



NUEVA FORMULACIÓN DE SENSIBILIDAD PARA ESTABILIDAD ESTRUCTURAL

Enrique G. Banchio y Luis A. Godoy
Departamento de Estructuras, F.C.E.F. y N.
Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correos 916
5000 Córdoba — Argentina

RESUMEN

En este trabajo presentamos un método directo para obtener la relación entre la carga crítica, las coordenadas críticas y el parámetro de imperfección. En la presente propuesta suponemos las expansiones para la carga crítica y las coordenadas correspondientes en términos de potencias arbitrarias del parámetro de imperfección. Luego aplicando el principio de menor degeneración, se determinan los exponentes y los coeficientes de las expansiones.

ABSTRACT

In this work, we describe a direct procedure for obtaining the relationships between the critical loads, the critical coordinates, and the amplitude of the imperfection. In the present approach we assume the expansions for the critical loads and corresponding coordinates in terms of arbitrary powers of the imperfections parameter. Then by the principle of least degeneracy, we determine the exponents and the coefficients of the expansions.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría general de estabilidad para sistemas estructurales fue formulada originalmente por Koiter (1943) [1] para sistemas continuos y posteriormente extendida para sistemas discretos por varios autores. Una revisión de la teoría desarrollada se encuentra en los libros de Croll y Walker (1972) [2], Thompson y Hunt (1973) [3], Huseyin (1975) [4] y más recientemente El Naschie (1990) [5]. En el análisis de estabilidad de un sistema, la sensibilidad de los estados críticos respecto a imperfecciones estructurales reviste de gran importancia debido a que una pequeña imperfección puede ocasionar una disminución drástica de la carga crítica.

Para realizar el análisis de sensibilidad, se introduce un nuevo parámetro ε que representa la amplitud de la imperfección y se escribe la energía potencial total en términos de las coordenadas generalizadas, el parámetro de carga λ y la imperfección ε . Un punto crítico está determinado por las ecuaciones de equilibrio y de estabilidad crítica (Croll y Walker, [2]; Thompson y Hunt, [3]; Huseyin, [4]; El Naschie, [5]). El análisis de sensibilidad se lleva a cabo perturbando las dos ecuaciones anteriores con el objeto de encontrar la relación entre la carga máxima y el parámetro de imperfección denotado por $\lambda^M(\varepsilon)$. En presencia de una bifurcación, esta relación tiene pendiente infinita en $\varepsilon = 0$ y la expansión no puede llevarse a cabo mediante métodos de perturbación regular. Thompson y Hunt [3], resuelven este problema perturbando con respecto a otro parámetro, por ejemplo Q_1 y una vez encontradas las series $\lambda^M = \lambda^M(Q_1)$, $Q_j^M = Q_j^M(Q_1)$ con $j > 1$ y $\varepsilon = \varepsilon(Q_1)$, que resultan expansiones regulares, se invierte la última para obtener $Q_1 = Q_1(\varepsilon)$, y luego se reemplaza en las dos primeras. Las expansiones resultantes quedan en términos de potencias fraccionarias de ε .

Un método directo para un grado de libertad fue propuesto por Godoy y Mook (1995) [6] en el cual las relaciones $\lambda^M(\varepsilon)$ y $Q_j^M(\varepsilon)$ se obtienen sin necesidad de expansiones intermedias. En esta última

propuesta los exponentes no pueden ser asumidos a priori y deben ser determinados como parte del problema. En este trabajo se presenta una extensión a múltiples grados de libertad junto con una propuesta para determinar los exponentes necesarios para los desarrollos.

2. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Consideremos un sistema estructural descrito en términos de las coordenadas generalizadas Q_i para $i = 1, \dots, n$ y la energía potencial total $V = V(Q_i, \lambda, \varepsilon)$ con λ el parámetro de carga y ε de imperfección. Tomando $\varepsilon = 0$ la energía potencial total $V = V(Q_i, \lambda, 0)$ corresponde al sistema perfecto. La ecuación correspondiente a la condición de equilibrio asociada a la primera variación de V es

$$\frac{\partial V}{\partial Q_i} = V_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

donde $()_i$ denota la derivada parcial respecto a la coordenada Q_i . La condición de punto crítico la planteamos como un problema de valor propio en términos del valor propio λ y el vector propio x_j correspondiente a la dirección crítica.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Q_i \partial Q_j} x_j = V_{ij} x_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2)$$

De las ecuaciones de equilibrio (1) y estabilidad crítica (2) obtenemos los valores críticos λ_c , q_{jc} y x_{jc} con $j = 1, \dots, n$, que denotamos por $c = (q_{jc}, \lambda_c, 0)$ y la dirección crítica x_{ic} . Supondremos c un punto crítico distinto resultando V_{ij} singular de con rango $n-1$. Sin pérdida de generalidad podemos normalizar el vector correspondiente a la dirección crítica x_{ic} de manera tal que $x_{1c} = 1$.

Para realizar el análisis aproximamos convenientemente la energía potencial total del sistema $V(Q_i, \lambda, \varepsilon)$ por una serie de Taylor alrededor de un punto de equilibrio estable e .

$$V(Q_i, \lambda, \varepsilon) = \hat{V}_0 + \hat{V}_i Q_i + \frac{1}{2!} \hat{V}_{ij} Q_i Q_j + \frac{1}{3!} \hat{V}_{ijk} Q_i Q_j Q_k + \frac{1}{4!} \hat{V}_{ijkl} Q_i Q_j Q_k Q_l + \dots \quad (3)$$

donde los coeficientes $\hat{V}_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial Q_i \partial Q_j} |_e$ son funciones lineales de los parámetros de carga λ y de imperfección ε . Para determinar las relaciones entre la carga máxima y el parámetro de imperfección, $\lambda^M(\varepsilon)$, y entre las coordenadas correspondientes y la imperfección $Q_j^M(\varepsilon)$ supondremos que tales relaciones admiten desarrollos de la forma

$$\begin{aligned} \lambda^M &= \lambda_c + \lambda_1 \varepsilon^{\alpha_1} + \lambda_2 \varepsilon^{\alpha_2} + \dots \\ Q_j^M &= q_{jc} + q_{j1} \varepsilon^{\beta_1} + q_{j2} \varepsilon^{\beta_2} + \dots \\ x_j^M &= x_{jc} + x_{j1} \varepsilon^{\gamma_1} + x_{j2} \varepsilon^{\gamma_2} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

donde los exponentes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots$, son racionales positivos y los coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ y q_{j1}, q_{j2}, \dots y x_{j1}, x_{j2}, \dots para $j = 1, \dots, n$ reales. En esta formulación los coeficientes de los desarrollos (4) no representarán necesariamente derivadas de V como en los desarrollos empleados para casos de perturbación regular. Además, como normalizamos x_{jc} de manera tal que $x_{1c} = 1$ resulta entonces $x_{11} = x_{12} = \dots = 0$.

2.1. SENSIBILIDAD DE PRIMER ORDEN. Una vez obtenidos los valores críticos, incluimos los términos de primer orden de los desarrollos (4)

$$\begin{aligned} \lambda^M &= \lambda_c + \lambda_1 \varepsilon^{\alpha_1} \\ Q_j^M &= q_{jc} + q_{j1} \varepsilon^{\beta_1} \\ X_j^M &= x_{jc} + x_{j1} \varepsilon^{\gamma_1} \end{aligned} \quad (5)$$

y los introducimos en la ecuación de equilibrio (1). Luego de reagrupar los términos la ecuación queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
& \underbrace{V_i^c}_{=0} + \dot{V}_i^c \varepsilon^1 + \lambda_1 V_i^c \varepsilon^{\alpha_1} + V_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^{\beta_1} + \lambda_1 V_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{2\beta_1} \\
& + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{3!} V_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{3\beta_1} + \frac{1}{3!} \lambda_1 V_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + 3\beta_1} \\
& + \dot{V}_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^{1+\beta_1} + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1+2\beta_1} + \frac{1}{3!} \dot{V}_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+3\beta_1} + \lambda_1 \dot{V}_i^c \varepsilon^{1+\alpha_1} \\
& + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^{1+\alpha_1 + \beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1+\alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{3!} \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+\alpha_1 + 3\beta_1} = 0
\end{aligned} \quad (6)$$

donde $(\dot{}) = \partial()/\partial\lambda$, $(\ddot{}) = \partial(\dot{})/\partial\varepsilon$, $(\overset{\cdot}{}) = \partial(\dot{})/\partial\varepsilon\partial\lambda$ y $()^c$ denota evaluación en el punto crítico $c = (q_{ic}, \lambda_c, 0)$. Observamos que el término constante es nulo por tratarse de $\partial V/\partial Q_i$ evaluada en el punto crítico c . La construcción de la ecuación de equilibrio (6) la realizamos a partir de una función de energía potencial total lineal en el parámetro de carga y en el de imperfección. Sin embargo, resulta general en el sentido que no impusimos ninguna condición sobre el punto crítico. Además, hemos considerado dos tipos de imperfecciones: una en la que el parámetro de imperfección aparece multiplicando al parámetro de carga como se da en el caso de una carga descentrada y el otro en el cual el parámetro de imperfección no multiplica la carga como sucede ante una pequeña fuerza no colineal a la carga o una imperfección geométrica. En este último caso, los términos que involucren derivadas de V con respecto a la carga y al parámetro de imperfección denotados por $(\overset{\cdot}{})$ serán nulos.

2.2. OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES α_1 , β_1 y γ_1 . El grado de sensibilidad de la carga, las coordenadas y la dirección crítica estarán determinadas por los exponentes α_1 , β_1 y γ_1 respectivamente. Cuanto menor sean los exponentes, mayor será la sensibilidad. Como primer paso deberemos determinar los exponentes para los desarrollos (5).

Para un estudio general supondremos la presencia en la ecuación de equilibrio de todos los exponentes, es decir que para cada exponente hay al menos una ecuación en la cual el término asociado es distinto de cero. El conjunto de exponentes de la ecuación de equilibrio (6) correspondiente a un potencial V de cuarto orden resulta

$$E = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1; \beta_1; \alpha_1 + \beta_1; 2\beta_1; \alpha_1 + 2\beta_1; 3\beta_1; \alpha_1 + 3\beta_1; 1; 1 + \alpha_1; 1 + \beta_1; \\ 1 + \alpha_1 + \beta_1; 1 + 2\beta_1; 1 + \alpha_1 + 2\beta_1; 1 + 3\beta_1; 1 + \alpha_1 + 3\beta_1; \end{array} \right\}$$

La presencia del término \dot{V}_i^c independiente de las coordenadas y la carga asociado al exponente 1 condiciona la elección de α_1 y β_1 de manera tal que al menos dos términos estén asociados al exponente 1 si pretendemos que la ecuación de equilibrio (6) se satisfaga con un error menor que $O(\varepsilon^1)$ para ε suficientemente pequeño. La condición anterior proviene aplicar el teorema fundamental de la teoría de perturbación [7]. Además, teniendo en cuenta que $\varepsilon \ll 1$ para el cálculo de la sensibilidad de primer orden, podemos reducir el conjunto E desechando los términos cuyos exponentes sean mayores que 1.

$$E_q = \{\alpha_1; \beta_1; \alpha_1 + \beta_1; 2\beta_1; \alpha_1 + 2\beta_1; 3\beta_1; \alpha_1 + 3\beta_1; 1\} \quad (7)$$

Pensando en obtener las sensibilidades de primer orden, que se puedan resolver a partir de un potencial de cuarto orden, consideremos el siguiente caso $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{4}$, reemplazando en el conjunto (7) los términos asociados al exponente 1 son los correspondientes a $\{\alpha_1 + 3\beta_1, 1\}$. Obtener la sensibilidad en este caso nos conducirá a un error pues falta el término asociado al exponente $4\beta_1$ que también satisface la condición pero no está en el conjunto E_q debido a que nuestra ecuación de equilibrio la obtuvimos a partir de una aproximación de cuarto orden. Para resolver este problema y obtener sólo los coeficientes α_1 y β_1 correspondientes a las sensibilidades para las cuales dispongamos de los términos necesarios a partir de un potencial de un orden determinado (en este caso cuarto) pedimos que la cantidad de términos asociada al exponente 1 sea *máxima*. Para encontrar los α_1 y β_1 que satisfacen la condición anterior, podemos recurrir a una interpretación geométrica que

consiste en asociar a cada exponente del conjunto (7) con un plano definido paramétricamente y luego determinar los puntos (α_1, β_1) para los cuales se intersecan la mayor cantidad de planos para un valor de la tercera coordenada igual a 1. Los planos asociados a cada elemento del conjunto (7) resultan

$$\begin{aligned} P_1 &= (\alpha_1; \beta_1; \alpha_1) & P_2 &= (\alpha_1; \beta_1; \beta_1) & P_3 &= (\alpha_1; \beta_1; \alpha_1 + \beta_1) \\ P_4 &= (\alpha_1; \beta_1; 2\beta_1) & P_5 &= (\alpha_1; \beta_1; \alpha_1 + 2\beta_1) & P_6 &= (\alpha_1; \beta_1; 3\beta_1) \\ P_7 &= (\alpha_1; \beta_1; \alpha_1 + 3\beta_1) & P_8 &= (\alpha_1; \beta_1; 1) \end{aligned}$$

Graficamos los planos anteriores y haciendo un corte a la altura 1 observamos (Figura 1. izquierda) que cantidad máxima de intersecciones asociadas a la exponente 1 es 3 y corresponden a los valores de α_1 y β_1

$$\left\{ (1, 1), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\} \quad (8)$$

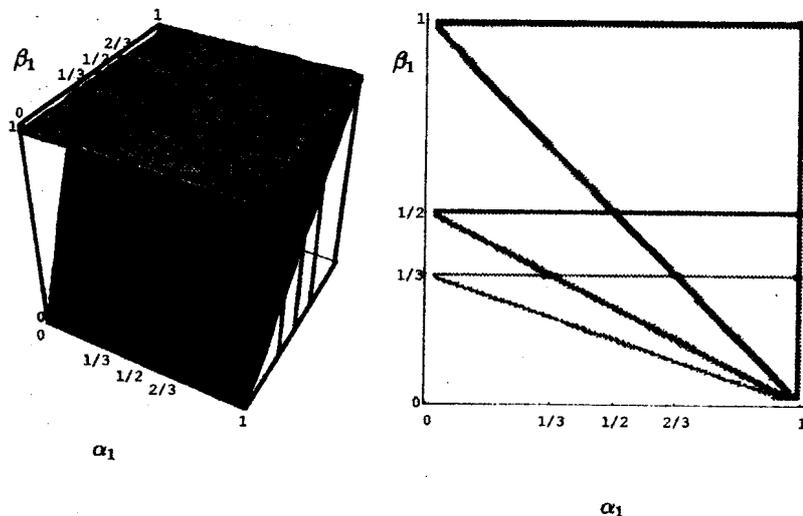


Figura 1

Otra forma es a través del gráfico (Figura 1. derecha) de las curvas de nivel de la función que asigna a cada par (α_1, β_1) la cantidad de planos que pasan por el punto $(\alpha_1, \beta_1, 1)$. Los elementos del conjunto (8) no son definitivos pues falta determinar el coeficiente γ_1 a través de la ecuación de estabilidad y puede darse el caso que para algún candidato de (8) no tengamos información proveniente del potencial de cuarto orden. A continuación, para cada par de coeficientes α_1 y β_1 de (8) debemos encontrar el coeficiente γ_1 trabajando sobre la ecuación de estabilidad (2) en la cual introducimos

los desarrollos (5)

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{V_{ij}^c x_{jc}}_{=0} + \dot{V}_{ij}^c x_{jc} \varepsilon^1 + \lambda_1 V_{ij}^c x_{jc} \varepsilon^{\alpha_1} + V_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^\gamma + \lambda_1 V_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^{\alpha_1+\gamma} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{\beta_1} \\
 & + \lambda_1 V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1+\beta_1} + V_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{\beta_1+\gamma} + \lambda_1 V_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1+\beta_1+\gamma} \\
 & + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{2\beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1+2\beta_1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{2\beta_1+\gamma} \\
 & + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1+2\beta_1+\gamma} + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c x_{jc} \varepsilon^{1+\alpha_1} + \dot{V}_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^{1+\gamma} + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^{1+\alpha_1+\gamma} \\
 & + \dot{V}_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{1+\beta_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{1+\alpha_1+\beta_1} + \dot{V}_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1+\beta_1+\gamma} \\
 & + \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1+\alpha_1+\beta_1+\gamma} + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+2\beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+\alpha_1+2\beta_1} \\
 & + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+2\beta_1+\gamma} + \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+\alpha_1+2\beta_1+\gamma} = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

A igual que en la ecuación de equilibrio, el término constante es nulo. Nuevamente obtenemos el conjunto reducido eliminando los elementos tales que para α_1 , β_1 y γ_1 positivos sean mayores que 1.

$$E_s \left\{ \begin{array}{l} 1; \alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \alpha_1 + \beta_1; \alpha_1 + \gamma_1; \beta_1 + \gamma_1; \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1; 2\beta_1; \\ \alpha_1 + 2\beta_1; \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1; 2\beta_1; \alpha_1 + 2\beta_1; 2\beta_1 + \gamma_1; \alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1 \end{array} \right\} \tag{10}$$

Para cada par de (α_1, β_1) del conjunto (8), debemos encontrar el valor de γ_1 apropiado. Como podemos observar en la ecuación de estabilidad (9) hay dos términos que considerados distintos de cero condicionan la elección de γ_1 . Estos son el asociado a 1 y el asociado a α_1 . Pues estos términos de quedar solos formando una ecuación igualada a cero, para el primero no se satisficaría y el en segundo nos conduciría a $\lambda_1 = 0$. Por lo tanto la condición para γ_1 es que haya al menos dos términos asociado al mínimo entre 1 y α_1 . Ahora, si consideramos el caso $\alpha_1 = 1, \beta_1 = \frac{1}{3}$ para γ_1 se satisface la condición anterior pero si queremos calcular los coeficientes de los desarrollos (5) no dispondremos del término asociado a $3\beta_1$. Por lo tanto para quedarnos con los casos de sensibilidad que se puedan resolver pediremos que la cantidad de términos asociada al menor exponente correspondiente a un término independiente de las coordenadas sea máxima. Para obtener los γ_1 , en este caso asociamos a cada elemento del conjunto E_s en el cual hemos sustituido α_1 y β_1 por sus valores y eliminado los elementos repetidos (que corresponde a reagrupar por potencias de ε) la correspondiente recta definida paraméricamente. Graficando la función que asigna para cada valor de γ_1 la cantidad intersecciones de las rectas obtenemos los siguientes resultados

α_1	β_1	γ_1	exponente	número de intersecciones
1	1	1	1	4
1	1/2	1/2	1	4
1	1/3	1/3	1	3
1/2	1/2	1/2	1/2	3
1/3	1/3	1/3	1/3	3
2/3	1/3	1/3	2/3	3

TABLE 1. Coeficientes α_1, β_1 y γ_1 obtenidos

En la tabla (1) observamos las posibles sensibilidades, entre las cuales vemos que el caso $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ que no podíamos resolver aparece con tres términos asociados al exponente 1 mientras que los otros casos de puntos límites tienen cuatro. Por otro lado las bifurcaciones aparecen todas con tres términos asociados para los distintos exponentes.

De esta manera hemos encontrado los casos posibles para un sistema a partir de un potencial aproximado por una serie de orden cuarto. Resulta interesante determinar las condiciones que dan lugar a cada una de las sensibilidades expuestas en la tabla (1). Una manera de hacerlo es planteando las

ecuaciones para los coeficientes λ_1 , q_{j1} y x_{j1} de los desarrollos (5) y establecer las condiciones para que estas ecuaciones queden bien determinadas.

2.3. OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES λ_1 , q_{j1} y x_{j1} , $j = 1, \dots, n$. Multiplicando la ecuación de equilibrio por el vector correspondiente a la dirección crítica x_{ic} , obtenemos la ecuación de equilibrio contraída

$$\begin{aligned} & \dot{V}_i^c x_{ic} \varepsilon^1 + \lambda_1 \dot{V}_i^c x_{ic} \varepsilon^{\alpha_1} + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} q_{j1}}_{=0} \varepsilon^{\beta_1} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} q_{j1} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{2\beta_1} \\ & + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{3!} V_{ijkl}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{3\beta_1} + \frac{1}{3!} \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + 3\beta_1} \\ & + \dot{V}_{ij}^c x_{ic} q_{j1} \varepsilon^{1+\beta_1} + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1+2\beta_1} + \frac{1}{3!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+3\beta_1} + \lambda_1 \dot{V}_i^c x_{ic} \varepsilon^{1+\alpha_1} \\ & + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c x_{ic} q_{j1} \varepsilon^{1+\alpha_1 + \beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1+\alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{3!} \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+\alpha_1 + 3\beta_1} \\ & + = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

donde el término correspondiente a ε^{β_1} es nulo por la condición de estabilidad crítica. Análogamente, con el mismo procedimiento obtenemos la ecuación de estabilidad contraída

$$\begin{aligned} & \dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \varepsilon^1 + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \varepsilon^{\alpha_1} + \underbrace{V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc}}_{=0} \varepsilon^{\beta_1} + \lambda_1 V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1} + V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{\beta_1} \\ & + \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1} + V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\beta_1 + \gamma_1} + \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \\ & + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{2\beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{2\beta_1 + \gamma_1} \\ & + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \varepsilon^{1+\alpha_1} + \dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \varepsilon^{1+\gamma_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \varepsilon^{1+\alpha_1 + \gamma_1} \\ & + \dot{V}_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{1+\beta_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{1+\alpha_1 + \beta_1} + \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+\beta_1 + \gamma_1} \\ & + \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+2\beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+\alpha_1 + 2\beta_1} \\ & + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+2\beta_1 + \gamma_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+\alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

2.4. CASO I: $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$ y $\gamma_1 = 1$. Reemplazamos α_1 , β_1 y γ_1 en la ecuación de equilibrio (6) y agrupamos por potencias de ε

$$\left[\dot{V}_i^c + \lambda_1 \dot{V}_i^c + V_{ij}^c q_{j1} \right] \varepsilon + \left[\lambda_1 \dot{V}_i^c + \lambda_1 V_{ij}^c q_{j1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} + \dot{V}_{ij}^c q_{j1} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = 0$$

Reteniendo el término principal, correspondiente al menor exponente de ε obtenemos la ecuación de equilibrio menos degenerada

$$V_{ij}^c q_{j1} = -\dot{V}_i^c - \lambda_1 V_i^c$$

esta última ecuación nos permite escribir a q_{j1} de la siguiente manera

$$q_{j1} = k_1 x_{jc} + y_{j1} \quad (13)$$

donde y_{j1} es solución del sistema

$$V_{ij}^c y_{j1} = -\dot{V}_i^c - \lambda_1 V_i^c \quad \text{con } y_{11} = 0 \quad (14)$$

Dado que V_{ij}^c es singular con rango $n-1$ para que la ecuación anterior pueda ser resuelta, el miembro derecho debe ser ortogonal a x_{jc} . Introducimos los coeficientes $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, y $\gamma_1 = 1$ en la

ecuación de equilibrio contraída (11) y agrupamos por potencias de ε

$$\left[\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 V_i'^c x_{ic} + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} q_{j1}}_{=0} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0$$

El término principal resulta

$$\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 V_i'^c x_{ic} = 0 \quad (15)$$

para obtener λ_1 a partir de esta ecuación necesitamos $\dot{V}_i^c x_{ic} \neq 0$ y $V_i'^c x_{ic} \neq 0$. Reemplazando λ_1 en (14) resolvemos para y_{j1} cuya resolución esta garantizada por (15). Luego de introducir los coeficientes $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, y $\gamma_1 = 1$ en la ecuación de estabilidad (9) y agrupamos por potencias de ε ,

$$\left[\dot{V}_{ij}^c x_{jc} + \lambda_1 V_{ij}'^c x_{jc} + V_{ij}^c x_{j1} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0$$

tomando el término principal obtenemos la ecuación menos degenerada

$$V_{ij}^c x_{j1} = -\dot{V}_{ij}^c x_{jc} - \lambda_1 V_{ij}'^c x_{jc} - V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \quad \text{con } x_{11} = 0 \quad (16)$$

a partir de la ecuación de estabilidad contraída (12) obtenemos

$$\left[\dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \lambda_1 V_{ij}'^c x_{ic} x_{jc} + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} x_{j1}}_{=0} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0$$

tomando el término principal y reemplazando q_{j1} por $q_{j1} = k_1 x_{jc} + y_{j1}$ tenemos una ecuación escalar

$$\dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \lambda_1 V_{ij}'^c x_{ic} x_{jc} + k_1 V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1} = 0 \quad (17)$$

para obtener $k_1 \neq 0$ de esta última ecuación necesitamos que $V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} \neq 0$ junto con $V_{ij}'^c x_{ic} x_{jc} \neq 0$. Luego, reemplazando k_1 en (13) junto con y_{j1} obtenemos q_{j1} . Finalmente reemplazando q_{j1} , λ_1 y k_1 en (16) obtenemos x_{j1} . De esta manera obtenemos los desarrollos de primer orden

$$\begin{aligned} \lambda^M &= \lambda_c + \lambda_1 \varepsilon \\ Q_j^M &= q_{jc} + q_{j1} \varepsilon \\ X_j^M &= x_{jc} + x_{j1} \varepsilon \end{aligned} \quad (18)$$

para los cuales necesitamos las condiciones

$$\dot{V}_i^c x_{ic} \neq 0 \quad V_i'^c x_{ic} \neq 0 \quad V_{ij}'^c x_{ic} x_{jc} \neq 0 \quad V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} \neq 0$$

correspondientes a la sensibilidad de un punto límite [2],[3]. En los desarrollos se aprecia las relaciones lineales entre la carga máxima, las coordenadas correspondientes y la dirección crítica con respecto a la imperfección.

2.5. CASO II: $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$ y $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. Reemplazamos α_1 , β_1 y γ_1 en la ecuación de equilibrio (6) y agrupamos por potencias de ε

$$\left[\lambda_1 V_i'^c + V_{ij}^c q_{j1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \left[\dot{V}_i^c + \lambda_1 V_{ij}'^c q_{j1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) = 0$$

Reteniendo el término principal, la ecuación menos degenerada queda

$$V_{ij}^c q_{j1} = -\lambda_1 V_i'^c \quad (19)$$

La ecuación anterior nos permite escribir a q_{j1} como

$$q_{j1} = k_1 x_{jc} + \lambda_1 y_{j1} \text{ con } y_{11} = 0 \quad (20)$$

con $\lambda_1 \neq 0$ y y_{j1} solución de $V_{ij}^c y_{j1} = -V_i^c$. Introducimos los coeficientes α_1 , β_1 , y γ_1 en la ecuación de equilibrio contraída (11) y agrupamos por potencias de ε

$$\left[\lambda_1 \underbrace{V_i^c x_{ic}}_{=0} + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} q_{j1}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \left[\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} q_{j1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) = 0$$

si $V_i^c x_{ic} \neq 0$ la ecuación resultante de tomar el término principal es $\lambda_1 V_i^c x_{ic} = 0$ y como λ_1 debe ser no nulo esta ecuación no se satisface. Por lo tanto necesitamos $V_i^c x_{ic} = 0$ resultando el primer término asociado a $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ nulo y el término principal de la ecuación de equilibrio contraída queda

$$\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} q_{j1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} = 0$$

reemplazando q_{j1} por (20) en la ecuación anterior obtenemos la ecuación escalar

$$\begin{aligned} \dot{V}_i^c x_{ic} + k_1 \lambda_1 \left(V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1} \right) + \frac{k_1^2}{2} V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} \\ + \lambda_1^2 \left(V_{ij}^c x_{ic} y_{j1} + \frac{1}{2} V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} y_{k1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

La ecuación de estabilidad (2) para los valores de α_1 , β_1 y γ_1 considerados resulta

$$\left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{jc} + V_{ij}^c x_{j1} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) = 0$$

tomando el término principal y reemplazando q_{j1} por (20) obtenemos la ecuación

$$V_{ij}^c x_{j1} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{jc} + k_1 V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} + \lambda_1 V_{ijk}^c x_{jc} y_{k1} = 0 \quad (22)$$

de la cual podemos obtener x_{j1} como

$$V_{ij}^c x_{j1} = -k_1 V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} - \lambda_1 \left(V_{ij}^c x_{jc} + V_{ijk}^c x_{jc} y_{k1} \right) \text{ con } x_{11} = 0. \quad (23)$$

La ecuación de estabilidad contraída (12) con $\alpha_1 = 1/2$, $\beta_1 = 1/2$, y $\gamma_1 = 1/2$ queda

$$\left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) = 0$$

tomando el término principal y reemplazando q_{j1} por (20) tenemos

$$\lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + k_1 V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} + \lambda_1 V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1} = 0 \quad (24)$$

Como y_{j1} puede ser nulo, para obtener k_1 y λ_1 a partir de las ecuaciones (21) y (24) necesitamos que $V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \neq 0$ junto con $V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} \neq 0$. Una vez obtenidos k_1 y λ_1 , a partir de (20) calculamos q_{j1} para $j = 1, n$ y a partir de (23) obtenemos x_{j1} . El hecho que k_1 y λ_1 satisfagan (24) nos garantiza la solución de (23) pues el término independiente resulta ortogonal a x_{ic} . De esta manera obtenemos los desarrollos de primer orden

$$\begin{aligned} \lambda^M &= \lambda_c + \lambda_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ Q_j^M &= q_{jc} + q_{j1} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ X_j^M &= x_{jc} + x_{j1} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (25)$$

para los cuales necesitamos las condiciones

$$\dot{V}_i^c x_{ic} \neq 0 \quad V_i^c x_{ic} = 0 \quad V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \neq 0 \quad V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} \neq 0$$

correspondientes a la sensibilidad de un punto de bifurcación asimétrica [2],[3]. La relación entre la carga máxima - imperfección como así también en las coordenadas correspondientes y la dirección crítica resulta resultan asociadas a la potencia $\frac{1}{2}$ dando lugar a una sensibilidad mayor que en el caso de punto límite tratado anteriormente.

2.6. CASO III: $\alpha_1 = \frac{2}{3}$, $\beta_1 = \frac{1}{3}$ y $\gamma_1 = \frac{1}{3}$. Reemplazamos α_1 , β_1 y γ_1 en la ecuación de equilibrio (6) y agrupamos por potencias de ε

$$\left[V_{ij}^c q_{j1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \left[\lambda_1 V_i^c + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon) = 0$$

Reteniendo el término principal obtenemos la ecuación para q_{j1} ,

$$V_{ij}^c q_{j1} = 0$$

que nos permite expresar a $q_{j1} = k_1 x_{jc}$. Introducimos los coeficientes α_1 , β_1 , y γ_1 en la ecuación de equilibrio contraída (11) y reemplazando $q_{j1} = k_1 x_{jc}$,

$$\begin{aligned} & \left[k_1 \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} x_{jc}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \left[\lambda_1 \underbrace{V_i^c x_{ic}}_{=0} + \frac{k_1^2}{2!} \underbrace{V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{3}{2}} \\ & \left[\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 k_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \frac{k_1^3}{3!} V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{5}{2}}) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Como veremos más adelante para poder obtener la ecuación de estabilidad contraída necesitaremos que $V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}$ sea nulo y siendo así como λ_1 debe ser distinto de cero necesitaremos que $V_i^c x_{ic} = 0$. El término principal de la ecuación de equilibrio contraída resulta el asociado a ε ,

$$\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 k_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \frac{k_1^3}{3!} V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} = 0 \quad (27)$$

La ecuación de estabilidad (2) para los valores de α_1 , β_1 y γ_1 considerados resulta

$$\left[V_{ij}^c x_{j1} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{jc} + V_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \right] \varepsilon^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon) = 0$$

tomando el término principal y reemplazando $q_{j1} = k_1 x_{jc}$, obtenemos la ecuación

$$V_{ij}^c x_{j1} = -k_1 V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} \quad (28)$$

Como k_1 debe ser distinto de cero, introducimos el cambio de variable $y_{j1} = \frac{1}{k_1} x_{j1}$ o sea $x_{j1} = k_1 y_{j1}$ con $y_{11} = 0$ en la ecuación anterior y obtenemos el siguiente sistema

$$V_{ij}^c y_{j1} = V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} \quad (29)$$

que nos permite calcular y_{j1} . La ecuación de estabilidad contraída reemplazando $q_{j1} = k_1 x_{jc}$ resulta

$$\left[\underbrace{V_{ij}^c x_{ic} x_{j1}}_{=0} + k_1 \underbrace{V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + k_1 V_{ijk}^c x_{ic} x_{j1} x_{kc} + \frac{k_1^2}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right] \varepsilon^{\frac{3}{2}} = 0$$

Si $V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} \neq 0$, como k_1 debe ser distinto de cero, la ecuación obtenida tomando término principal resulta $k_1 V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} = 0$ que no se satisface. Por lo tanto $V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}$ debe ser nulo para que el término principal sea el siguiente. Reemplazando $x_{j1} = k_1 y_{j1}$ obtenemos la siguiente ecuación escalar

$$k_1^2 \left(V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} x_{kc} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right) + \lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} = 0 \quad (30)$$

que para que resulte una ecuación en λ_1 y k_1 debe ser $V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \neq 0$ y $V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \neq 0$. A partir de las ecuaciones (30) y (27) obtenemos λ_1 y k_1 . Luego obtenemos $q_{j1} = k_1 x_{jc}$ y $x_{j1} = k_1 y_{j1}$. De esta manera los desarrollos de primer orden quedan

$$\begin{aligned}\lambda^M &= \lambda_c + \lambda_1 \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ Q_j^M &= q_{jc} + q_{j1} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \\ X_j^M &= x_{jc} + x_{j1} \varepsilon^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\quad (31)$$

para los cuales necesitamos las condiciones

$$V_i^c x_{ic} \neq 0 \quad V_i^c x_{ic} = 0 \quad V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \neq 0 \quad V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} = 0 \quad V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \neq 0$$

correspondientes a la sensibilidad de un punto de bifurcación simétrica [2],[3]. La relación entre la carga máxima - imperfección resulta asociada a la potencia $\frac{2}{3}$ mientras que las relaciones entre las coordenadas correspondientes y la dirección crítica respecto de la imperfección resultan asociadas a la potencia $\frac{1}{3}$. Los restantes casos se analizan en forma similar resultando

Punto Crítico	α_1	β_1	γ_1	$V_i^c x_{ic}$	$V_i^c x_{ic}$	$V_{ij}^c x_{ic} x_{jc}$	$V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}$	$V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}$	$V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc}$
Punto Límite	1	1	1	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$		
Punto Límite	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$		$\neq 0$
Bifurcación Asimétrica	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$		
Trifurcación	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Bifurcación Simétrica	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$		$\neq 0$

Para obtener la sensibilidad de órdenes superiores se debe incluir un término más en los desarrollos (4) y una vez determinados los exponentes α_2 , β_2 y γ_2 (aumentando el orden del potencial si es necesario) se obtienen los coeficientes λ_2 , q_{j2} y x_{j2} en forma similar a lo expuesto para el primer orden.

3. CONCLUSIONES

De esta manera podemos obtener las distintas sensibilidades que se puedan determinar a partir de un potencial de un orden determinado. En los casos planteados, los términos correspondientes a una imperfección en la cual el parámetro de imperfección aparece multiplicando el parámetro de carga como se ve en el caso de carga descentrada y en las ecuaciones de equilibrio y estabilidad perturbadas tienen la forma (\quad) , no aparecen en los desarrollos de primer orden.

REFERENCES

1. Koiter, W. T. (1945). "On the Stability of Elastic Equilibrium", in Dutch, thesis, Delft, H. J. Paris, Amsterdam.
2. Croll, J. G. A. and Walker, A. C. (1972), "Elements of Structural Stability", McMillan, London
3. Thompson, J. M. T. and Hunt, G. W. (1973), "A General Theory of Elastic Stability", Wiley, London.
4. Huseyin, A. H. (1975). "Non-Linear Theory of Elastic Stability". Noordhoff, Leyden, The Netherlands.
5. El Naschie, M. S. (1990), "Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach", McGraw-Hill, London.
6. Godoy L. A. and Mook D. T. "Higher-order sensitivity to imperfections in bifurcation buckling analysis, International Journal of Solids and Structures" *Int. J. Solids Structures*, Vol. 33, No. 4. 511-520.
7. Simmonds, J. G. and Maun, J. E. (1986), "A First Look At Perturbation Theory", Robert E. Krieger Publishing Company, Florida.