

Modelo micropolar de Cosserat con aplicación de microplanos

Autores: ETSE⁽¹⁾, José Guillermo. NIETO⁽²⁾, María Marcela

(1) Universidad Nacional de Tucumán

(2) Universidad Nacional de Santiago del Estero

1. Resumen.

La teoría constitutiva de microplanos es utilizada para formular un modelo material para materiales cohesivo friccionales basado en los continuos micropolares de Cosserat. En ese sentido, la formulación macro del modelo resulta de la consideración de dos elementos o conceptos de su constitución a nivel micro: por un lado el concepto de microplanos (Bazant y Prat) que se sustenta en la hipótesis que la respuesta macro es generada a partir de la respuesta en una serie de planos a nivel micro, que pasan por el punto considerado del continuo y, en segundo término, la teoría de micropolar de Cosserat que tiene en cuenta un campo cinemático y estático generalizado mediante la incorporación de micro giros no compatibles con el campo de desplazamientos a nivel macro y, además, de cuplas tensionales. Estos dos conceptos se combinan en el presente trabajo para logra una formulación de Cosserat a nivel macro que brinda una alternativa enriquecedora para la descripción de comportamientos de materiales teniendo en cuenta su microestructura, su cinemática y su composición.

Las ecuaciones obtenidas sustentan la conclusión que la teoría original propuesta brinda un camino para calibrar los parámetros elásticos de Cosserat y un concepto interesante para lograr descripciones realistas del comportamiento de materiales caracterizados por planos o direcciones dominantes de gran actividad disipativa y por rigideces rotacionales.

2. Introducción.

Una de las teorías constitutivas que ha demostrado mayor capacidad y, particularmente, eficiencia, para reproducir el comportamiento no lineal de materiales cohesivo-friccionales es la teoría de microplanos, Bazant & Prat [1]. En la misma, la relación tensión-deformación a nivel macro o continuo se obtiene a partir de la contribución de una serie de microplanos según direcciones dominantes, que gobiernan el comportamiento material. Dicha contribución se la establece mediante una relación energética, basada en una igualdad entre el trabajo virtual macro y la suma de los trabajos virtuales en todos los microplanos. Desde su propuesta o formulación original, la teoría de microplanos fue extensivamente utilizada en el marco de teorías no lineales disipativas como la plasticidad y el daño continuo. Su gran ventaja radica en la simpleza de las ecuaciones constitutivas a nivel de microplanos, las cuales se plantean en término de 3 componentes (normal, tangencial y volumétrica), lo cual contribuye notablemente a lograr implementaciones computacionales eficientes y robustas.

Además de la teoría de microplanos, la teoría micropolar de Cosserat brinda otra forma de tener en cuenta la característica de la microestructura en la respuesta global, si bien la misma se basa en potencial otros aspectos de la respuesta micro, tal cual es su respuesta rotacional y rigidez flexional, aspectos no tenidos en cuenta por la teoría clásica de Boltzmann.

En el presente trabajo se combinan ambas teorías para lograr, en el marco de los continuos micropolares, un modelo constitutivo de Cosserat basado en microplanos.

Primeramente se establecen las ecuaciones que caracterizan la cinemática y estática de Cosserat. Luego se formula el modelo constitutivo, partiendo de las hipótesis fundamentales que gobiernan la teoría de microplanos.

La formulación que se obtiene brinda una alternativa de gran interés y potencialidad para describir el comportamiento de respuesta de materiales cohesivo-friccionales.

3. Continuo Micropolar de Cosserat basado en Microplanos.

En el modelo Micropolar de Cosserat se plantea como incógnita la relación constitutiva en el elemento entre las microcurvaturas κ_{ij} y los momentos tensionales μ_{ij} que se plantea en este trabajo a partir de la teoría de microplanos, dando lugar a una formulación diferenciada de la teoría micropolar de Cosserat.

Esto equivale a decir ahora que reconocemos no solamente microcurvaturas (que ya existían en la teoría de Cosserat) sino además que el volúmen alrededor del punto está caracterizado por microplanos perpendiculares que giran por efecto de las microrotaciones. Por ello se abandona al volúmen continuo y se estudia en su lugar a los microplanos característicos.

Las deformaciones que se producen en los microplanos de normal n_i por efecto de las curvaturas κ_{ij} del tensor macroscópico de microcurvaturas de Cosserat, son una longitudinal y otra normal según las proyecciones

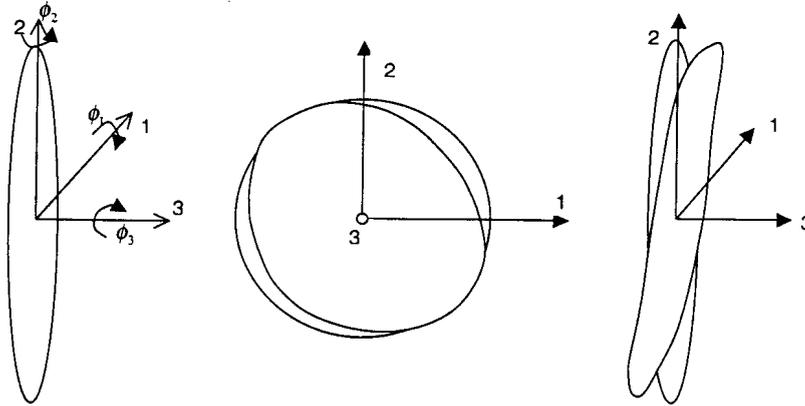
$$\kappa_N = \kappa_{ij} n_i n_j \quad (1)$$

que produce deformaciones que descansan sobre el microplano y

$$\kappa_{Lr} = \kappa_{rj} n_j - \kappa_N n_r = \kappa_{rj} n_j - \kappa_{ij} n_i n_j n_r = \kappa_{ij} n_j \delta_{ir} - \kappa_{ij} n_i n_j n_r \quad (2)$$

cuyo efecto es producir giros variables en las direcciones del microplano. Tendrá por lo tanto dos componentes de deformación ya que si $i=r$ la componente en esta dirección se anula.

Las microcurvaturas producidas por los microgiros sobre un microplano de normal n_i se grafican para $i=3$



Microplano de normal n_3

Microcurvaturas Normales

Microcurvaturas tangenciales

κ_N

κ_{L2}

Las componentes cartesianas de las microcurvaturas tangenciales producen rotaciones diferenciadas alrededor de los ejes 1 y 2 que alabean al plano y producen efecto de ahuecado sobre el material.

$$\kappa_N = \kappa_{13} n_3 n_1 + \kappa_{23} n_3 n_2$$

La existencia de microcurvaturas en el microplano trae aparejado valores de giros

$$\theta_j = R\kappa_{ij}n_i$$

En el plano 1-2 el valor de θ viene dado por

$$\theta_3 = R\kappa_{i3}n_i = R\kappa_{13}n_1 + R\kappa_{23}n_2$$

Las deformaciones longitudinales tendrán el valor

$$\varepsilon_N = \frac{d\theta_3}{dn_j} = R\kappa_{ij}n_i n_j = R\kappa_{13}n_1 n_3 + R\kappa_{23}n_2 n_3$$

Las microcurvaturas tendrán la expresión

$$\kappa_N = \frac{\varepsilon_N}{R} = \kappa_{ij}n_i n_j$$

$$\kappa_{L1} = \kappa_{12}n_2 + \kappa_{13}n_3 - \kappa_N n_1 = \kappa_{12}n_2 \delta_{11} + \kappa_{13}n_3 \delta_{11} - \kappa_{13}n_3 n_1 n_1 - \kappa_{23}n_3 n_2 n_1$$

$$\kappa_{L2} = \kappa_{21}n_1 + \kappa_{23}n_3 - \kappa_N n_1 = \kappa_{21}n_1 \delta_{22} + \kappa_{23}n_3 \delta_{22} - \kappa_{13}n_3 n_1 n_2 - \kappa_{23}n_3 n_2 n_2$$

Hipótesis I

Las deformaciones normales, tangenciales y longitudinales sobre un microplano de normal n_i están dadas a través de los tensores de deformaciones y microcurvaturas macroscópicos ε_{ij} y κ_{ij} , [3] en esa dirección

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{ij} n_i n_j$$

$$\varepsilon_{Tr} = \varepsilon_{\sigma_j} n_j - \varepsilon_N n_i = (\delta_{\sigma_j} n_j - n_i n_j n_r) \varepsilon_{ij}$$

$$\kappa_N = \kappa_{ij} n_i n_j$$

$$\kappa_{Lr} = \kappa_{\sigma_j} n_j - \kappa_N n_r = \kappa_{\sigma_j} n_j - \kappa_{ij} n_i n_j n_r = (\delta_{\sigma_j} n_j - n_i n_j n_r) \kappa_{ij}$$

Hipótesis II

Relación tensión - deformación

La existencia de deformaciones ε_N y ε_{Tr} y de microcurvaturas κ_{Li} y κ_N supone la existencia de tensiones y momentos tensionales

$$\sigma_{Ti} = \sigma_{Ti}(\varepsilon_{Ti}) \quad \text{y} \quad \sigma_N = \sigma_N(\varepsilon_N)$$

$$\mu_{Li} = \mu_{Li}(\kappa_{Li}) \quad \text{y} \quad \mu_N = \mu_N(\kappa_N)$$

que dependen exclusivamente de estas deformaciones y microcurvaturas de modo que

$$\sigma_{\tau_i} = E_{\tau}^u \varepsilon_{\tau_i} \quad (3)$$

$$\sigma_N = E_N^u \varepsilon_N \quad (4)$$

$$\mu_{L_i} = E_L^w \kappa_{L_i} \quad (5)$$

$$\mu_N = E_N^w \kappa_N \quad (6)$$

en el caso elástico.

Ecuaciones de trabajos virtuales en el modelo de microplanos micropolar

Dos ecuaciones de trabajos virtuales se plantean en el modelo micropolar, la correspondiente al trabajo de las tensiones [2] y la del trabajo de los momentos tensionales

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = 2 \int_{\Omega} [\sigma_N \delta \varepsilon_N + \sigma_{\tau_r} \delta \varepsilon_{\tau_r}] d\Omega$$

$$\int_V \mu_{ij} \delta \kappa_{ij} dV = 2 \int_{\Omega} [\mu_N \delta \kappa_N + \mu_{\tau_r} \delta \kappa_{\tau_r}] d\Omega$$

Desarrollando la primera ecuación

$$\frac{4\pi}{3} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = 2 \int_{\Omega} [\sigma_N \delta \varepsilon_{ij} n_i n_j + \sigma_{\tau_r} (\delta_{rn} n_j - n_i n_j n_r) \delta \varepsilon_{ij}] d\Omega$$

Las deformaciones virtuales pueden sacarse fuera de la integral y reemplazar las tensiones por las expresiones (3) y (4)

$$\frac{4\pi}{3} E^u \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} = 2 \delta \varepsilon_{ij} \int_{\Omega} [E_N^u \varepsilon_{kl} n_k n_l n_i n_j + E_{\tau}^u \varepsilon_{kl} (\delta_{rn} n_l - n_i n_k n_r) (\delta_{rn} n_j - n_i n_j n_r)] d\Omega$$

Integrando el segundo miembro se tiene

$$E^u \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} = \frac{3}{2\pi} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} \left[E_N^u \int_{\Omega} n_k n_l n_i n_j d\Omega + E_{\tau}^u \int_{\Omega} (\delta_{rk} \delta_{rn} n_l - n_i n_j n_r n_l) d\Omega \right]$$

$$E^u \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} = \frac{3}{2\pi} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} \left[E_N^u \frac{2\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + E_{\tau}^u \frac{2\pi}{3} (\delta_{ik} \delta_{jl}) - E_{\tau}^u \frac{2\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right]$$

En la forma mas general de los tensores de cuarto orden

$$E^u \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} = \frac{3}{2\pi} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} \left[E_N^u \frac{2\pi}{15} (I_2 \otimes I_2 + 2I_4^s) + E_{\tau}^u \frac{2\pi}{3} (I_4^s + I_4^A) - E_{\tau}^u \frac{2\pi}{15} (I_2 \otimes I_2 + 2I_4^s) \right]$$

Sacando factores comunes

$$E^u \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} \left[I_2 \otimes I_2 \left(\frac{1}{5} E_N^u - \frac{1}{5} E_{\tau}^u \right) + I_4^s \left(\frac{2}{5} E_N^u + E_{\tau}^u - \frac{2}{5} E_{\tau}^u \right) + I_4^A E_{\tau}^u \right]$$

De donde, comparando con la forma del tensor de rigidez isotrópico elástico lineal se tiene

$$\phi_1 = \frac{1}{5} E_N'' - \frac{1}{5} E_T'' = \frac{1}{5} (\phi_2 + 4\phi_3) - \frac{1}{5} (\phi_2 - \phi_3) = \phi_3$$

$$\phi_2 + \phi_3 = \frac{2}{5} E_N'' + \frac{3}{5} E_T''$$

$$\phi_2 - \phi_3 = E_T'' = 2G_C$$

$$\phi_2 + \phi_3 = \frac{2}{5} E_N'' + \frac{3}{5} (\phi_2 - \phi_3) \Rightarrow E_N'' = \phi_2 + 4\phi_3$$

Desarrollando de igual forma la segunda ecuación de trabajos virtuales

$$\int_V \mu_{ij} \delta \kappa_{ij} dV = 2 \int_{\Omega} [\mu_N \delta \kappa_{ij} n_i n_j + \mu_L \delta \kappa_{ij} n_j \delta_{ri} - \mu_L \delta \kappa_{ij} n_i n_j n_r] d\Omega$$

Reemplazando por los valores de los momentos tensionales

$$\begin{aligned} \int_V E^{\omega} \kappa_{kl} \delta \kappa_{ij} dV &= 2 \int_{\Omega} [E_N^{\omega} \kappa_{kl} n_k n_l \delta \kappa_{ij} n_i n_j + E_L^{\omega} (\kappa_{kl} n_l \delta_{rk} - \kappa_{kl} n_k n_l n_r) \delta \kappa_{ij} n_j \delta_{ri}] d\Omega - \\ &- 2 \int_{\Omega} E_L^{\omega} (\kappa_{kl} n_l \delta_{rk} - \kappa_{kl} n_k n_l n_r) n_i n_j n_r \delta \kappa_{ij} d\Omega \end{aligned}$$

Desarrollando el segundo miembro e integrando el primero sobre la esfera de radio unitario

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3} E^{\omega} \kappa_{kl} \delta \kappa_{ij} &= 2 \int_{\Omega} [E_N^{\omega} \kappa_{kl} n_k n_l \delta \kappa_{ij} n_i n_j + E_L^{\omega} \kappa_{kl} n_l \delta_{rk} \delta \kappa_{ij} n_j \delta_{ri} - E_L^{\omega} \kappa_{kl} n_k n_l n_r \delta \kappa_{ij} n_j \delta_{ri}] d\Omega - \\ &- 2 \int_{\Omega} E_L^{\omega} \kappa_{kl} n_l \delta_{rk} n_i n_j n_r \delta \kappa_{ij} d\Omega + 2 \int_{\Omega} E_L^{\omega} \kappa_{kl} n_k n_l n_r n_i n_j n_r \delta \kappa_{ij} d\Omega \end{aligned}$$

Integrando el segundo miembro se tiene

$$\begin{aligned} E^{\omega} \kappa_{kl} \delta \kappa_{ij} &= \frac{1}{5} E_N^{\omega} \kappa_{kl} \delta \kappa_{ij} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + E_L^{\omega} \kappa_{kl} \delta \kappa_{ij} (\delta_{ik} \delta_{jl}) - \\ &- \frac{1}{5} E_L^{\omega} \kappa_{kl} \delta \kappa_{ij} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{5} E_L^{\omega} \kappa_{kl} \delta \kappa_{ij} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \\ &+ \frac{1}{5} E_L^{\omega} \kappa_{kl} \delta \kappa_{ij} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned}$$

En términos de las componentes del tensor isotrópico

$$E^{\omega} \kappa_{ij} \delta \kappa_{ij} = \frac{1}{5} E_N^{\omega} \kappa_{ij} \delta \kappa_{ij} (I_2 \otimes I_2 + 2I_4^S) + E_L^{\omega} \kappa_{ij} \delta \kappa_{ij} (I_4^S + I_4^A) - \frac{1}{5} E_L^{\omega} \kappa_{ij} \delta \kappa_{ij} (I_2 \otimes I_2 + 2I_4^S)$$

$$E^{\omega} = I_2 \otimes I_2 \left(\frac{1}{5} E_N^{\omega} - \frac{1}{5} E_L^{\omega} \right) + I_4^S \left(\frac{2}{5} E_N^{\omega} - \frac{2}{5} E_L^{\omega} + E_L^{\omega} \right) + I_4^A E_L^{\omega}$$

Se determina la relación con las constantes del Tensor de rigidez isotrópico elástico lineal

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{E_N^{\omega} - E_L^{\omega}}{5} \\ \psi_2 + \psi_3 &= \frac{2E_N^{\omega} + 3E_L^{\omega}}{5} \\ \psi_2 - \psi_3 &= E_L^{\omega} \end{aligned}$$

Esta es la solución de la formulación constitutiva de continuo Cosserat sobre la base del planteo de microplanos. Esta será tenida en cuenta para la implementación computacional del modelo tanto en el marco de comportamiento lineal elástico como no lineal elastoplástico.

4. Referencias.

- [1] Bazant, Pratt (1988).- Microplane Model for Brittle- Plastic Material.- I :Theory. II :Verification. Journal Of Engineering Mechanics. ASCE. Vol. 114. N° 10. Pag. 1672-1688.
- [2] Carol. Bazant, Pratt.(1992)- New Explicit Microplane Model For Concrete: Theoretical Aspects And Numerical Implementation. International Journal of Solids and Structures. Vol. 29 N°9. Pag. 1173-1191.Great Britain
- [3] Carol, Bazant. (1996).- Damage And Plasticity in Microplane Theory. International Journal of Solids and Structures. Vol .14 N°29 Pag. 1807-1815