

En el presente ejemplo se abarcan formas tales como el cuadrado, rectángulo y paralelogramos de distintos ángulos (Fig 1). El orden de los polinomios de Legendre utilizado es de 10. Los resultados se muestran en la tabla I.

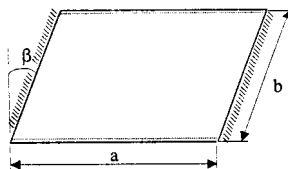


Fig. 2: Placa oblicua simplemente soportada

Tabla I: parámetro λ para una placa oblicua CSCS

a/b	β	MODO					
		1	2	3	4	5	6
1.0	0	28.950	54.743	69.327	94.585	102.21	129.09
		[28.95]	[54.75]	[69.32]	[94.58]	[102.2]	[129.1]
	30	36.971	64.276	93.034	100.78	137.75	142.72
		[36.96]	[64.27]	[93.00]	[100.8]	[137.7]	[142.7]
	45	52.554	83.608	123.31	137.55	168.09	193.76
		[52.49]	[83.59]	[123.3]	[137.4]	[168.0]	[193.5]
2.0	0	13.685	23.646	38.694	42.586	51.674	58.902
		[13.69]	[23.65]	[38.70]	[42.59]	[51.68]	[58.66]
	30	17.448	28.494	44.189	55.786	63.928	66.900
		[17.44]	[28.48]	[44.18]	[55.77]	[63.69]	[66.83]
	45	24.768	37.677	55.304	74.655	85.098	93.180
		[24.73]	[37.59]	[55.22]	[74.18]	[84.87]	[91.48]

*Valores entre [] corresponden a [4]

Caso 2: Placa Cuadrada

En este caso se conformo una placa cuadrada mediante el ensamble de dos placas (fig. 3a y b) de distinta forma a modo de test, mostrando los resultados comparados en la tabla II

Caso 3: Placa Octogonal

Aquí se presentan, mediante la utilización de tres elementos (fig. 4), los resultados obtenidos para una placa octogonal con sus bordes simplemente soportados. El octógono regular presentado es el

que resulta inscripto en una circunferencia de diámetro unitario, los resultados comparados están presentes en la tabla III, también pueden observarse algunos de los modos calculados

Tabla II: *parámetros λ para una placa cuadrada*

MODO	Caso a	Ref. [4]	Caso b	Ref. [4]
1	9.631	9.632	19.738	19.74
2	16.124	16.13	49.346	49.35
3	36.725	36.72	49.348	49.35
4	38.944	38.94	78.957	78.96
5	46.738	46.73	98.697	98.70
6	70.686	70.74	98.697	98.70

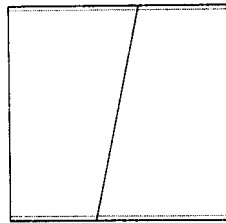


Fig. 3a: placa cuadrada simplemente soportada en dos de sus lados

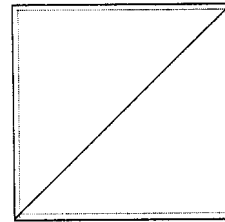


Fig. 3b: placa cuadrada simplemente soportada en su contorno

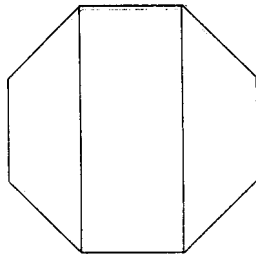


Fig. 4: octógono regular simplemente soportados en sus lados

Tabla III: *parámetros de frecuencias para una placa octogonal con simple soporte en sus lados*

MODO	Solución Actual	Ref. [5]
1	25.71	26.00
2	66.27	67.71
3	66.28	67.71
4	118.1	119.5
5	118.1	119.5
6	136.2	137.0

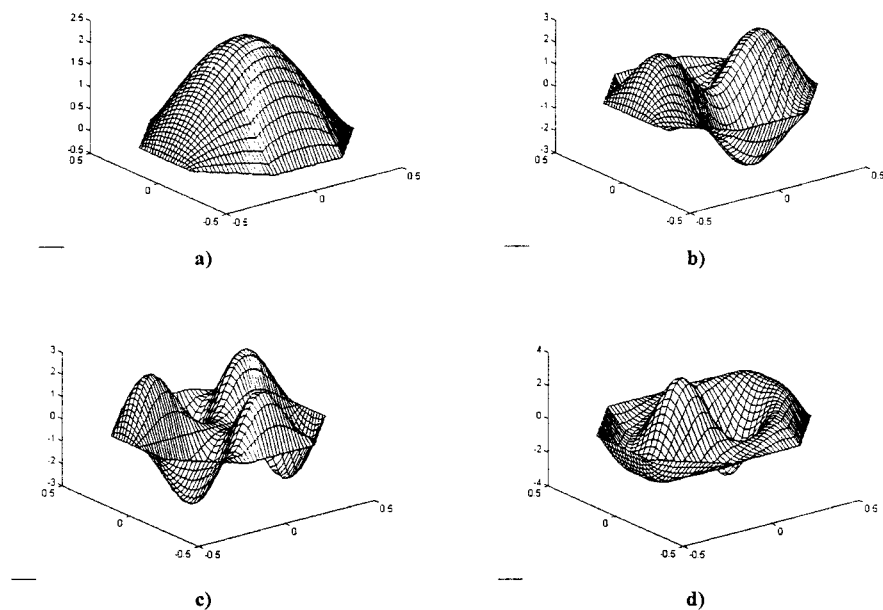


Fig. 5: Modos para una placa octogonal simplemente soportada a) primer, b)cuarto c)octavo y d)décimo modo

3. CONCLUSIONES

A través de las diferentes pruebas realizadas y con los resultados presentados, se observa que el método se comporta de buena forma, aceptando deformaciones importantes sin repercutir necesariamente en los resultados. El ensamblaje de varios elementos permite reproducir diversas formas más complejas, obteniendo un problema con una cantidad de grados de libertad que permite su fácil manejo.

4. REFERENCIAS

- [1] S. TIMOSHENKO, D.H. YOUNG, W. WEAVER JR, *Vibration problems in engineering, fourth edition*. John Wiley & Sons (1974).
- [2] KENNETH H. HUEBNER, *The finite element method of engineers, third edition*. John Wiley & Sons (1995).
- [3] C. W. JEN, D. A. JOHNSON and F. DUBOIS, *Journal of Sound and Vibration* (1995) **180**(2), 185-203. Numerical modal analysis of structures based on revised substructure synthesis approach.
- [4] K. M. LIEW, C. M. WANG, Y. XIANG, S. KITIPORNCHAI, *Vibration of Mindlin Plates: Programming the p-version Ritz Method*. Elsevier: Oxford, 1998.
- [5] K. M. LIEW, K. Y. LAM, *Trans ASME, Journal of Vibrations and Acoustics* (1991) 113, 182-186. A set of orthogonal plate functions for flexural vibration of regular polygonal plates.