

FORMALISMO DE INTEGRAL FUNCIONAL EN ELASTODINAMICA

Enrique Pardo

INTEMA-Facultad de Ingeniería
Universidad de Mar del Plata, J. B. Justo 4302, (7600) Mar del Plata, Argentina

RESUMEN

Se presenta un formalismo de integral funcional para elastodinámica, que provee un marco muy conveniente para implementaciones computacionales sin red. El equilibrio se recupera aquí anulando las velocidades e imponiendo una condición de no-evolución. La implementación computacional combina una sencilla aproximación polinómica de segundo grado con una aproximación de las ecuaciones de evolución exactas, y se la designa como Método de Integral Funcional (MIF). El error, que es orden h^2 , depende en este método de un parámetro adimensional ζ . La formulación fuerte corresponde al caso $\zeta = 0$. Cuando se usan los ocho primeros vecinos para el ajuste en una disposición regular de nodos, los elementos finitos bilineales corresponden exactamente a la elección $\zeta = 0.5$. Sin embargo, el uso del parámetro óptimo (que en este caso es $\zeta = 0.75$) provee una precisión superior con el mismo coste computacional. Se discuten también otras disposiciones nodales. Finalmente, el MIF se aplica a vibraciones estacionarias (modos normales) y a problemas transitorios.

ABSTRACT

We present a functional integral formalism for elastodynamics which provides a convenient framework for meshless computational implementation. Equilibrium is recovered by setting velocities to zero and enforcing a no-evolution condition. The computational implementation, which we term Functional Integral Method (FIM) combines a simple least squares second degree polynomial fitting with an approximation of the exact equations. The error which is order h^2 , depends on a non dimensional parameter ζ . The strong formulation corresponds to the limit $\zeta = 0$. When the first eight neighbors are used to fit the polynomial on a regular nodal array bilinear finite element equations are recovered exactly for $\zeta = 0.5$. However, the use of the optimal parameter (which in this case is $\zeta = 0.75$) provides better accuracy. Other nodal arrays are also discussed. Finally, the FIM is applied to stationary vibrations and transient problems.

INTRODUCCIÓN

Se llama métodos sin red [1] - [7] a aquellos que no requieren una partición del dominio (tal como sucede con elementos finitos) ni exigen una disposición regular de nodos (como en diferencias finitas). Se han desarrollado diversos métodos de este tipo, sobre todo en la última década. Estos se formulan ya sea en términos de la ecuación diferencial que gobierna el problema o de un principio variacional o formulación débil equivalente. El primer grupo incluye Diferencias Finitas Generalizadas, Puntos Finitos y diversos métodos de colocaciones por puntos. En el segundo grupo pueden citarse las Particiones de la Unidad (PU), Mínimos Cuadrados Móviles (MCM), h-p clouds, el Método de Elementos Naturales (MEN), Smooth

Particle Hydrodynamics y Reproducing Kernel Particle Methods . Sin embargo, algunos de estos métodos requieren de todos modos una malla de fondo para integrar. Otros (como las formulaciones fuertes y los últimos dos citados), no exigen tal cosa pero son en general menos precisos, necesitan de esquemas de estabilización, y requieren pos procesamiento para suavizar la solución. Una alternativa relativamente poco explorada es reformular el problema de modo que no se requiera integrar exactamente sobre un dominio ni calcular derivadas de orden superior. Recientemente se mostró que esto puede hacerse para elastostática, parabolizando las ecuaciones de Navier y formulando una integral funcional [8]. Aquí se muestra que las ecuaciones de la elastodinámica también pueden formularse de ese modo.

FORMULACION

Brevemente, la formulación es como sigue. El estado dinámico del sistema viene dado por el campo de desplazamiento y su derivada temporal:

$$\mathbf{v}_{(x,t)} = (\mathbf{u}_{(x,t)}, \dot{\mathbf{u}}_{(x,t)}) \quad (1)$$

Si bien la evolución del estado puede formularse por una ecuación diferencial o un principio variacional, aquí buscamos hacerlo en términos de un operador que mapee el estado inicial en el estado final:

$$\mathbf{v}_{(x,t+\tau)} = \int \Delta_{(x,\bar{x},\tau)} \mathbf{v}_{(\bar{x},t)} d^3 \bar{x} \quad (2)$$

El operador Δ en (2), que en 3-D es una matriz de 6×6 , es la función fuente, solución fundamental o propagador del problema. Este último nombre es el más adecuado por motivos que se verán más adelante. El presente método se basa en la suposición de que el propagador puede expresarse como una integral funcional:

$$\Delta_{(x,\bar{x},\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty, N \cdot \varepsilon = \tau} \int \mathbf{A}_{(x,x_1,\varepsilon)} \int \mathbf{A}_{(x_1,x_2,\varepsilon)} \cdots \int \mathbf{A}_{(x_{N-1},\bar{x},\varepsilon)} d^3 x_1 \cdot d^3 x_2 \cdots d^3 x_N \quad (3)$$

donde los operadores \mathbf{A} , que llamaremos *propagadores infinitesimales*, tienen la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{P}' & \mathbf{Q}' \end{bmatrix} \quad (4)$$

Los símbolos \mathbf{P} y \mathbf{Q} en (4) designan matrices de 3×3 (2×2 en 2-D) mientras que el apóstrofe indica derivación respecto a ε :

$$\mathbf{P}' = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \varepsilon} \quad ; \quad \mathbf{Q}' = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \varepsilon} \quad (5)$$

En particular, \mathbf{Q} es una matriz diagonal: $\mathbf{Q} = \varepsilon \mathbf{I} \delta_{(x-\bar{x})}$ donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Por otro lado, puede demostrarse que en un recinto infinito bidimensional (def. plana) \mathbf{P} puede expresarse como:

$$\mathbf{P}_{(x,\bar{x},\varepsilon)}^{11} = \frac{\exp\left[-\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{a\varepsilon^2}\right]}{\sqrt{\pi a\varepsilon}} \cdot \frac{\exp\left[-\frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{b\varepsilon^2}\right]}{\sqrt{\pi b\varepsilon}} \quad (6-a)$$

$$P_{(x,\bar{x},\varepsilon)}^{22} = \frac{\exp\left[-\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{b\varepsilon^2}\right] \exp\left[-\frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{a\varepsilon^2}\right]}{\sqrt{\pi b\varepsilon} \sqrt{\pi a\varepsilon}} \quad (6-b)$$

$$P_{(x,\bar{x},\varepsilon)}^{12} = P_{(x,\bar{x},\varepsilon)}^{21} = \frac{\exp\left[-\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{c\varepsilon^2}\right] \exp\left[-\frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{c\varepsilon^2}\right]}{\sqrt{\pi c\varepsilon} \sqrt{\pi c\varepsilon}} \cdot \frac{(\bar{x}_1 - x_1)(\bar{x}_2 - x_2)}{c\varepsilon^2} \quad (6-c)$$

$$a = 4 \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \quad ; \quad b = 4 \frac{\mu}{\rho} \quad ; \quad c = 4 \frac{(\lambda + \mu)}{\rho}$$

Que esta es una representación correcta del problema puede verse del siguiente modo. Considérese un paso infinitesimal de tiempo, de modo que la (2) se aproxima:

$$v_{(x,t+\varepsilon)} = \iint A_{(y,\varepsilon)} \cdot v_{(x+y,t)} \cdot d^2 y \quad (7)$$

Entonces, desarrollando el primer miembro de (7) en potencias de ε , el segundo en potencias de x , integrando y dividiendo el resultado por ε^2 , la primera ecuación resulta:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} = O(\varepsilon) \quad (8)$$

que es una ecuación de Navier.

El propagador exacto, por otra parte, se construye con la función de Green, G , del problema y sus derivadas parciales respecto del tiempo. Se tiene:

$$\Delta^{12} = Q_{exact} = G_{(x,\bar{x},t)}$$

Mientras que los otros elementos de matriz se calculan como:

$$P_{exact} = Q'_{exact} = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad ; \quad P'_{exact} = \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$$

Tomando una función de Green conocida (p.ej. en un recinto infinito) puede verificarse que el propagador exacto satisface, como se requiere, que:

$$\Delta_{(x-\bar{x},t+\tau)} = \int \Delta_{(x-x_1,t)} \cdot \Delta_{(x_1-\bar{x},\tau)} \cdot dx_1 \quad (9)$$

Demostrar que la integral funcional (3) converge al propagador exacto es un poco más complicado. Nosotros lo hemos hecho para el caso particular de la ecuación escalar de ondas, por lo que suponemos también ocurre con las ecuaciones de Navier.

ELASTOSTÁTICA

Las ecuaciones de equilibrio se recuperan imponiendo la condición de que el estado no evoluciones. Esto a su vez implica que las velocidades se anulen. Entonces, tomando un intervalo de tiempo suficientemente pequeño, ε , el equilibrio puede aproximarse como:

$$u_{(x)} = \int P_{(x,y,\tau)} \cdot u_{(y)} \cdot d^2 y \quad (10)$$

Para hallar una solución computacional el campo de desplazamiento se aproxima, como es habitual, en términos de N funciones base:

$$u^i_{\alpha(x)} = \sum_{i=1}^N \Phi_{i(x)} u^i_{\alpha} \quad (11)$$

Reemplazando (11) en (10) conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas:

$$u^i_{\alpha} - \int P_{(x',y,\varepsilon)}^{\alpha\beta} \cdot \Phi_{j(y)} d^2 y u^j_{\beta(r)} = 0, \text{ que puede ponerse: } K_{ij}^{\alpha\beta} u^j_{\beta} = F_i^{\alpha} \quad (12)$$

En cuanto a la aproximación del campo de desplazamientos, usaremos aquí el modo más sencillo posible que es un polinomio, cuyos coeficientes se ajustan por mínimos cuadrados:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{(x,y)} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_{(x,y)} \quad (13)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{u}}_{(x,y)} = (u_{1(x,y)}, u_{2(x,y)})' ; \quad \mathbf{R}_{(x,y)} = (1, x, y, x^2, xy, y^2)' \quad (14)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 & a_6^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Reemplazando esta discretización en (10) resulta para el nodo i :

$$u_i^1 = a_1^1 + (\lambda + 2\mu)\varepsilon^2 \cdot a_4^1 + 0.5(\lambda + \mu)\varepsilon^2 \cdot a_5^1 + \mu\varepsilon^2 \cdot a_6^1 \quad (16)$$

Es interesante observar que si el paso de tiempo es muy grande, es decir para $\varepsilon \rightarrow \infty$, los dos primeros términos, u_i y a_i en (16) se toman despreciables, y la expresión resultante coincide con una formulación fuerte: colocaciones por puntos. Obsérvese que en realidad ε no puede ser muy grande puesto que la expresión de partida (7) sólo es válida como aproximación del problema exacto (2) en un intervalo infinitesimal. Tal vez a esto se deba el hecho de que colocaciones por puntos dé resultados tan pobres en comparación con MIF.

Para realizar un análisis de convergencia hemos considerado arreglos regulares de nodos. Cuando el polinomio aproximante se ajusta con los primeros ocho vecinos (figura 1), la ecuación nodal (y por ende el error) depende del parámetro adimensional $\zeta = h^2/3(\lambda + 3\mu)\varepsilon^2$.

$$u_0^1 = \frac{1}{(1+2\zeta)} \left\{ \left[\zeta + \frac{\lambda}{2(\lambda+3\mu)} \right] \cdot (u_1^1 + u_3^1) + \left[\zeta - \frac{(2\lambda+3\mu)}{2(\lambda+3\mu)} \right] (u_3^1 + u_7^1) + \frac{1}{2}(1-\zeta) \cdot (u_2^1 + u_4^1 + u_6^1 + u_8^1) + \frac{3}{8} \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+3\mu)} (u_2^2 - u_4^2 + u_6^2 - u_8^2) \right\} \quad (17)$$

La convergencia resulta ser cuadrática en desplazamientos, como cabe esperar. Obsérvese que la formulación fuerte corresponde al límite $\zeta \rightarrow 0$. Un resultado muy curioso es que para $\zeta = 1/2$, la ecuación (17) corresponde exactamente a la de elementos finitos bilineales. Más aun, analizando la contribución de las derivadas cuartas del campo al error nodal encontramos que la elección óptima es $\zeta = 3/4$. En este caso, si el campo de desplazamientos es irrotacional la convergencia es orden 3 (es decir, superconvergencia). Esto se muestra en la figura 2, que compara el error del MEF con MIF en función del espaciado nodal. En la figura 3 se presenta el error en función del parámetro adimensional ζ .

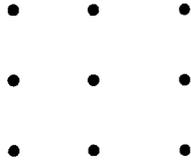


Figura 1: Nube de 8 puntos alrededor del nodo central 0.

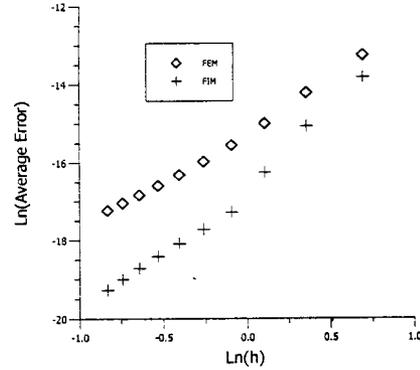


Figura 2: Error medio vs. Espaciado nodal. Comparación entre elementos bilineales y MIF.

También hemos inspeccionado otros arreglos nodales. Un caso curioso es tomar los seis primeros vecinos de un arreglo "hexagonal" de nodos (p.ej. los nodos de un conjunto de elementos triangulares equiláteros). En este caso particular los tres métodos mencionados, MEF, MIF y colocaciones dan la misma ecuación nodal. Pero esta es la excepción. En todos los otros casos analizados colocaciones es muy pobre, mientras que MIF da mejor precisión que MEF. Esto se hace extensivo a tres dimensiones. Al considerar los primeros 26 vecinos de un arreglo regular, el parámetro óptimo depende ahora del módulo de Poisson. Para $\nu \approx 0.3$ el óptimo resulta $\zeta_{opt} \approx .6$. La figura 4 muestra el error en función del espaciado nodal para elementos hexaédricos y MIF en simulaciones de un medio infinito con un agujero esférico.

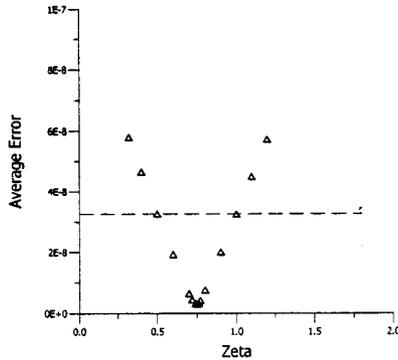


Figura 3: Error medio vs. parámetro zeta. Línea punteada es FEM.

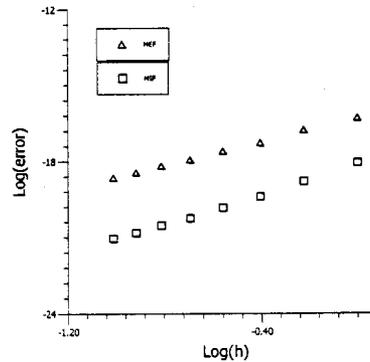


Figura 4: Error medio vs. espaciado nodal. Comparación entre elementos finitos hexaédricos y MIF con 26 vecinos.

COMENTARIOS FINALES

Si bien aquí sólo nos hemos referido a la aplicación del MIF en elastostática, también hemos experimentado con su uso en dinámica. Para el cálculo de frecuencias y modos normales se parte nuevamente de (7), y se exige que la solución sea armónica: $u_{(x,t+\varepsilon)} = u_{(x)} e^{j\omega(t+\varepsilon)}$. El resultado es una típica ecuación de autovalores, con la particularidad de que la matriz resulta no simétrica. Hemos resuelto algunos problemas de vibraciones de vigas con resultados satisfactorio.

Para problemas transitorios hay dos alternativas. La aplicación directa de la ecuación (7) conduce a un esquema explícito. Los resultados son satisfactorios pero, como en todo esquema explícito la estabilidad limita el paso de tiempo. Otra alternativa, que aun no hemos programado, es invertir la (7) expresando el estado a tiempo t en función del estado en un instante *anterior*. Esto conduciría a un esquema implícito.

Para finalizar, es oportuno mencionar que si los elementos de matriz \mathbf{Q} del propagador infinitesimal \mathbf{A} (ecuación (3)), son reemplazados por gaussianas convenientemente elegidas, se obtienen ecuaciones viscoelásticas. Estamos comenzando a experimentar con ese esquema, pero los resultados preliminares son prometedores.

REFERENCIAS

- [1]. T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl, *Meshless methods: An overview and recent developments*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 139,1996, págs. 3-47.
- [2]. I. Babuska and J.M. Melenk, *The Partition of Unity Method*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 40,1997, págs. 727-758.
- [3]. B. Nayroles, G. Touzot and P. Villon, *Generalizing the Finite Element Method: Diffuse approximation and Diffuse Elements*, Comp. Mech., Vol. 10, 1992, págs. 307-318.
- [4]. C.A Duarte and J.T. Oden, *H-p adaptive method using clouds*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 139, 1996, págs. 237-262.
- [5]. N. Sukumar, B. Moran and T. Belytschko, *The Natural Element Method in Solid Mechanics*, Int. J. Numer. Meth. Engrg, Vol. 43, 1998, págs. 839-887.
- [6]. W.K. Liu, S. Jun and Y.F. Zhang, *Reproducing Kernel Particle Methods*, Int. J. Numer. Meth. Engrg, Vol. 20, 1995, págs. 1081-1106.
- [7]. T. Lyszka, *An Interpolation Method for an Irregular Net of Nodes*, Int. J. Numer. Methods Engrg, Vol. 20, 1984, págs 1599-1612.
- [8]. E. Pardo, *Meshless Method for Linear Elastostatics based on a Path Integral Formulation*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 47, 2000, págs 1463-1480.