

**OPTIMIZACIÓN DEL DISEÑO DE LÁMINAS.  
OBTENCIÓN DE LAS MÍNIMAS FLEXIONES VOLUMÉTRICAS ESTRUCTURALES**

**Sandra I. Robles, Néstor F. Ortega**  
Departamento de Ingeniería. Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1252. 8000 Bahía Blanca  
nfortega@criba.edu.ar

**RESUMEN**

En este trabajo se establecen parámetros para facilitar el diseño de láminas. Para la obtención de los mismos se empleó una técnica de optimización que minimiza las flexiones. Con este objetivo, se define un parámetro llamado Flexión Volumétrica, que tiene en cuenta la diferencia entre las Tensiones Principales producida en cada cara de la lámina. Paralelamente, con el fin de minimizar los desplazamientos, fue necesario definir otro parámetro llamado Desplazamiento Volumétrico, que considera los desplazamientos producidos en toda la estructura, no solo los máximos como es lo habitual.

**ABSTRACT**

This paper states parameters to make easier shell design. To obtain them, an optimization technique that minimize bendings have been employed. With this aim, a parameter called Volumetric Flexure is introduced. It takes into count the difference between the main stresses produced on each face of the shell. At the same time, with the objective of minimize displacements, it has been defined another parameter called Volumetric Displacement, that considers the displacements produced in all the structure, and not only the highest ones like is usual.

**INTRODUCCION**

Dentro de las etapas necesarias para la materialización de una obra, ocupa un lugar fundamental el diseño. El mismo es tarea creativa generada por la combinación de técnica y arte. No obstante, resulta conveniente fijar determinadas relaciones geométricas, que ayuden al diseñador. Conviene que las mismas que estén sustentadas en los principios de la mecánica, a los efectos de asegurar que la estructura resultante este racionalmente concebida y disminuir su costo. Por estos motivos, conviene en el diseño de láminas, adoptar geometrías que tengan un comportamiento membranaral o muy próximo.

En esta publicación se presenta la aplicación de una técnica de optimización, en la que se comparan distintas geometrías, con el fin de minimizar las flexiones y/o desplazamientos que se presentan. Se ha elegido como geometrías a estudiar, la de los distintos elementos que componen un paraboloide hiperbólico de bordes rectos, a los efectos de comparar los resultados obtenidos con los hallados por otros autores. Los resultados aquí presentados surgen del análisis de 24 láminas distintas.

**PROCESO DE OPTIMIZACION**

Antes de comenzar el proceso de optimización conviene recordar, que una lámina se define inequívocamente mediante la geometría de su superficie media y el espesor que posee en cada uno de

sus puntos. Por este motivo, las técnicas que colaboran en el diseño de estas formas, permiten determinar la geometría de la superficie media.

Con el objeto de minimizar las flexiones en toda la estructura (lámina y vigas de borde), se define un parámetro que llamaremos "*Flexión Volumétrica*" ( $FV$ ), que se obtiene como la sumatoria del producto del valor absoluto de la diferencia de tensiones superficiales en un punto dado ( $\Delta\sigma_i$ ), por el área de influencia sobre el que se extiende esta variación de tensiones ( $S_i$ ), multiplicado por el espesor de la estructura en dicho área ( $esp_i$ ):

$$FV = \sum_{i=1}^n |\Delta\sigma_i| \times S_i \times esp_i \quad (1)$$

En el caso de estar analizando una lámina, que posea un régimen de tensiones membranales las Flexiones Volumétricas serán nulas; por ello, debemos tratar que la estructura que diseñemos, tenga el menor valor posible de las Flexiones Volumétricas.

Las variaciones de tensiones que se producen entre ambas caras de la estructura se analizaron empleando las Tensiones Principales Mínimas y las Máximas. En función de los requerimientos estructurales que se presenten en cada caso, se elige cual de estas variaciones de tensiones conviene minimizar. Además, se puede realizar la confrontación de distintas estructuras, con el objeto de adoptar la más conveniente, desde el punto de vista de la mecánica estructural.

La implementación de este análisis se realizó en forma discreta, es decir en un determinado número de puntos ubicados sobre una retícula y mediante el Método de los Elementos Finitos. Como es bien sabido, a medida que se reducen las dimensiones de esta retícula, más preciso será el análisis realizado, pero mayores serán los requerimientos computacionales.

Con el fin de realizar un análisis más profundo del problema, también se minimizó el valor de otro parámetro que hemos llamado "*Desplazamiento Volumétrico*" ( $DV$ ), cuya determinación es análoga a la de las Flexiones Volumétricas, pero en este caso se halla como la sumatoria del producto del desplazamiento de cada punto  $i$  ( $\delta_i$ ), por el volumen de influencia del mismo ( $S_i \times esp_i$ ), según la siguiente expresión:

$$DV = \sum_{i=1}^n \delta_i \times S_i \times esp_i \quad (2)$$

Cabe acotar, que en estructuras con espesor constante, y con el fin de simplificar el análisis, las tensiones y los desplazamientos en cada punto, podrían multiplicarse solamente por su área de influencia.

Definimos como variable independiente al peralte total ( $H = 2h$ ), debido a que estamos analizando cuatro paraboloides hiperbólicos de bordes rectos, cuya planta es cuadrada, con un lado de 5,00 m, mientras que el peralte ( $h$ ) es la coordenada  $Z$  del único vértice no contenido en el plano horizontal y que pasa por el centro de la lámina.

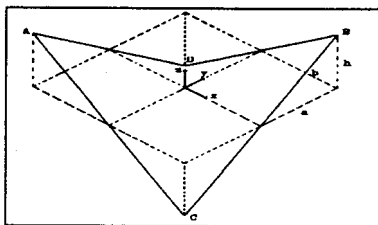


Fig. 1 Vista general de la geometría del paraboloides.

Para determinar el valor de los esfuerzos y desplazamientos, se adoptó como estado de carga, el peso propio y una sobrecarga de  $100 \text{ kg/m}^2$ , distribuida sobre toda la superficie. El análisis se efectuó con un software basado en el Método de los Elementos Finitos, comercialmente conocido como Algor12, [1] habiendo realizado un análisis lineal de tensiones, con mallas de elementos de 3 y 4 lados rectos.

### DETERMINACIÓN DEL PERALTE DE LA LÁMINA

Debido a que existen tres variables a optimizar: peralte, inercia de las vigas de borde (materializado con la variación de la altura) y el espesor de la lámina, se eligió para comenzar la optimización al peralte; adoptándose como constantes, un valor para cada uno de los otros dos parámetros. Por este motivo, se empleó un espesor de la lámina igual a 0.10 m y un borde de 0.20 x 0.50 m.

En la Fig. 2 se observa la variación de las Flexiones Volumétricas, empleando las Tensiones Principales Máximas y las Mínimas, en función de cada peralte total elegido. El mínimo en el primer caso se encuentra aproximadamente para un peralte de 6.00 m y en el segundo caso en 4.00 m. Además, se aprecia que a la izquierda del mínimo, estas curva presentan una pendiente mayor que a la derecha. Esto se debe a que a medida que el peralte disminuye, el comportamiento mecánico se asemeja al de una placa plana (peralte nulo), donde predominan las flexiones y el parámetro Flexión Volumétrica (calculado con Tensiones Principales Máximas), vale 45676805 Kg.m, que es 30 veces mayor que el registrado con un peralte total de 6.00 m.

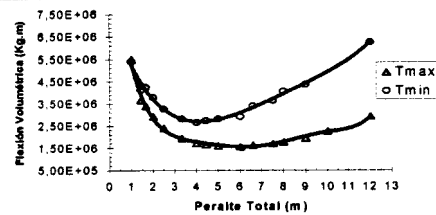


Fig. 2 Variación de la Flexión Volumétrica, en función del peralte total.

Aquí se podría presentar la disyuntiva sobre que peralte total elegir (4.00 o 6.00 m), una posibilidad, es obtener una solución de compromiso, que se hallaría sumando ambas Flexiones Volumétricas y luego determinando el mínimo de esta nueva función; en este caso aproximadamente 5.00 m. En esta lámina, donde existen esfuerzos de compresión importantes y con el fin de reducir la posibilidad de la aparición del pandeo, resultaría más conveniente adoptar un peralte total de 4.00 m.

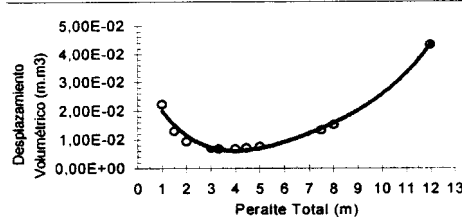


Fig. 3 Variación del Desplazamiento Volumétrico, en función del peralte total.

Analizando la figura anterior se observa que, al igual que lo observado en la Fig. 2, el Desplazamiento Volumétrico mínimo se obtiene con un peralte total de 4.00 m.

### DETERMINACIÓN DE LA GEOMETRÍA DEL BORDE

En este punto se pretende optimizar la geometría de las vigas de borde, para ello, se analizarán una serie de paraboloides hiperbólicos en los que se han fijado como constantes, el peralte total en 4.00 m (el óptimo, encontrado en el punto anterior), el espesor de la lámina en 0.10 m, y un ancho de la viga de borde en 0.50 m. Es decir que la variable a optimizar es la altura de la viga. La importancia de las dimensiones de la viga de borde radica en que las mismas deben poseer desplazamientos compatibles con las de la lámina, para que perturben lo menos posible su estado membranal. [5]

Se analizan vigas de borde con distintas inercias, haciendo variar su altura, que van desde el espesor de la lámina (0.10 m), hasta 0.60 m, con un peralte total constante  $H = 4.00$  m. Este tipo de viga de borde suele emplearse por las importantes ventajas que posee, desde el punto de vista constructivo.

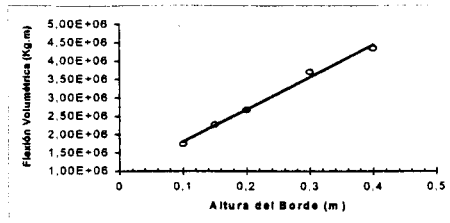


Fig. 4 Variación de la Flexión Volumétrica (Tens. Princ. Mínimas), en función de la altura de borde.

En la Fig.4 vemos que, a diferencia de los casos anteriores, la variación es lineal y creciente a medida que se aumenta la inercia del borde. Análisis similares al anterior, con las Tensiones Principales Máximas y con los Desplazamientos Volumétricos, muestran la misma tendencia de variación.

#### DETERMINACIÓN DEL ESPESOR DE LA LÁMINA

En este punto se verifica el comportamiento mecánico del paraboloide hiperbólico variando el espesor de la lámina, entre un mínimo de 0.03 m, hasta un máximo de 0.20 m. Cabe acotar que se puede considerar como mínimo recomendable a 0.05 m, desde el punto de vista constructivo. En la Fig. 5, se muestra la variación de las Flexiones Volumétricas, calculadas con las Tensiones Principales Máximas, con un mínimo entre 0.05 y 0.07 m; se observa que a la derecha del mismo las flexiones crecen al incrementarse el espesor, esto obviamente se origina debido a que aumenta el peso propio.

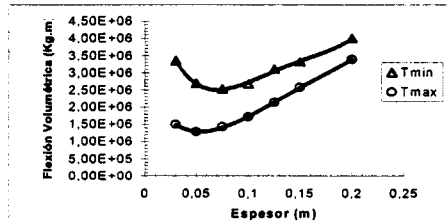


Fig. 5 Variación de la Flexión Volumétrica, en función del espesor de la lámina.

Por su parte, las Flexiones Volumétricas determinadas con las Tensiones Principales Mínimas, adquieren valores mínimos entre 0.06 m y 0.08 m; mientras que los Desplazamientos Volumétricos poseen un mínimo entre 0.08 m y 0.12 m (Fig. 6).

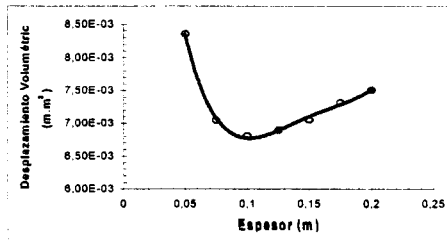


Fig. 6 Variación de los Desplazamientos Volumétricos, en función del espesor de la lámina.

## ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

### GEOMETRÍA DE LA LÁMINA

El peralte óptimo (4.00 a 6.00 m), determinado con las Flexiones Volumétricas, debe verificar que:

$$0.40 \leq \frac{h}{a} \leq 0.60 \quad (5)$$

Si las tensiones de compresión del material son altas y se desea minimizar la posibilidad de la aparición de pandeo, conviene adoptar el límite inferior de (5), es decir 0.40.

Al resultado anterior también se arriba minimizando los Desplazamientos Volumétricos (Fig. 4); mientras que con la minimización de las tracciones (Fig. 6), se puede ver que apartir de un peralte total de 6.00 m las Flexiones Volumétricas son casi nulas; es decir que estamos en presencia de una lámina que prácticamente solo presenta esfuerzos de compresión. Esto es muy importante en el diseño de tanques. Como ya se ha observado, el rango de variación de la relación del peralte es superior al recomendado por parte de la bibliografía. No obstante existen trabajos experimentales [8] en los que se observó que las "tensiones disminuyen con el incremento de la curvatura de la lámina manteniendo la rigidez del borde constante". En función de esta optimización planteada, se aprecia el excelente comportamiento mecánico que poseen muchas de las láminas diseñadas por F.Candela. [4]

Cabe mencionar que los peraltes óptimos obtenidos aquí, son superiores a los recomendados por la bibliografía clásica del tema:  $\frac{h}{a} \cong 0.20$ , [1] [2] no obstante, han sido utilizados por otros diseñadores, en particular por el más famoso diseñador de paraboloides hiperbólicos, Felix Candela. [4]

### GEOMETRÍA DEL BORDE

Con relación a la inercia de las vigas de borde, se puede decir que a medida que se reduce su altura, disminuyen las flexiones (Fig. 4). A esta conclusión, también se arribó en otras publicaciones, [6] [7] en las que se estudiaron paraboloides hiperbólicos similares a los analizados aquí. Otras investigaciones experimentales sobre esta tipología nos pueden ayudar a explicar este fenómeno, cuando expresan que en el cálculo de las vigas de borde, mediante la teoría membranar se obtienen vigas sobredimensionadas, debido a que no se tuvo en cuenta la rigidez flexional de la lámina. [8] Esto permite afirmar que la teoría membranar, con la que se han calculado muchas de estas estructuras, no reproduce fielmente el comportamiento mecánico de estos elementos; por estas razones, muchas recomendaciones geométricas que se apoyan en esta teoría arrojan resultados con un cierto grado de error.

Un inconveniente que podría aparecer, a medida que se reduce la inercia de la viga de borde, es el aumento de los desplazamientos. Para verificar esto, analizaremos los desplazamientos que presenta la estructura cuando la viga de borde, posee el mismo espesor que la lámina (con un peralte total de 4.00 m), la flecha máxima que se registra es de 0.005 m, muy inferior al caso más desfavorable que contempla el Código ACI 318, [2] es decir:  $\frac{luz}{480} = 0.010$  m .

### ESPESOR DE LA LÁMINA

El espesor mínimo recomendado por las normas varía, en general, entre 7 y 10 cm o también 3 a 4 veces el tamaño máximo del agregado, o  $\frac{esp}{a} \geq 0.01$ ; además deben considerarse los recubrimientos mínimos, por problemas de durabilidad. [2] [3] La mayoría de los diseñadores adoptan aproximadamente 7 cm, no obstante se han construido láminas con espesores menores. [5] [4] Por su parte, los espesores obtenidos de minimizar las Flexiones Volumétricas y los Desplazamientos Volumétricos, están entre 5 cm y 12 cm, como espesor promedio se puede considerar 10 cm. Es decir que:

$$0.010 \leq \frac{esp}{a} \leq 0.024 \quad (6)$$

Además de esta relación conviene considerar el valor de las tensiones de compresión máximas, debido a que son determinantes al momento de verificar el diseño. Las tensiones de tracción no suelen ser un problema importante, debido a que si son elevadas se absorben con una mayor sección de armadura.

La tensión máxima de compresión, para el mínimo espesor analizado (5 cm), un peralte de 4.00 m y un borde de 20 cm, es de 234 N/cm<sup>2</sup>; muy inferior a la admisible, aunque a esta tensión hay que sumarle el efecto del pandeo, igualmente se obtendrá un coeficiente de seguridad admisible.

### CONCLUSIONES

La metodología de optimización de formas propuesta, que minimiza las Flexiones Volumétricas y los Desplazamientos Volumétricos, puede ser una valiosa herramienta para el diseñador de superficies estructurales, debido a que se consideran los principios de la Mecánica Estructural.

Para el caso particular del paraboloides hiperbólico estudiado, se obtienen las siguientes conclusiones:

- a. El peralte se lo puede determinar a partir de la relación  $\frac{h}{a} \cong 0.40$
- b. Las vigas de borde deben tener una sección lo más reducida posible, siempre que no superen los desplazamientos prescritos por las normas y la tensión admisible a compresión del hormigón. Por otra parte, los esfuerzos de tracción no constituyen un inconveniente importante debido a que los mismos serán absorbidos por las armaduras metálicas.
- c. El espesor que se adopte para la lámina, debería estar dentro del siguiente rango de variación:

$$0.010 \leq \frac{esp}{a} \leq 0.024 \quad (7)$$

Esta relación esta directamente vinculada con el tipo de carga a la que estará sometida la lámina (por ejemplo, peso propio, nieve, u otros tipos de sobrecargas accidentales). Cuando se emplean espesores inferiores a 7 cm se deberá tener un especial cuidado durante la construcción.

Debido a que en general las tensiones a las que estan sometidas este tipo de estructuras son bajas, para luces pequeñas o moderadas, se pueden adoptar espesores que esten por debajo del límite inferior, siempre que no se superen los coeficientes de seguridad recomendados. Pero en la medida que la luz y/o las cargas aumentan, comienza a tener mayor importancia la optimización, desde el punto de vista mecánico, de la geometría de la lámina.

### REFERENCIAS

- [1] Algor12 Professional Mech/VE 1999. Docutech, Linear Stress and Dynamics, Reference Division. Pittsburgh, Pennsylvania.
- [2] American Concrete Institute, Building Code Requirements for Structural Concrete (318 M-99) and Commentary (318 RM-99), Farmington Hills, Michigan, 1999.
- [3] Comité Europeo de Normalización, Eurocódigo 2: Proyecto de estructuras de hormigón; AENOR; Madrid; parte 1-1, 1993, pp. 75-77.
- [4] Faber, C., Candela. The Shell Builder. The Architectural Press, London, 1963.
- [5] Haas, A.M., Láminas de Hormigón, Edición en español, Instituto E. Torroja, Madrid, 1971.
- [6] Jadik, T., Billington. D.P., "Gabled Hyperbolic Paraboloid Roofs without Edge Beams", Journal of Structural Engineering, Vol. 121, Nr. 2, 1995, pp. 328-335.
- [7] Ortega, N.F., Arias, J.V., "Comparison of Mechanical Efficiency Between an Hyperbolic Paraboloid and a Experimental Model", IV World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, 1998.
- [8] Polonyi, S., Walochnik, W., "The Influence of Edge Beam Stiffness on The Bearing Behaviour of Hypar Shells", Bulletin of IASS, Vol. 21, Nr. 2, 1980, pp. 29-34.