

UN MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ OPTIMIZADO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS ADOPTANDO COORDENADAS MIXTAS

Mario Scheble, Cristina N. Strizzolo, José Converti
Comisión Nacional de Energía Atómica
Centro Atómico Bariloche, 8400 Bariloche, Río Negro, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se presenta una versión optimizada del método de Rayleigh-Ritz en coordenadas físicas para el análisis dinámico de estructuras, que retiene sus principales características, pero incorpora ventajas adicionales importantes. Las mejoras se basan en el hecho de que, en la etapa de ensamblaje, sólo se requieren las coordenadas físicas necesarias para la imposición de vínculos rígidos. En esta implementación en coordenadas mixtas, se retienen únicamente dichas coordenadas, mientras que las demás se eligen de manera de optimizar el número de condición de las matrices de transformación. El procedimiento, que se aplica de manera sistemática, no deja elecciones libradas al criterio del usuario y permite obtener un comportamiento numérico óptimo.

ABSTRACT

An improvement to the Rayleigh-Ritz substructure synthesis method in physical co-ordinates is presented. It retains the main features of such method but with additional important advantages. The improvement presented is based on the fact that only the physical co-ordinates to be constrained are really required for assembling. The adoption of mixed co-ordinates retains only the physical co-ordinates required while the others are chosen in order to optimize the condition number of transformation matrices. The procedure done in a systematic manner leaves no free choice to the user and leads to an optimal numerical behavior.

INTRODUCCIÓN

El método Rayleigh-Ritz en coordenadas físicas [1] ha mostrado un comportamiento excelente cuando se aplica al análisis modal de estructuras ensambladas a partir de vigas o placas rectangulares. Dos son sus principales ventajas. La primera es el uso de técnicas de ensamblaje standard similares a las usadas en FEM. Este procedimiento resulta más simple y numéricamente más eficiente que la descomposición en valores singulares utilizada habitualmente en las etapas de ensamblaje y reducción de orden, que trabajan con matrices reales llenas, en vez de matrices booleanas. La segunda es que las matrices de masa y de rigidez que se obtienen para ser diagonalizadas son ralas, a diferencia de lo que ocurre con la

utilización de coordenadas generalizadas, con la consiguiente disminución del costo computacional.

Sin embargo, una desventaja es que la elección de coordenadas físicas queda a criterio del usuario y en muchos casos, tal elección puede conducir a matrices de transformación mal condicionadas que dificulten la aplicación del método. Este grave inconveniente puede sortearse observando que sólo las coordenadas físicas sobre las que han de imponerse condiciones de borde son requeridas para el ensamblaje. Por lo tanto, pueden adoptarse coordenadas mixtas, donde sólo se retengan las coordenadas físicas necesarias, mientras que las otras sean elegidas con el objetivo de optimizar el número de condición de las matrices de transformación.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

El esquema general del método es en un todo análogo al de su implementación en coordenadas físicas [1]. Sólo difiere en la definición de la transformación de coordenadas que se efectúa sobre las matrices de masa y de rigidez de cada subestructura, destinada a facilitar el ensamblaje.

Transformación a coordenadas mixtas

Las coordenadas físicas se eligen ahora únicamente donde son necesarias para establecer vínculos rígidos. Las coordenadas físicas internas no son necesarias para tal fin, y por lo tanto, puede sacarse ventaja de esta libertad reemplazándolas por nuevas coordenadas generalizadas elegidas con el objeto de optimizar el número de condición de las matrices de transformación.

Consideremos un dado componente estructural. Supongamos que se han adoptado N funciones de forma para modelarlo, y que M (con $M < N$) son las coordenadas físicas que se han elegido con propósitos de ensamblaje. Restan entonces por definir $(N-M)$ nuevas coordenadas generalizadas.

Sea $\mathbf{p} \in R^N$ el vector de coordenadas generalizadas originales, $\mathbf{x} \in R^M$ el vector de coordenadas físicas, $\mathbf{q} \in R^{(N-M)}$ el vector de nuevas coordenadas generalizadas, e $\mathbf{y} \in R^N$ el vector de coordenadas mixtas definido a partir de \mathbf{x} y \mathbf{q} de la siguiente forma:

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Al igual que en la implementación previa del método, definimos una matriz Φ , cada una de cuyas columnas está asociada a una función de forma. Los elementos de una dada columna se obtienen evaluando cada una de las coordenadas físicas resultantes del campo de desplazamiento definido por la correspondiente función de forma. Así definida, Φ resulta de dimensión $M \times N$, y aún se verifica que:

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{p} \quad (2)$$

Cuando sólo utilizáramos coordenadas físicas, Φ era una matriz cuadrada, y la transformación inversa era simplemente:

$$\mathbf{p} = \Phi^{-1} \mathbf{x} \quad (3)$$

Las matrices de masa y de rigidez del componente estructural en coordenadas físicas se obtenían realizando una transformación de similaridad definida por Φ^{-1} sobre las correspondientes matrices en coordenadas generalizadas.

Esta inversión simple no es ahora posible, y debemos construir directamente una matriz A , equivalente a Φ^{-1} , de transformación de coordenadas mixtas en las coordenadas generalizadas originales:

$$p = Ay \quad (4)$$

La correspondiente transformación de similaridad definida por A transformará ahora las matrices del componente estructural a coordenadas mixtas. La definición de las (N-M) nuevas coordenadas generalizadas estará implícita en la matriz A .

Condiciones necesarias de la matriz de transformación

Para facilitar la deducción, consideremos la siguiente partición de A en dos submatrices:

$$A = [A_f | A_g] \quad (5)$$

donde A_f , de dimensión $N \times M$, está formada con las primeras M columnas de A , asociadas a las coordenadas físicas, y A_g , de dimensión $N \times (N-M)$ está formada con las columnas restantes, asociadas a las nuevas coordenadas generalizadas.

Reemplazando (1) y (5) en (4), tenemos:

$$p = [A_f | A_g] \begin{Bmatrix} x \\ q \end{Bmatrix} = A_f x + A_g q \quad (6)$$

Premultiplicando ambos miembros de (6) por Φ y utilizando (2), obtenemos:

$$x = \Phi A_f x + \Phi A_g q \quad (7)$$

Ya que esta ecuación debe verificarse para x y q arbitrarios, resultan las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} \Phi A_f = I_{M \times M} & (8) \\ \Phi A_g = 0_{M \times (N-M)} & (9) \end{cases}$$

La ecuación (8) implica que A_f es una inversa a derecha de Φ . La ecuación (9) exige que las columnas de A_g pertenezcan al núcleo de Φ . Estas dos condiciones son las que necesariamente deben imponerse para que las nuevas coordenadas permitan realizar un ensamblaje con las técnicas de FEM.

Condiciones para la optimización del condicionamiento

Las ecuaciones (8) y (9) no determinan la matriz A . Aprovechando esta libertad, imponemos dos restricciones adicionales sobre A :

$$\begin{cases} A_g^T A_g = I_{(N-M) \times (N-M)} & (10) \\ A_f^T A_g = 0_{M \times (N-M)} & (11) \end{cases}$$

La idea de estas condiciones es la siguiente. Las matrices mejor condicionadas son las matrices ortogonales, cuyo número de condición es igual a 1. Es razonable suponer entonces, que si logramos el mayor grado de ortonormalización posible entre las columnas de A , el condicionamiento de la matriz mejorará sensiblemente. Así, dado que la ecuación (9) sólo nos impone que las columnas de A_g formen una base del núcleo de Φ , podemos elegir con tal propósito una base ortonormal, que es la condición que se impone a través de (10). Respecto de las columnas de A_f , ya que no están definidas por una ecuación homogénea como las de A_g , no podemos elegir las en general de manera que sean ortogonales entre sí. Pero sí podemos imponerles que sean ortogonales a las columnas de A_g . En efecto, la condición que impone la ecuación (8) es que cada columna de A_f pertenezca a la preimagen por Φ de un vector de la base canónica de R^M . Pero la preimagen de un vector no nulo es una variedad lineal paralela y de igual dimensión al núcleo, que siempre contiene un vector perteneciente al complemento ortogonal al mismo. Se trata de la proyección ortogonal de cualquier vector de la variedad sobre dicho complemento ortogonal, que resulta ser la misma para todos los vectores. Por lo tanto, podemos elegir, de todas las inversas a derecha de Φ , aquella cuyas columnas sean ortogonales a las de A_g , como se exige a través de la ec. (11). Debemos notar que en este caso no tenemos libertad de normalizar las columnas de A_f , ya que su norma viene dada por el proceso de construcción.

Con estas condiciones adicionales, la matriz A_f , queda totalmente determinada y A_g queda determinada a menos de una rotación, que no altera el número de condición de la matriz completa de transformación A . Por otra parte, de todas las matrices cuya inversa representa una transformación que lleva desde las coordenadas generalizadas iniciales a las coordenadas físicas necesarias para establecer los vínculos rígidos, A , así construida, es la que tiene el máximo grado posible de ortonormalización entre sus columnas.

Obtención de la matriz A

Ya sabemos que las columnas A_g se construyen con los vectores de una base ortonormal del núcleo de Φ .

Por su parte, puede demostrarse trivialmente que la pseudoinversa de Φ , definida como:

$$\Phi^+ = \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \quad (12)$$

cumple las condiciones impuestas sobre A_f . Es decir:

$$A_f = \Phi^+ \quad (13)$$

La descomposición de Φ en valores singulares nos permite calcular ambas matrices mediante un procedimiento sistemático. Toda matriz de $M \times N$, tal como la matriz Φ , admite una factorización de la forma [2]:

$$\Phi = Q_1 \Sigma Q_2^T \quad (14)$$

donde Q_1 es una matriz ortogonal de $M \times M$, Q_2 una matriz ortogonal de $N \times N$ y Σ una matriz de $M \times N$ de la forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_M & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mu} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{0_{M \times (N-M)}}$

donde μ_1, \dots, μ_M se denominan valores singulares de la matriz Φ . Si las coordenadas físicas elegidas son independientes, todos los μ_i resultan distintos de cero. Hemos designado con la letra μ a la matriz diagonal de $M \times M$ cuyos elemento diagonales son los valores singulares.

Consideremos la siguiente subdivisión de la matriz Q_2 en dos submatrices:

$$Q_2 = [Q_2^{(L)} | Q_2^{(R)}] \quad (16)$$

donde $Q_2^{(L)}$ es la matriz de $N \times M$ formada con las primeras M columnas de Q_2 , y $Q_2^{(R)}$ es la matriz de $N \times (N-M)$ formada con las últimas $(N-M)$ columnas de Q_2 .

Utilizando (14), la forma particular de Σ explicitada en (15) y la partición (16) de Q_2 , es fácil demostrar que $Q_2^{(R)}$ cumple todas las condiciones impuestas sobre A_g . Por lo tanto:

$$A_g = Q_2^{(R)} \quad (17)$$

Para calcular $A_f = \Phi^+$ se utiliza la siguiente identidad, que se demuestra reemplazando (14) en (12):

$$\Phi^+ = Q_2 \Sigma^+ Q_1^T \quad (18)$$

donde Σ^+ es la pseudoinversa de Σ . Trabajando con esta igualdad puede demostrarse la siguiente expresión, que permite expresar A_f en función de $Q_2^{(L)}$, Q_1 y los μ_i , que es el resto de la información contenida en la descomposición en valores singulares de Φ , no utilizada para la determinación de A_g :

$$A_f = Q_2^{(L)} \mu^{-1} Q_1^T \quad (19)$$

EJEMPLO COMPARATIVO

Para ilustrar los resultados del empleo de coordenadas mixtas, consideramos el ejemplo simple de un componente estructural de tipo viga, modelado con distintos órdenes utilizando polinomios de Legendre como funciones forma.

En la tabla I se comparan los números de condición de las matrices de transformación correspondientes a ambos métodos: Φ^{-1} en el caso de coordenadas físicas, y A en el caso de coordenadas mixtas. También se indican los números de condición de las matrices de masa de la viga en ambos tipos de coordenadas.

Vemos que en todos los casos los números de condición de las matrices en coordenadas mixtas son menores. Además, el condicionamiento de las matrices en coordenadas físicas se deteriora

drásticamente con el incremento en el orden del modelo, lo que torna el método inaplicable para un número relativamente pequeño de grados de libertad. En cambio, con el uso de coordenadas mixtas este problema se atenúa en forma notoria.

La tabla permite observar también que el condicionamiento de las matrices de transformación incide directamente sobre el de las matrices de masa. Estos números de condición tan altos de la matriz de masa indican la existencia de autovalores cercanos a cero, y esta situación introduce grandes errores en la solución del problema de autovalores.

TABLA I

Comparación de los números de condición de las matrices de transformación y de masa de una viga en coordenadas físicas y mixtas

Orden del modelo (N)	Número de condición			
	Matrices de transformación		Matrices de Masa	
	Coordenadas físicas (Φ^{-1})	Coordenadas mixtas (A)	Coordenadas físicas	Coordenadas mixtas
10	1.01E+03	1.57E+02	2.35E+06	2.98E+05
15	2.92E+04	4.19E+02	2.56E+09	3.57E+06
20	9.60E+05	8.47E+02	3.12E+12	2.01E+07
25	3.19E+07	1.46E+03	3.82E+15	7.80E+07
30	5.70E+08	2.29E+03	4.63E+18	2.33E+08

CONCLUSIONES

- El método de RR en coordenadas mixtas retiene todas la ventajas de su implementación en coordenadas físicas.
- Amplía sin embargo notablemente su rango de aplicación, al permitir atacar problemas de mucho mayor orden.
- La definición del cambio de coordenadas se realiza en función de optimizar el condicionamiento de las matrices de transformación, y por lo tanto no deja decisiones libradas al criterio del usuario.
- El teorema de descomposición en valores provee una método sistemático y computacionalmente económico de construir las matrices de transformación.
- Aunque hemos analizado el caso de un componente estructural aislado, es evidente que el problema del mal condicionamiento es heredado por las matrices de toda la estructura, ya que éstas se obtienen ensamblando las matrices individuales de cada subestructura.

REFERENCIAS

[1] Scheble, M., Strizzolo C. N. and Converti J., *A Rayleigh-Ritz Substructure Synthesis Method in Physical Co-ordinates for Dynamic Analysis of Structures*, Journal of Sound and Vibration 213(1), 1998, págs. 193-200.

[2] Strang, G. *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, New York, 1976