

## SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINAMICA IDEAL POR MEDIO DE UN ESQUEMA TVD

**Sergio A. Elaskar**

*Instituto Universitario Aeronáutico  
Ruta 20, km 5.5, Córdoba (5022), Argentina  
Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba  
Av. Velez Sarfield 1601, Córdoba (5000), Argentina*

### RESUMEN

En este trabajo se presenta la solución numérica de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal para una única especie (MHD). El estudio corresponde a un problema unidimensional e inestacionario. Se utiliza la técnica introducida por Powell [1]. Con el objetivo de evitar problemas en algunas situaciones particulares durante la simulación los vectores propios utilizados están normalizados. Para realizar la simulación numérica se utiliza un seguidor de Riemann aproximado en forma conjunta con una técnica TVD para evaluar los flujos numéricos.

El problema analizado para verificar el adecuado comportamiento del código computacional desarrollado corresponde al de Riemann para la MHD. Este es una extensión del tubo de choque utilizado en dinámica de gases. Sin embargo, en MHD se posee velocidad y campo magnético en dos direcciones espaciales. Los resultados obtenidos muestran la riqueza de fenómenos que aparecen en la solución del problema de Riemann magnetohidrodinámico. Se destaca que los resultados aquí presentados concuerdan con los hallados por otros autores.

### ABSTRAC

The numerical solution of the ideal magnetohydrodynamic equations (MHD) is presented. The study corresponds to a non-steady problem. The technique introduced by Powell [1] is used. The eigenvectors are normalized to avoid problems during the simulation. To carry out the numeric simulation an approximate Riemann solver is used in combined form with a TVD technique to evaluate the numeric flows.

The analyzed problem to verify the appropriate behavior of the computational code is of Riemann problem for the MHD. This is an extension of the shock tube used in gas dynamic. The obtained results show the richness of the single fluid MHD solution. Also the results here presented satisfies those found by other authors.

### INTRODUCCION

El principal objetivo de este trabajo es desarrollar un código computacional para resolver las ecuaciones de la MHD ideal considerando una única especie, flujo unidimensional y dependiente del tiempo. Para tal fin se utiliza las técnicas numéricas aplicadas con éxito en la dinámica de gases.

Las ecuaciones que gobiernan los flujos descriptos por la MHD son las de continuidad, cantidad de movimiento, energía e inducción magnética junto con una ecuación de estado.

La técnica numérica empleada es un seguidor de Riemann aproximado (approximate Riemann solver) que actualiza las variables dentro de cada celda evaluando los flujos a través del contorno de las mismas. Para el cálculo de dichos flujos numéricos se utiliza el esquema TVD propuesto por Yee, *et al.* [2] en la forma descrita por Bogdan [3]. Para poder aplicar el seguidor de Riemann en situaciones que poseen más de una dimensión es necesario que la matriz Jacobiana del vector flujo posea tantos valores propios como variables a resolver. El sistema de las ecuaciones de la MHD ideal posee ocho ecuaciones pero solamente siete valores propios, por tal motivo se ha utilizado la técnica presentada

por Powell [1]. Es importante destacar que para un tratamiento unidimensional como el aquí desarrollado no es imprescindible aplicar este método, sin embargo es útil para extender el funcionamiento del código a problemas en dos y tres dimensiones. Además se ha realizado la normalización de los vectores propios siguiendo los trabajos de Zarachay, *et al.* [4]; Roe y Balsara [5]; y Bodgan [3]. El principal objetivo es evitar inconvenientes numéricos debidos a la degeneración del sistema.

Para verificar el buen comportamiento del código computacional se ha simulado el problema de Riemann introducido por Brio y Wu [6]. Se trata de la generalización del tubo de choque aplicado frecuentemente en dinámica de gases. Los resultados obtenidos en la presente investigación satisfacen los descriptos por otros autores (Powell [1], Bodgan [3]).

### ECUACIONES DE LA MHD IDEAL

Las ecuaciones de la MHD ideal para flujos unidimensionales en forma conservativa y adimensional se expresan como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

donde  $U$  es el vector de las variables de estado conservativas

$$U = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z, E)^T \quad (2)$$

y  $F$  es el vector que especifica los flujos:

$$F = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{B^2}{2} \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left( E + p + \frac{B^2}{2} \right) u_x - (u_x B_x + u_y B_y + u_z B_z) B_x \end{pmatrix} \quad (3)$$

con  $\rho$  se indica la densidad;  $u_x, u_y, u_z$  son las componentes del vector velocidad;  $B_x, B_y, B_z$  representan las componentes del vector campo magnético;  $p$  es la presión;  $E$  la energía;  $B^2$  se define como:

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \quad (4)$$

La expresión que explicita a la energía es:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{1}{2} B^2 \quad (5)$$

siendo  $\gamma$  el cociente entre los calores específicos; y  $V$  representa el modulo del vector velocidad

$$V^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \quad (6)$$

El sistema de ecuaciones (1) puede ser aproximado por su forma cuasi-lineal:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_c \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad A_c = \frac{\partial F}{\partial U} \quad (7)$$

donde  $A_c$  es la matriz Jacobiana del vector flujo, la letra "c" indica que la derivación ha sido realizada con respecto a las variables conservativas. Sin embargo la forma de la matriz Jacobiana es más simple en función de el vector de variables primitivas ( $W$ ):

$$W = (\rho, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p)^T \quad (8)$$

Por lo tanto, la Ec. (7) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_p \frac{\partial W}{\partial x} = 0; \quad A_p = \frac{\partial F}{\partial W} \quad (9)$$

La transformación que relaciona las matrices  $A_p$  y  $A_c$  es:

$$A_p = \left( \frac{\partial U}{\partial W} \right)^{-1} A_c \left( \frac{\partial U}{\partial W} \right) \quad (10)$$

Un seguidor de Riemann basado en un sistema de ocho ondas utilizando la matriz  $A_p$  no puede aplicarse en función de que un valor propio es cero y carece de significado físico. Es importante notar que las formulaciones en variables primitivas y en variables conservativas son equivalentes, por lo tanto este valor propio nulo aparece en ambas. Para resolver este inconveniente se ha implementado una matriz Jacobina alternativa presentada por Powell  $A'_p$  (ver Ref. [1]). Se destaca que para resolver el problema unidimensional no es necesario utilizar la matriz  $A'_p$  debido a que solamente se necesitan siete valores propios independientes por verificarse que  $B_x = cte$ . Sin embargo, en este trabajo se la ha implementado porque permite un extensión directa a problemas en dos o tres dimensiones. Los valores propios de la matriz  $A'_p$  son:

$$\lambda_e = u_x; \quad \lambda_a = u_x \pm c_a; \quad \lambda_f = u_x \pm c_f; \quad \lambda_s = u_x \pm c_s; \quad \lambda_d = u_x \quad (11)$$

siendo  $c_a$ ;  $c_s$  y  $c_f$  las velocidades de Alfvén y las magnetosónicas lenta y rápida respectivamente:

$$c_a = \frac{B_x}{\rho}; \quad c_{f,s} = 0.5 \left[ \frac{\mathcal{P} + B^2}{\rho} \pm \sqrt{\left( \frac{\mathcal{P} + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\mathcal{P} B_x^2}{\rho^2}} \right] \quad (12)$$

el signo positivo corresponde a las ondas magnetosónicas rápidas.

Finalmente se destaca que los vectores propios han sido normalizados para evitar problemas debido a la degeneración del sistema (Roe y Balsara, [5]).

### METODO NUMERICO

Las ecuaciones planteadas en la sección anterior son resueltas utilizando un seguidor de Riemann aproximado junto con un esquema explícito. Para calcular los flujos numéricos se ha implementado la técnica TVD upwind de Yee, *et al.* [2] con la cual se obtiene una aproximación espacial de segundo orden. Dicha técnica es utilizado para calcular los flujos numéricos en todas las celdas interiores. El esquema TVD para el sistema descrito en Ec. (1) se expresa de la siguiente forma:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (13)$$

La función que determina los flujos numéricos se define como:

$$\bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left( F_{j+1}^n + F_j^n + R_{j+\frac{1}{2}}^n \Phi_{j+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (14)$$

siendo  $R$  la matriz que contiene a los vectores propios derechos de la matriz  $A_c$ . Además  $\Phi$  es el vector de disipación, cuyos elementos para el esquema TVD-upwind de segundo orden se expresan de la siguiente forma:

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}^l = (g_{j+1}^l + g_j^l) - \sigma \left( \lambda_{j+\frac{1}{2}}^l + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^l \right) \alpha_{j+\frac{1}{2}}^l \quad (15)$$

La función "limitadora"  $g_j^l$  posee diferentes expresiones, los resultados aquí presentados han sido obtenidos utilizando la siguiente definición:

$$g_j^l = \text{sgn} \left( \lambda_{j+\frac{1}{2}}^l \right) \max \left\{ 0, \min \left[ \sigma_{j+\frac{1}{2}}^l \left| \alpha_{j-\frac{1}{2}}^l \right|, \frac{\text{sgn} \left( \lambda_{j+\frac{1}{2}}^l \right)}{2} \sigma_{j+\frac{1}{2}}^l \left| \alpha_{j-\frac{1}{2}}^l \right| \right] \right\} \quad (16)$$

La función  $\sigma(z)$  es:

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= |\lambda|, & \text{si } |\lambda| \geq \varepsilon \\ \sigma(z) &= \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}, & \text{si } |\lambda| < \varepsilon \end{aligned} \quad (17)$$

y  $\gamma_{j+\frac{1}{2}}^l$  se define como:

$$\begin{aligned} \gamma_{j+\frac{1}{2}}^l &= \frac{(g_{j+1}^l - g_j^l)}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^l}, & \text{si } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^l \neq 0 \\ \gamma_{j+\frac{1}{2}}^l &= 0, & \text{si } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^l = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Por simplicidad, para obtener los  $\alpha^l$  se han utilizado las variables primitivas:

$$\alpha^m = L_p^l (W_{i+1} - W_i) \quad (19)$$

siendo  $L_p^l$  el vector propio izquierdo de la onda  $l$ .

### RESULTADOS NUMERICOS

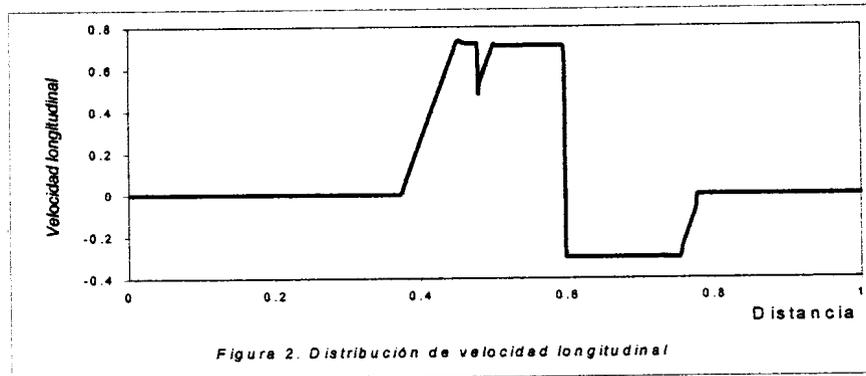
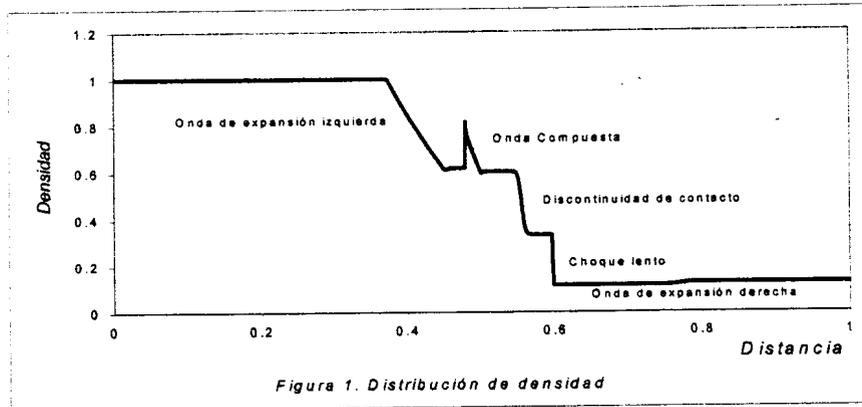
Se presenta en esta sección los resultados obtenidos para el caso del problema de Riemann propuesto por Brio y Wu [6]. Este es un benchmark muy utilizado en la comunidad científica dentro de la MHD con el objetivo de evaluar el comportamiento de las técnicas numéricas y de los códigos computacionales. Brio y Wu proponen estudiar la extensión a la MHD del tubo de choque clásico utilizado en dinámica de gases. Este ejemplo se denomina problema de Riemann plano debido a que únicamente existen componentes de los vectores velocidad y campo magnético en dos dimensiones.

Los valores de las variables están dados en forma adimensional y la longitud del tubo de choque magnetohidrodinámico es uno. La discontinuidad o diafragma que separa los estados iniciales izquierdo y derecho está ubicada en la mitad del tubo dividiendo a éste en dos partes iguales. Los valores iniciales son:

$$\begin{aligned} W_i &= (1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.75, 1.0, 0.0, 0.1, 0)^T \\ W_d &= (0.125, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.75, -1.0, 0.0, 0.1)^T \end{aligned} \quad (20)$$

siendo  $W_i$  y  $W_d$  los vectores que contienen a las variables primitivas a la izquierda y a la derecha del diafragma respectivamente.

En las Figuras 1, 2, 3 y 4 están representadas la densidad ( $\rho$ ), la velocidad en la dirección longitudinal ( $u_x$ ), la velocidad transversal ( $u_y$ ) y el campo magnético transversal ( $B_y$ ) en función de la dirección longitudinal. En todos los gráficos la malla utilizada posee 4000 nodos y es fija. Se destaca que los resultados hallados satisfacen aquellos publicados por otros autores (ver Refs. [1 y 3]).



### CONCLUSIONES

Se destacan ahora las principales conclusiones obtenidas de la presente investigación:

- 1) La simulación numérica utilizando un seguidor de Riemann aproximado junto con el esquema TVD de Yee para la evaluación de los flujos ha mostrado ser una alternativa efectiva, tanto considerando el bajo costo computacional (adecuado para PC) como en la calidad de los resultados hallados.
- 2) La implementación de la normalización de los vectores propios de la matrices  $A_p$  y  $A_c$  es una alternativa importante para evitar los problemas relacionados con la degeneración del sistema de ecuaciones.

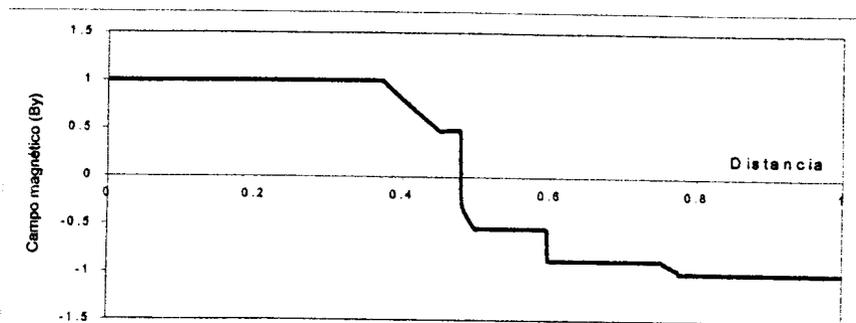


Figura 4. Distribución de campo magnético transversal

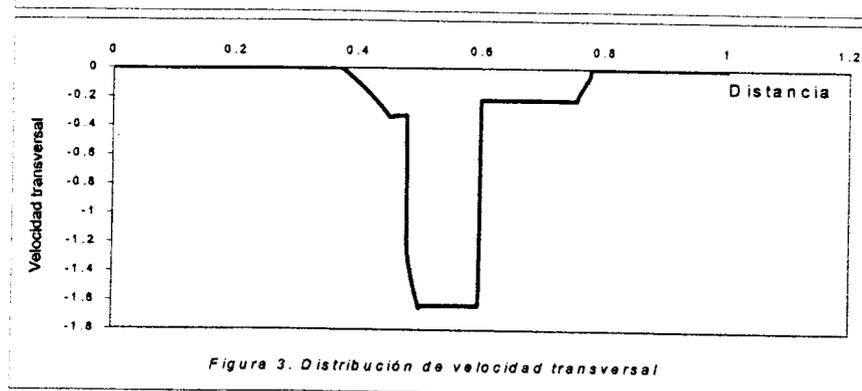


Figura 3. Distribución de velocidad transversal

3) La técnica de ocho ondas desarrollada por Powell [1] no introduce modificaciones en los resultados comparados con aquellos publicados en la literatura especializada utilizando solamente siete ondas.

#### Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por medio del proyecto Foncyt PICT-97-02205.

#### REFERENCIAS

- [1] Powell, K., *An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension)*, NASA Contract No NAS1-19480, ICASE, NASA Langley Research Center, Hampton, 1995.
- [2] Yee, H.; Warming, R. y Harten, A., *Implicit total variations diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations*, J. Comput. Phys., Vol. 57, 1985, págs. 327 - 360.
- [3] Bogdan, U., *An advanced implicit solver for MHD*, PhD Thesis, University of Washington, 1999.
- [4] Zarachay, A.; Malagoli, A. y Collela, P., *A higher order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics*, SIAM J. on Sci. Comput., Vol. 15, 1994, págs. 263 - 284.
- [5] Roe, P. y Balsara, D., *Notes on the eigensystem of magnetohydrodynamics*, SIAM J. App. Math., Vol. 56, 1996, págs. 57-67.
- [6] Briio, M. y Wu, C., *An upwind differencing scheme for the equations of magnetohydrodynamics*, J. Comput. Phys., Vol. 45, 1988, págs. 400-422.