



DETERMINACION DE AUTOVALORES USANDO EL METODO OPTIMIZADO DE  
RAYLEIGH-RITZ Y "PSEUDO" DESARROLLOS DE FOURIER

por P.A.A. Laura, D.V. Bambill, P. Díaz, V.A. Jelderlinic y K.  
Rodríguez  
Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET) y Departamento de Ingeniería,  
Universidad Nacional del Sur - 8000 - Bahía Blanca

**Resumen.**

Hace algo más de un siglo Lord Rayleigh sugirió el uso de un parámetro de optimización en las funciones coordenadas polinómicas a ser utilizadas en la aplicación de su actualmente famoso método, teniendo como meta el minimizar el autovalor determinado.

Tres décadas después el célebre analista y diseñador de sistemas mecánicos, Stodola, utilizó este enfoque al determinar la frecuencia fundamental de un álabe. Linus Pauling y Bright-Wilson implementaron el enfoque utilizando funciones exponenciales en problemas de mecánica cuántica y Timoshenko y Goodier también lo hicieron, utilizando también funciones exponenciales, en un problema de torsión de barras elásticas.

En este trabajo se presentan aplicaciones del criterio de Rayleigh pero, difiriendo del enfoque de los autores citados, se usan funciones trigonométricas que contienen parámetros de optimización en su argumento, tomando como sistemas mecánicos vibrantes casos de placas o losas rectangulares con un borde libre.

**Abstract.**

Over 100 years ago Lord Rayleigh suggested the inclusion of a parameter  $\gamma$ , as an exponent in one of the terms of the expression which constitutes the proposed coordinate function. Minimization of the desired eigenvalue with respect to  $\gamma$  allows for its optimization.

Well known authors like Stodola, the Nobel Laureate; Linus Pauling and his eminent associate Bright-Wilson and Timoshenko and Goodier have employed the approach in the first half of the XX century and in recent years, several researchers from the USA and Argentina, have used it extensively.

The present paper reports numerical experiments performed by the authors where the optimization parameters,  $\gamma_n$ , are contained in the argument of a trigonometric expansion.

The method is applied in the case of a vibrating rectangular plate with a free edge and other combinations of boundary conditions in the other three edges.

**Introducción.**

Hace más de 120 años que Lord Rayleigh propuso su actualmente famoso

método, piedra basal de una de las metodologías más utilizadas en la solución aproximada de problemas de la mecánica del continuo, tanto en lo que se refiere a enfoques analíticos como en lo que concierne a técnicas numéricas que discretizan al sistema. Con posterioridad, y ya hace más de un siglo, Rayleigh sugirió el uso de un parámetro exponencial en las funciones coordenadas polinómicas que permitiese optimizar al autovalor buscado.

Varias décadas después Stodola utilizó esta técnica de optimización en la determinación de la frecuencia fundamental de un álabo: Linus Pauling y Bright-Wilson la aplicaron en problemas de mecánica cuántica y Timoshenko y Goodier en un problema de torsión de barras elásticas. Estos tres últimos autores emplearon el enfoque incluyendo el parámetro de optimización en el exponente de funciones exponenciales.

Más recientemente Schmidt y Bert, independientemente utilizaron la técnica, desconociendo la sugerencia de Lord Rayleigh, en diversos problemas de vibraciones y pandeo.

Su enfoque fue luego utilizado por varios investigadores argentinos habiendo sido implementado también en algunos códigos de elementos finitos.

En esta comunicación se presentan autovalores determinados en el caso de una placa rectangular vibrante con un borde libre y diversas combinaciones de apoyos en los tres restantes, habiéndose incluido los parámetros de optimización,  $\gamma_n$ , en los argumentos de funciones sinusoidales.

#### Formulación de la Teoría Propuesta.

En el caso de una placa delgada, de un material caracterizado por la ley de Hooke, y que ejecuta oscilaciones de pequeña amplitud,  $W$ , vibrando en uno de sus modos normales, el problema queda definido por minimización de la conocida funcional

$$J[W] = D/2 \iint \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\}^2 - 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \frac{\rho h}{2} \omega^2 \iint W^2 dx dy \quad (1)$$

La función  $W(x,y)$  debe satisfacer las condiciones prescritas en el contorno. Si se busca una solución aproximada  $W_a(x,y)$  es conveniente expresarla en la forma

$$W \approx W_a = \sum_{j=1}^N A_j f_j(x,y) \quad (2)$$

donde cada función coordenada,  $f_j(x,y)$ , satisface, al menos, las condiciones esenciales de borde.

\*La Referencia [1] describe, en detalle, aspectos históricos del método, y contiene un listado exhaustivo de la bibliografía existente.

La metodología de Rayleigh-Ritz requiere

$$\frac{\partial J}{\partial A_j} [W] = 0 \quad ; \quad J = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

y en definitiva resultará un determinante ecuación en los autovalores.

En el caso de los elementos estructurales mostrados en la Figura 1 y donde se tiene un borde libre, satisfacer las condiciones naturales en  $x = a$  se torna una tarea complicada ya que se deberían construir funciones coordenadas que satisfagan

$$\left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \Big|_{x=a} = 0 \quad (4 a)$$

$$\left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x=a} = 0 \quad (4 b)$$

Un criterio utilizado frecuentemente en la literatura ha sido el de construir funciones coordenadas en base a la condición aproximada

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \Big|_{x=a} = 0 \quad (5)$$

El enfoque, sumamente sencillo, desarrollado en [2] ha sido el de tomar como "función base", en la dirección  $x$ , y cuando  $x = 0$  está simplemente apoyado:

$$\text{sen } \frac{\pi x}{\gamma_1 a} \quad ; \quad \gamma_1 > 1 \quad (6)$$

Obviamente, el parámetro  $\gamma_1$  será ahora el parámetro de optimización de Rayleigh (contenido ahora en el argumento de una función trigonométrica). Al obtener el coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega = \sqrt{\rho h/D} \omega a^2$  mediante el planteo clásico del método de Rayleigh-Ritz, resulta

$$\Omega_1 = \Omega_1(\gamma_1) \quad (7)$$

y dado que  $\Omega_1$  es una cota superior se requerirá

$$\frac{d\Omega_1}{d\gamma_1} = 0 \quad (8)$$

lo cual permitirá optimizar el autovalor buscado.

El procedimiento podrá ser planteado en términos de una expresión similar a la (2) donde cada función coordenada contendrá un  $\gamma_j$ , y en definitiva la optimización de  $\Omega_1$  se logrará mediante la condición

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \gamma_j} = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

Por supuesto, autovalores de orden superior también pueden ser optimizados [3]. Los casos en que la rigidez flexional  $D$  es variable o que el material de la placa es ortótropo, no ofrecen dificultad conceptual.

A título de experimentación numérica en el presente trabajo se utilizaron:

- Figura 1(a)

$$W_a = \text{sen} \frac{\pi y}{b} \sum_{j=1}^8 A_j \text{sen}^2 \frac{\pi x}{\gamma_j a} \quad (10)$$

- Figura 1(b)

$$W_a = \text{sen}^2 \frac{\pi y}{b} \sum_{j=1}^8 A_j \text{sen}^2 \frac{\pi x}{\gamma_j a} \quad (11)$$

Es fácil verificar que cada función coordenada satisface idénticamente las condiciones esenciales de borde. También es posible, y en algunos casos: también conveniente, utilizar otro tipo de funciones (por ejemplo: polinómicas) para representar la variación del modo de vibración en la dirección y.

#### Resultados Numéricos.

La Tabla 1 contiene valores de  $\Omega_1$  para el caso de la placa o losa rectangular mostrada en la Figura 1(a). Se observa una razonable convergencia en los valores de  $\Omega_1$  a medida que el número de términos N, es incrementado. Las diferencias con los valores determinados por A.W. Leissa [4], quien los obtuvo de un determinante - ecuación 36 x 36, son del orden del 0.1 % para N = 3.

En el caso del sistema de la Figura 1(b) se observa una diferencia mayor con los valores de [4] si bien la convergencia de la técnica propuesta, es razonablemente adecuada. Las máximas diferencias con los valores determinados en [4] son del orden del 2%. En estudios posteriores se realizarán experimentos numéricos tomando otras representaciones funcionales en la variable y.

Una ventaja del criterio propuesto lo constituye el hecho de que puede ser implementado fácilmente en un lenguaje computacional orientado como el "Mathematica".

#### Agradecimientos.

El presente estudio es auspiciado por el CONICET (PID-BID 003/92) y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Proyecto: 1996-1997, Director: Ing. R.E. Rossi). Los coautores Pablo Díaz, Verónica A. Jederlinic y Karina Rodríguez, son estudiantes de las carreras de ingeniería civil, ingeniería industrial y física, respectivamente y cursan sus estudios en la Universidad Nacional del Sur. La Srta. Jederlinic cuenta con una beca de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Pcia. de Bs.As..

#### Referencias.

- (1) P.A.A. Laura. 1995. Ocean Engineering 22, 235-250. Optimization of variational methods.
- (2) P.A.A. Laura, D.V. Bambill, V.A. Jederlinic, K. Rodríguez y P. Díaz. 1996. Institute of Applied Mechanics (CONICET, Bahía Blanca). Publication IMA N° 96-34. Rayleigh's optimization concept and the use of sinusoidal coordinate function.
- (3) P.A.A. Laura y V.H. Cortínez. 1986. American Institute of Chemical

Engineers Journal 32, 1025-1026. Optimization of eigenvalues when using the Galerkin method.

(4) A.W. Leissa. 1973. Journal of Sound and Vibration 31, 257-293. The free vibration of rectangular plates.

$\Omega_1 = \sqrt{\rho h/D} \omega_1 a^2$					
	a/b				
	5/2	3/2	1	2/3	2/5
Leissa [4]	63.6800	24.6942	12.6874	7.4767	4.9004
N = 1	64.8888 $\gamma_1=2.80$	25.4705 2.79	13.1999 2.97	7.7917 3.17	5.0708 3.30
N = 2	63.9115 $\gamma_1=9$ $\gamma_2=1.01$	24.7847 3.93 1.01	12.7341 3.37 1.01	7.5018 3.27 1.01	4.9131 3.31 1.01
N = 3	63.7608 $\gamma_1=50$ $\gamma_2=1.01$ $\gamma_3=0.50$	24.7132 50 1.10 0.54	12.6977 4.27 1.08 0.54	7.4819 3.52 1.05 0.54	4.9031 3.57 1.09 0.55

TABLA 1 - Valores de  $\Omega_1$  en el Caso del Sistema Mostrado en la Figura 1(a).

$\Omega_1 = \sqrt{\rho h/D} \omega_1 a^2$					
	a/b				
	5/2	3/2	1	2/3	2/5
Leissa [4]	141.106	51.7837	24.0200	11.8804	6.02496
N = 1	144.322 $\gamma_1=2.52$	53.2229 2.72	24.8482 2.91	12.3917 3.11	6.3207 3.26
N = 2	143.6990 $\gamma_1=20$ $\gamma_2=1.04$	52.7417 30 1.10	24.4920 3.9 1.04	12.1351 3.75 1.09	6.1567 3.52 1.09
N = 3	143.598 $\gamma_1=40$ $\gamma_2=1.00$ $\gamma_3=0.50$	52.7214 30 1.10 0.52	24.4638 3.9 1.04 0.52	12.1197 3.75 1.09 0.53	6.1476 3.60 1.09 0.55

TABLA 2 - Valores de  $\Omega_1$  en el Caso del Sistema Mostrado en la Figura 1(B).

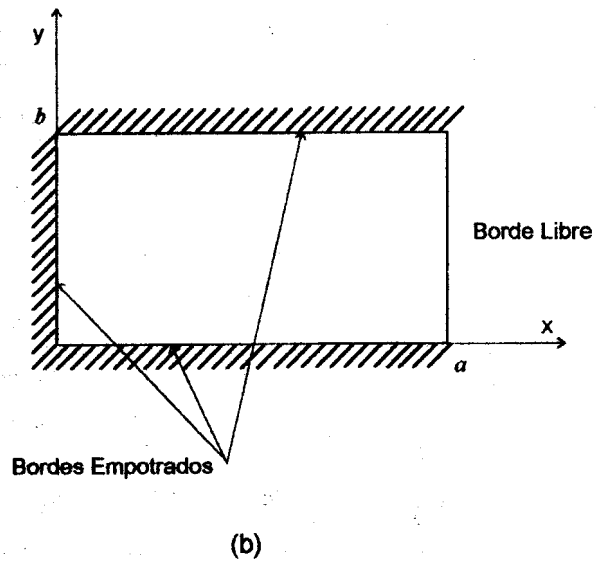
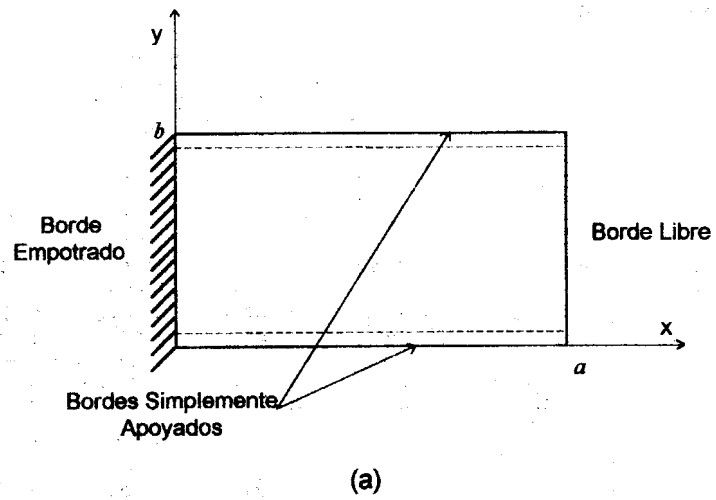


FIGURA 1 - Placas o Losas Rectangulares con un Borde Libre.