

## Adaptividad en fractomecánica tridimensional

R. Saliba<sup>(1)</sup> E. Taroco<sup>(2)</sup> C. Padra<sup>(1)</sup> R. Feijóo<sup>(2)</sup> M. Vénere<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup>Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche, 8400, Bariloche, Argentina.

<sup>(2)</sup>Laboratório Nacional de Computação Científica, Av. Getúlio Vargas, 333, Quitandinhas, RJ, Brazil.

<sup>(3)</sup>Univ. Nac del Centro - ISISTAN - CNEA - PLADEMA, 7000, Tandil, Argentina.

### RESUMEN

En este trabajo introducimos un estimador a posteriori del error adecuado para el análisis de la propagación de fracturas. Es conocido que la propagación depende solo del cambio de forma en la superficie del cuerpo. Para simular la misma se debe extender esta velocidad a todo el volumen del cuerpo. El estimador que presentamos, no solo toma en cuenta el error producido por la aproximación de elementos finitos del campo de desplazamientos, sino que también considera el error producido por el gradiente de velocidad. Esto produce una sucesión de mallas adecuadas para cada campo de velocidades prescripto.

### ABSTRACT

In this work we introduce an a posteriori error estimator appropriate for the analysis of cracked bodies in linear elastic fracture mechanics. It is well-known that the propagation depends only on the shape change in the surface of the body. To simulate it the velocity field must be extended to all the volume of the body. The estimator we present, consider the displacement approximation error and velocity gradient dependence. An adaptive finite element analysis is performed in order to ensure a good accuracy during the numerical evaluation of  $\tilde{\Pi}$

### FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Consideramos las ecuaciones de equilibrio (estático) de un cuerpo elástico:

$$\tilde{a}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{v}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in H_t \quad (1)$$

donde

$$\tilde{a}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_t} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \epsilon(\tilde{\mathbf{v}}) d\Omega_t \quad \tilde{f}(\tilde{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_t} \tilde{\mathbf{b}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\Omega_t + \int_{\Gamma_{t,N}} \tilde{\mathbf{t}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\Gamma_t \quad (2)$$

y, supondremos pequeños desplazamientos,

$$\begin{aligned} \epsilon(\tilde{\mathbf{u}}) &= (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^s = \frac{1}{2} [\nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T] \\ \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) &= \mathbf{C} \epsilon(\tilde{\mathbf{u}}) = [2\mu \mathbf{I} + \lambda(I \otimes I)] \epsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (3)$$

para todo  $t \in [0, T]$  y  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \in H_t = \{H^1(\Omega_t); \text{s.t. } \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{t,D}} = 0, \Gamma_t = \Gamma_{t,D} \cup \Gamma_{t,N}, \Gamma_{t,D} \cap \Gamma_{t,N} = \emptyset\}$ . Ambas formas son continuas sobre  $H_t$  y la forma bilineal es  $H_t$ -elíptica. De estas propiedades, en virtud del Lema de Lax-Milgram, la solución  $\tilde{\mathbf{u}}$  del problema (1) existe y es única. Entonces, es posible definir el funcional cuadrático

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &:= H^1(\Omega_t) \mapsto \Re \\ \tilde{\mathbf{u}} &\mapsto \tilde{\Pi}(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \tilde{a}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) - \tilde{f}(\tilde{\mathbf{v}}) \end{aligned} \quad (4)$$

En elasticidad, cuando  $\tilde{\mathbf{u}}$  es la solución de (1), este funcional es la *Energía Potencial Total*. Además, este funcional depende fuertemente de la forma del dominio  $\Omega_t$ .

El objetivo principal de esta nota es la evaluación de la sensibilidad al cambio de forma (primer y segundo orden) del funcional  $\Pi$  y la solución  $\tilde{\mathbf{u}}$  y también el desarrollo de un estimador a posteriori del error para un análisis adaptivo de elementos finitos.

### SENSIBILIDAD AL CAMBIO DE FORMA

Consideremos un dominio acotado  $\Omega$  en  $\mathbf{R}^n$ , y sea  $\tilde{V}$  un campo vectorial suave definido en su frontera  $\partial\Omega$ . Este campo define una familia de dominios que dependen de un parámetro  $\{\Omega_t\}$ ,  $t \in \mathbf{J}$ , donde  $\mathbf{J}$  es un intervalo abierto ( $\mathbf{J} = (-\epsilon, +\epsilon)$ ), de acuerdo a la siguiente transformación de la frontera

$$x^* \in \partial\Omega_t \iff x^* = \varphi_t(x) = x + t\tilde{V}(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (5)$$

De esta expresión es claro que  $\Omega \equiv \Omega_0$ , y  $t$  es un parámetro que modifica la forma de  $\Omega$ . Es útil reformular el problema para obtener un problema de dominio fijo. Para esto introducimos el campo  $V$  de manera que sea una extensión suave de  $\tilde{V}$  definida sobre todo  $\Omega = \Omega_0$ .

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \|x - x_i\|^{-\beta} V(x_i)}{\sum_{i=1}^N w_i \|x - x_i\|^{-\beta}} \quad (6)$$

donde  $N$  es el número de puntos con una velocidad prescrita,  $w_i$  es el peso asociado al punto  $i$  y  $\beta$  determina la suavidad de los cambios.

$V(x)$  coincide con  $\tilde{V}(x)$ , para todo  $x \in \partial\Omega$ . La transformación

$$x \mapsto x + tV(x) \quad (7)$$

define, para  $t$  suficientemente pequeño, una aplicación uno a uno entre  $\Omega_0$  y  $\Omega_t$ . Denotando por  $\mathbf{F}$  el gradiente de esta transformación,  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + t\nabla V$  y por medio de un cambio de variables podemos formular todas las ecuaciones en el dominio de referencia  $\Omega$ , haciendo la dependencia de  $t$  explícita. LLamaremos  $a$  y  $f$  a las formas correspondientes. También, para cualquier función  $\tilde{w}$  definida en  $\Omega_t$  le asociamos  $w$  definida en  $\Omega$  utilizando la formula,

$$w(t; x) = \tilde{w}(x + tV(x)). \quad (8)$$

En nuestro caso, las ecuaciones de equilibrio se reescriben,

$$a(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(t; \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_o(\Omega) \quad (9)$$

con

$$\begin{aligned} a(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1})^s \cdot (\nabla \mathbf{v} \mathbf{F}^{-1})^s \det \mathbf{F} d\Omega \\ f(t; \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \det \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \|\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}\| \det \mathbf{F} d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

donde ahora  $\mathbf{u} \in H_o(\Omega)$  está relacionada con la solución de equilibrio  $\tilde{\mathbf{u}} \in H_t(\Omega_t)$  a través de la ecuación (8).

Para  $t = 0$  la ecuación de equilibrio se escribe

$$a(0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(0; \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_o(\Omega) \quad (11)$$

con

$$\begin{aligned} a(0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u})^s \cdot (\nabla \mathbf{v})^s d\Omega \\ f(0; \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \end{aligned} \quad (12)$$

Queda claro que la expresión anterior puede considerarse como la *descripción material* de los *campos espaciales* o ecuaciones definidas en  $\Omega_t$ . Gracias a estas transformaciones pueden ser ahora fácilmente derivadas con respecto a  $t$ .

Como  $\dot{\mathbf{v}} \in H_o(\Omega)$  derivando obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \dot{\mathbf{u}})^s \cdot (\nabla \mathbf{v})^s d\Omega &= - \int_{\Omega} L(\mathbf{u}, V) \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \operatorname{div} V d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_N} \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \operatorname{div}_s V d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in H_o(\Omega) \end{aligned} \quad (13)$$

donde

$$L(\mathbf{u}, V) = \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u})^s \operatorname{div} V - \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s - \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u})^s (\nabla V)^T \quad (14)$$

La ecuación variacional (13) nos conduce a la evaluación de  $\dot{\mathbf{u}}$ . La forma bilineal asociada a esta expresión es idéntica a la correspondiente forma bilineal en la ecuación (11). En el caso en que  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{t}} = 0$  y  $\operatorname{div}_s V = 0$  en  $\Gamma_N$  la expresión anterior se reduce a

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \dot{\mathbf{u}})^s \cdot (\nabla \mathbf{v})^s d\Omega = - \int_{\Omega} L(\mathbf{u}, V) \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in H_o(\Omega) \quad (15)$$

La aproximación por elementos finitos de la solución de la ecuación (15) satisface

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \dot{\mathbf{u}}_h)^s \cdot (\nabla \mathbf{v}_h)^s d\Omega = - \int_{\Omega} L(\mathbf{u}_h, V) \cdot \nabla \mathbf{v}_h d\Omega, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \subset H_o(\Omega) \quad (16)$$

la cual es equivalente al sistema lineal

$$\mathbf{K} \dot{\mathbf{U}}_h = \mathbf{B} \quad (17)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez y  $\mathbf{B}$  es la fuerza nodal equivalente dada por

$$\mathbf{B}_i = - \sum_T \int_T L(\mathbf{u}_h, V) \cdot \nabla \varphi_i d\Omega_T \quad (18)$$

#### ESTIMADOR A POSTERIORI PARA $\{|\dot{\Pi}(\mathbf{u}) - \dot{\Pi}(\mathbf{u}_h)|\}$

Definimos los indicadores locales por:

$$\eta_T = \{ |T| \|\mathbf{R}\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in \partial T} |\ell| \|\mathbf{J}_\ell\|_{0,\ell}^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$\xi_T = \{ |T| \|\mathbf{R}^*\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in \partial T} |\ell| \|\mathbf{J}^*_\ell\|_{0,\ell}^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

donde

$$\mathbf{R} = \mathbf{b} + \operatorname{div}[\mathbf{C}\nabla(\mathbf{u}_h)^s] \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

$$\mathbf{R}^* = \dot{\mathbf{b}} + \operatorname{div} V \mathbf{b} + \operatorname{div}[L(\mathbf{u}_h, V) + \mathbf{C}\nabla(\dot{\mathbf{u}}_h)^s] \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

y

$$\mathbf{J}_\ell = \begin{cases} \llbracket \mathbf{C}\nabla(\mathbf{u}_h)^s \rrbracket \mathbf{n} & \forall \ell \in \mathcal{E}_I, \\ 0 & \forall \ell \subset \Gamma_D, \\ (\mathbf{t} - [\mathbf{C}\nabla(\mathbf{u}_h)^s] \mathbf{n}), & \forall \ell \subset \Gamma_N \end{cases}$$

$$\mathbf{J}^*_\ell = \begin{cases} \llbracket [L(\mathbf{u}_h, V) + \mathbf{C}\nabla(\dot{\mathbf{u}}_h)^s] \rrbracket \mathbf{n} & \forall \ell \in \mathcal{E}_I, \\ 0 & \forall \ell \subset \Gamma_D, \\ 2 \left( \dot{\mathbf{t}} + \operatorname{div}_s V \mathbf{t} - [L(\mathbf{u}_h, V) + \mathbf{C}\nabla(\dot{\mathbf{u}}_h)^s] \mathbf{n} \right), & \forall \ell \subset \Gamma_N \end{cases}$$

**Teorema** Se verifica la siguiente desigualdad:

$$|\{\dot{\Pi}(\mathbf{u}) - \dot{\Pi}(\mathbf{u}_h)\}| \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[ \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \eta_T^2 + \alpha (\xi_T^2) \right] \right) \quad (21)$$

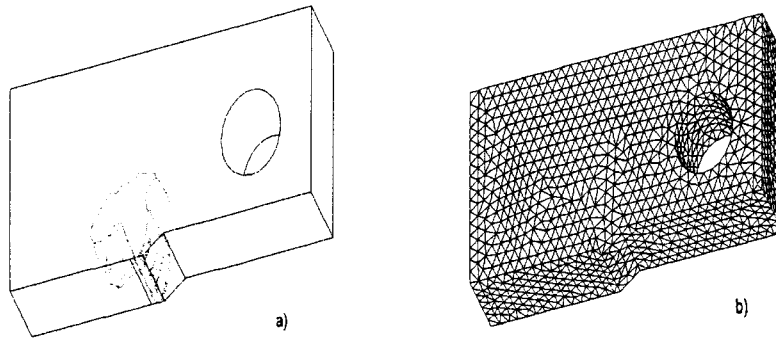
### RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección presentamos algunos experimentos numéricos que muestran el comportamiento del estimador, así como también la contribución de los distintos términos del mismo.

Por simplicidad hemos incluido solamente los resultados mas significativos referentes a un caso conocido en la literatura como Compact Test, este es experimentalmente estudiado para la determinación de propiedades asociadas con la propagación de fractura.

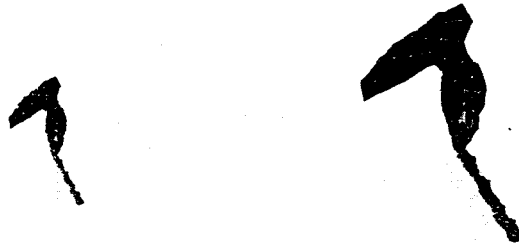
Las dimensiones de la probeta modelada son de 32mm x 32mm x 6.4mm de espesor, donde hemos aplicado una carga de 1N/mm en ambos agujeros, vamos a suponer que la fisura indicada en el esquema se propaga en forma plana.

Para simular la propagación de la fisura asumimos un campo de velocidades virtual con las siguientes propiedades: Las componentes  $V_y = V_z = 0.0$  en todo el dominio. La componente  $V_x = -0.15625$  en el frente de la fisura, en el resto de la superficie es  $V_x = 0.0$ , excepto en el plano horizontal de simetría donde se interpola con la ecuación (6) al igual que en el interior del dominio.



**Figura 1a)** Dominio y zona de influencia en el cálculo del decrecimiento de energía. **b)** Malla inicial

Hemos utilizado como juego de parámetros para la velocidad,  $\beta = 10.0$ ,  $W_{nonulos} = 10.0$ ,  $W_{nulos} = 1.0$ . Dado que al fijar los mismos fijamos también las zonas que pesan al momento de calcular el decrecimiento, calculamos el campo de densidad de decrecimiento de energía y mostramos en la figura 1a en transparencia la región donde el valor de la densidad de decrecimiento esta en el rango 0.2 a 100 % del valor máximo, en el resto de las figuras se observan las zonas de nivel de la mencionada región superpuestas a las mallas, es de notar que con el campo de velocidades utilizada la región que aporta significativamente al cálculo está relativamente lejos del frente de la fisura.



**Figura 2** Malla adaptada (vista total y detalle) utilizando como estimador  $\eta$ , malla final 23916 nodos, 109812 elementos.

En la figura 2 se observa la malla luego de un proceso adaptivo utilizando como estimador del error solamente  $\eta$  (19), al estar superpuesta con el área de interés para el cálculo del decrecimiento de energía se puede notar que la inserción de nodos se produce en la zona de la fractura y en la zona donde ejerce su fuerza el perno, esto es así ya que este término contempla el salto entre elementos de  $\nabla(\mathbf{u}_h)$ .



**Figura 3** Malla adaptada (vista total y detalle) utilizando como estimador  $J^*$ , malla final 17002 nodos, 85738 elementos.

En la figura 3 en cambio la malla que se muestra ha sido obtenida utilizando para el remallado el término del estimador  $J^*$  (20) que tiene en cuenta el salto entre elementos de  $\nabla(\mathbf{u}_h)$ . Allí puede que la malla no está densificada en el perno ni en la fractura, densificando apropiadamente en la región marcada con los mas altos valores en la densidad de decrecimiento de energía.

En la figura 4 se muestra la malla final obtenida por remallado utilizando como indicador del tamaño deseado el estimador completo (21) con  $\alpha=10$ .



Figura 4 Malla adaptada (vista total y detalle) según el estimador completo, malla final 31493 nodos, 153850 elementos.

El valor teórico del decrecimiento de energía integrado sobre todo el dominio para este caso es  $G = \bar{\Pi}(\mathbf{u}) = 1.5772 \times 10^{-5} N/mm$ , en la tabla I mostramos el valor obtenido en función del paso de remallado. Allí podemos ver que llegamos a una precisión del 4%

$G \times 10^{-5} N/mm$	nodos	elementos
1.24613	3276	13647
1.45394	3960	18811
1.46494	9230	46078
1.49647	17436	88887
1.50563	22887	113701
1.50648	31493	153850

Tabla I Valores de  $G$  obtenidos en los diferentes pasos de remallado

### CONCLUSIONES

Siendo el análisis de sensibilidad al cambio de forma una herramienta importante en los cálculos de fractomecánica tridimensional, la elección de un campo de velocidades adecuado que simule la propagación de la fractura se convierte en una nueva fuente de error. El estimador presentado contempla esta nueva fuente de error que aparece en el postproceso, permitiendo adaptar las mallas de manera más conveniente para el cálculo de  $\bar{\Pi}$ . En el caso mostrado, el proceso adaptivo muestra ser robusto y más preciso que otros algoritmos conocidos.