Mecánica Computacional, Volumen XIX, pp. 263-268
Compilado por: F. Quintana y S. Felicelli
San Carlos de Bariloche, Noviembre de 2000

# VIBRACIONES DE MEMBRANAS DE FORMA ARBITRARIA A TRAVÉS DE UNA SOLUCIÓN GENERALIZADA

**Marta B. Rosales**[1,2] **y Carlos P. Filipich**[1,3]
[1] Department of Engineering, Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca, Argentina
e-mail mrosales@criba.edu.ar, FAX 54-291-4595110
[2] CONICET, Argentina
[3] Mechanical Systems Analysis Group, FRBB,
Universidad Tecnológica Nacional, 8000 Bahía Blanca, Argentina

## RESUMEN

Las vibraciones naturales de membranas de forma arbitraria bajo tensión son estudiadas con el Método del Elemento Completo (MEC) desarrollado previamente por los autores para problemas de borde en 1D, 2D y 3D. Se basa en la propuesa de series trigonométricas extendidas de convergencia uniforme en dominios unitarios. En este trabajo el dominio es de forma arbitraria requiriéndose una transformación adecuada. El funcional gobernante es entonces sustancialmente modificado. Sin embargo se ha demostrado por teoremas y corolarios que no existen restricciones en el MEC para el funcional. Es posible obtener los autovalores con precisión arbitraria y las formas modales son de convergencia uniforme. Los ejemplos numéricos incluyen membranas trapezoidales, triangulares, circulares y una arbitraria, dominios que se transforman a un rectángulo. Como es sabido las membranas poligonales de bordes fijos permiten a través de una analogía, obtener resultados para placas apoyadas de similar geometría aunque esta propiedad no es válida cuando existen bordes curvos. Se realizan comparaciones con valores hallados por otros autores y con el Método de los Elementos Finitos.

## ABSTRACT

The natural vibrations of arbitrary shaped membranes under tension are studies using the Whole Element Method (WEM) developed by the authors for boundary problems in 1D, 2D and 3D. The method is based in proposing extended trigonometric series in unitary domains. Since here we are dealing with arbitrary shaped domains, a suitable transformations becomes necessary. Then the governing functional is substantially modified. Theorems and corollaries which form the basis of WEM do not pose any restriction to the functional. Then arbitrary precision frequencies and uniform convergent mode shapes may be obtained. Several examples illustrate the application. The solution of polygonal membranes allows by means of the well-known analogy to find similar supported plates frequencies. This is not the case when curved borders exist. Results are compared with values of other authors and results obtained using the Finite Element Method.

## INTRODUCCIÓN

Las vibraciones naturales de membranas de forma arbitraria bajo tensión son estudiadas con una metodología desarrollada por los autores [1] para problemas de borde en una [2], dos [3] y tres dimensiones [4]. Se denomina MEC (Método del Elemento Completo) dado que una de sus características es la de poder manipular fácilmente discontinuidades intermedias. También se han resuelto con la misma metodología problemas gobernados con ecuaciones diferenciales ordinarias [5] y a derivadas parciales [6], lineales o no-lineales [7]. El método se basa en la propuesta de series trigonométricas extendidas de convergencia uniforme en dominios unitarios. Como en el problema del título el dominio es de forma arbitraria, primero debe realizarse una transformación adecuada, lográndose así el objetivo de dominio unitario, aunque el funcional original es sustancialmente modificado. La solución con MEC ha sido fundamentada con teoremas y corolarios cuyas únicas restricciones son impuestas a las secuencias adoptadas y al dominio unitario sin importar la expresión del funcional. Luego es posible obtener autovalores de precisión arbitraria y formas modales de convergencia uniforme. La propuesta es ilustrada con varios ejemplos numéricos. Tanto membranas poligonales como de forma arbitraria con bordes curvos son estudiadas. La resolución membranas poligonales con bordes fijos permite, a través de la conocida analogía, hallar las frecuencias de placas de similar geometría con bordes simplemente apoyado. No es el caso existe algún borde curvo. Se comparan los resultados con valores obtenidos para placas con elementos finitos, si corresponde, y por otros autores que utilizan métodos de colocación y elementos finitos para membranas.

## TRANSFORMACIÓN DEL DOMINIO Y FUNCIONAL

### Dominio trapezoidal

A los efectos de fijar ideas desarrollaremos la transformación de un dominio trapezoidal. El funcional energético de membranas es

$$F = \int\int_A (\hat{u}_X^2 + \hat{u}_Y^2) dA - \bar{\Omega}^2 \int\int_A \hat{u}^2 dA \tag{1}$$

donde $u = \hat{u}(X,Y)$ es el desplazamiento membranal y $A$ el dominio original $\{D : 0 \leq X \leq a, 0 \leq Y \leq \alpha x + b\}$. $a$ y $b$ son la altura y la base menor del trapecio y $\alpha$ la pendiente. Se introduce la siguiente transformación de coordenadas

$$x = \frac{X}{a}; \quad y = \frac{Y}{(\alpha x + b)} \tag{2}$$
$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

Luego de la transformación (elemental en este caso) el funcional (1) se modifica sustancialmente y resulta

$$F = \int_0^1 \int_0^1 \left[ (\alpha x + \lambda) u'^2 + \frac{(1 + \alpha^2 y")}{(\alpha x + \lambda)} \bar{u}^2 - 2\alpha y u' \bar{u} \right] dxdy - \Omega^2 \int_0^1 \int_0^1 (\alpha x + \lambda) u^2 dxdy \tag{3}$$

en un dominio unitario, con $\lambda = b/a$, $u' \equiv \partial u/\partial x$ y $\bar{u} \equiv \partial u/\partial y$. El parámetro de frecuencia de la membrana es $\Omega^2 = \rho a^2 \omega^2 / T$ donde $\rho$ es la densidad, $\omega$ la frecuencia circular y $T$ la tensión constante de la membrana. Ahora se introduce la secuencia extremante. Su planteo es sistemático. Los autores han desarrollado secuencias en 1D, 2D y 3D siempre cumpliendo con los requisitos de completitud del conjunto de funciones. En particular en este dominio "cuadrado"

2D una posible y conveniente secuencia puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{A_{ij}}{\beta_i\gamma_j}s_is_j + x\left(a_o\sum_{j=1}^{N}\frac{A_{ij}}{\gamma_j}s_j\right) + y\left(b_o\sum_{i=1}^{M}\frac{A_{ij}}{\beta_i}s_i\right) + \\ & A_{oo}xy + \sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{\gamma_j}s_j + \sum_{i=1}^{M}\frac{a_i}{\beta_i}s_i + k \end{aligned} \tag{4}$$

Aplicadas las condiciones de borde y reemplazada en el funcional (3) se obtiene el siguiente sistema homogéneo de $(MxN)$ ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\phi_{ipjq} = 0; \quad (p=1,2,...,M); \quad (q=1,2,...,N) \tag{5}$$

donde $\phi_{ipjq}$ son funciones de la frecuencia. Sin perder generalidad en este trabajo se adopta $M = N$.

### Dominio circular

Por brevedad solamente se enuncian la transformación realizada y el funcional modificado para un dominio circular con centro en $X = 1$, $Y = 1$ y radio $R = 1$:

$$x = \frac{X}{2}; \quad y = \frac{Y - g(X)}{\Delta}; \quad ;g(X) = (1 - \sqrt{X(2-X)}; \quad \Delta = 2\sqrt{X(2-X)} \tag{6}$$

$$F = \int_0^1\int_0^1 \left[u'^2 + 4\bar{u}^2(y_X^2 + y_Y^2) + 4u'\bar{u}y_X - \frac{4\rho\omega^2}{T}u^2\right]\Delta dxdy \tag{7}$$

### Dominio semicircular-triangular

Se trata de un semicírculo con su base centrada en $X = 0$, $Y = 1$ y radio $R = 1$ y un triángulo con vértice en $X = 0$, $Y = 0$. La transformación en este caso es

$$\begin{aligned} & x = \frac{X}{2}; \quad y = \frac{Y-g(X)}{\Delta}; \\ & f(X) = 1 + \sqrt{X(2-X)}; \quad ;g(X) = \begin{cases} 1-X & 0 \le X \le 1 \\ X-1 & 1 \le X \le 2 \end{cases}; \\ & \Delta = f(X) - g(X) \end{aligned} \tag{8}$$

El funcional es formalmente igual al (7) introduciendo el cambio en $g(X)$ y consecuentemente en $\Delta$.

## EJEMPLOS NUMÉRICOS

La Figura 1 muestra las formas modales de una membrana trapezoidal con $\alpha$=-0.6 y $\lambda$=1. Tambien se reportan los valores de la primera frecuencia natural encontradas con MEC y son comparadas con resultados de placas halladas resolviendo placas análogas con MEF. Resultados del mismo tipo son mostrados en la misma figura para una membrana triangular $\alpha$=-1 y $\lambda$=1.

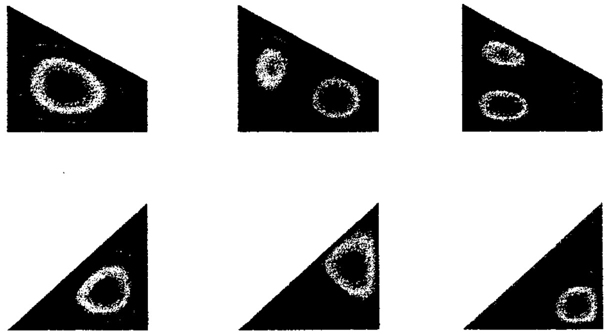


Figure 1: Formas modales de una membrana trapezoidal y triangular. Parametros de frecuencias encontrados con MEC (M=N=13) y entre paréntesis valores hallados con analogía de placas con MEF y 400 elementos. **Membrana trapezoidal** a) primer modo 5.6515 (5.6552), b) segundo modo 7.9541 (7.9660), c) tercer modo 9.3567 (9.3685). **Membrana triangular** a) primer modo 7.0250 (7.0318), b) segundo modo 9.9355 (9.9564), c) tercer modo 11.3282 (11.3521).

Cuando se trata de membranas con algun borde curvo ya no es válida la analogía con placas. Se analizaron dos ejemplos numéricos con lados curvos. El primero de ellos, una membrana circular. Este caso tiene solución clásica como puede verse en [8]. Los resultados hallados con MEC se reportan en la Tabla I junto a los reportados por Kang *et al.* [9]. Estos autores utilizan un método de colocación modificado y los valores numéricos son cotas inferiores. También se muestran los valores hallados con la solución clásica. Los valores obtenidos con MEC son en general cotas superiores. Sin embargo en este caso esto no sucede ya que influye el algoritmo de integración numérica (Simpson, parámetro NN). El aumento de M y NN asegura la convergencia.

En la Tabla II se reportan los valores de frecuencias de una membrana de una forma arbitraria, en este caso semicircular-triangular. Este dominio fue tranformado a un dominio rectangular utilizando la transformación (8). La Figura 2 muestra cualitativamente la primera forma modal. Se comparan los valores con los publicados en [9,10] hallados con un método de colocación modificado y con elementos finitos para membranas. Como se observa los resultados del MEC mejoran a los hallados con el método de colocación. De todas maneras, fijando la precisión deseada a través de un número dado de dígitos, se debe aumentar M y NN hasta lograr el objetivo, ya que la convergencia hacia el autovalor exacto está asegurada en forma teórica (teoremas y corolarios, [1]).

## CONCLUSIONES

Se analizaron las vibraciones naturales de membranas bajo tensión de formas variadas utilizando un método variacional desarrollado previamente por los autores, llamado Método del Elemento Completo (MEC), para dominios unitarios (i.e. en 2D, rectangulares). Se propone

Table I: Frecuencias naturales de una membrana circular obtenidad utilizando MEC con M=20 y NN=80.

| orden de autovalor | MEC | Colocación nb=16[9] | Exacta |
|---|---|---|---|
| $\Omega_1$ | 2.4041 | 2.4048 | 2.4048 |
| $\Omega_2$ | 3.8295 | 3.8317 | 3.8317 |
| $\Omega_3$ | 5.1333 | 5.1356 | 5.1356 |
| $\Omega_4$ | 5.5185 | 5.5201 | 5.5201 |
| $\Omega_5$ | 6.3795 | 6.3802 | 6.3802 |
| $\Omega_6$ | 7.0135 | 7.0156 | 7.0156 |
| $\Omega_7$ | 7.5810 | 7.5876 | 7.5883 |

Table II: Frecuencias naturales de una membrana semicircular-triangular obtenidad utilizando MEC con M=20 y NN=80.

| orden de autovalor | MEC | Colocación $n_b$=24 [9,10] | FEM $n_{nd}$=784 [9,10] |
|---|---|---|---|
| $\Omega_1$ | 2.7140 | 2.7097 | 2.7230 |
| $\Omega_2$ | 4.2315 | 4.2279 | 4.2598 |
| $\Omega_3$ | 4.3695 | 4.3579 | 4.3786 |
| $\Omega_4$ | 5.5760 | 5.5649 | 5.6336 |
| $\Omega_5$ | 5.9345 | 5.9336 | 5.9846 |
| $\Omega_6$ | 6.1390 | 6.1159 | 6.1641 |
| $\Omega_7$ | 7.0115 | 6.9974 | 7.1334 |
| $\Omega_6$ | 7.1970 | 7.1868 | 7.3002 |

el uso de ciertas secuencias de convergencia uniforme, sin restricciones para el funcional gobernante. Para analizar dominios arbitrarios, como en este trabajo, se realizan transformaciones geométricas obteniéndose un funcional modificado. Los ejemplos numéricos muestran la aplicación a membranas trapezoidal, triangular, circular y semicircular-triangular. Se reportan resultados con M y NN fijos pero los autovalores pueden hallarse con precisión arbitraria como fue dicho arriba.

## REFERENCIAS

[1]**Rosales, M.B.**, *Un método variacional no clásico y su aplicación a estática y dinámica de elementos estructurales*, Tesis doctoral, Universidad Nacional del Sur, Argentina. 1997.

[2]**Filipich, C.P. and Rosales, M.B.***Beams and arcs: exact frequencies via a generalized solution*, J. Sound and Vibr., Vol. 170, 1994, págs. 263-269.

[3]**Filipich, C.P. and Rosales, M.B.** *Arbitrary precision frequencies of a free rectangular thin plate*, J. Sound and Vibr., Vol. 230, 2000, págs. 521-539.

[4]**Filipich, C.P., Rosales, M.B. and Bellés, P.M.** *Natural Vibration of Rectangular Plates considered as Tridimensional Solids*, J. Sound and Vibr., Vol. 212, 1998, págs. 599-610.

[5]**Filipich, C.P. and Rosales, M.B.** *A variational solution for an initial conditions problem.*

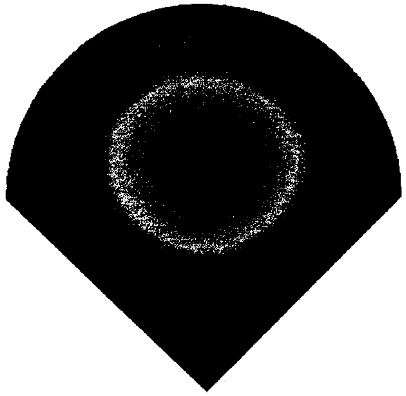

Figure 2: Primera forma modal de una membrana semicircular-triangular

Appl. Mech. Rev., Vol. 50, 1997, págs. S50-S55.

[6]**Filipich, C.P. and Rosales, M.B.**, *An initial-boundary value problem of a beam via a space-time variational method*, Applied Mechanics in the Americas, Vol. 6, 199, págs. 361-364. Proc. Sixth Pan-Am. Congr Appl Mech (PACAM VI), Rio de Janeiro, Brazil.

[7]**Filipich, C.P. and Rosales, M.B.***Dynamic behavior of a uniform linear beam supported with non-linear rotational springs*, Proc. Fourth World Congr Comp. Mech. (WCCM). Buenos Aires, Argentina, 1998, CD-ROM 16 pp.

[8]**Blevins, R.D.** *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1979.

[9]**Kang, S.W., Lee, J.M. and Kang, Y.J.**, *Vibration analysis of arbitrary shaped membranes using non-dimensional dynamic influence function*, J. Sound and Vibr., Vol. 221, 1999, págs. 117-132.

[10]**Kang, S.W. and Lee, J.M.**, *Eigenmode analysis of arbitrary shaped two-dimensional cavities by the method of point-matching*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 107, 2000, págs. 1153-1160.