



VIGAS DEFORMABLES POR CORTE SOBRE
FUNDACION ELASTICA GENERALIZADA

Ing. Juan Carlos Reimundín
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
Av. Independencia 1800 - 4000 S.M. de Tucumán

RESUMEN

Se analiza el problema de las vigas sobre fundación elástica biparamétrica, incluyendo el efecto de las deformaciones por corte, mediante el método de matrices de transferencia. Previa deducción de la ecuación diferencial del problema y de su solución, se presentan las matrices de tramo y nudo, como así también los vectores de carga para fuerzas y cuplas concentradas y cargas linealmente distribuidas. Finalmente se presenta un ejemplo de aplicación y se comparan los resultados con la solución clásica de Winkler.

SUMMARY

The problem of beams resting on two-parameter elastic foundations including shear effect by means of transfer matrices is analysed. After deriving the differential equation of the problem and its solution, the field and joint matrices are presented as well as load vectors for concentrated forces and moments and linearly distributed loads. Finally, an example is presented and numerical results compared with those of the classical Winkler solution.

1. INTRODUCCION

El análisis de placas y vigas sobre fundaciones elásticas constituye un problema frecuente en la ingeniería estructural. El modelo de fundación propuesto por Winkler (1867) ha sido exhaustivamente utilizado en la literatura sobre el tema [Hetenyi (1946), Wölfer (1969)]. Más recientemente Cudmani y Reimundín (1981), analizaron la solución mediante el empleo de matrices de transferencia, presentando las matrices de tramo y nudo para una viga sobre una fundación elástica de Winkler. Posteriormente, empleando idéntico modelo, Ting y Mockry (1984) dedujeron la matriz de rigidez para un elemento de viga incluyendo los vectores de carga para fuerzas y cuplas concentradas y cargas linealmente distribuidas.

El modelo de fundación de Winkler es muy simple y puede interpretarse como un conjunto de resortes lineales infinitamente próximos entre sí. Dado que no se considera interacción alguna entre los resortes, la representación no se ajusta a las características de muchas fundaciones de la práctica. Si bien el empleo de un modelo basado en un medio continuo permite una mejor representación de la realidad, la obtención de soluciones resulta mucho más compleja y costosa desde el punto de vista computacional. Para superar esta dificultad se han sugerido modelos de fundaciones elásticas biparamétricas, que resultan menos restrictivos que el de Winkler aunque no tan complicados como el del medio elástico continuo. Empleando un modelo de fundación biparamétrica, Zhao y Cook (1983) dedujeron las expresiones exacta y aproximada en base a una función cúbica de desplazamientos, de la matriz de rigidez para un

elemento de viga y de los respectivos vectores de carga.

Es un hecho conocido de la mecánica estructural clásica que bajo ciertas circunstancias resulta de interés la inclusión del efecto de la fuerza cortante en la deformación de las vigas. Esto resulta así especialmente en vigas con relaciones bajas luz/canto, vigas con almas delgadas o caladas y vigas sujetas a fuertes cargas concentradas. Las relaciones de altura a luz de las vigas de fundación es por lo general entre 1.5 y 2 veces mayor que la correspondiente a las vigas de entrepiso en los edificios corrientes y están sujetas a elevadas tensiones de corte como resultado de las cargas concentradas transmitidas por las columnas, de modo que la incorporación del efecto señalado en su análisis resulta aconsejable.

La consideración del efecto de las deformaciones por corte en vigas que integran pórticos planos o espaciales empleando matrices de rigidez es conocido en la literatura [Przemieniecki (1968)]. Reimundín, Cudmani y Riera (1971) extendieron la aplicación del método de matrices de transferencia a vigas deformables por corte sujetas a carga axial. Muy recientemente, Aydogan (1995) desarrolló la matriz de rigidez para vigas sobre fundación elástica de Winkler incorporando el efecto de las deformaciones por corte. La consideración de las deformaciones por corte juntamente con la inercia rotacional (vigas de Timoshenko) en el análisis dinámico de vigas sobre fundación elástica biparamétrica empleando matrices de rigidez fué estudiado por Chen (1987).

En el presente trabajo se analiza el problema de las vigas sobre fundación elástica biparamétrica, incluyendo el efecto de las deformaciones por corte, recurriendo al método de matrices de transferencia. Previa deducción de la ecuación diferencial del problema se presentan las matrices de tramo y nudo, incluyendo los vectores de carga para fuerzas y cuplas concentradas y cargas linealmente distribuidas, con lo que se cubre la mayoría de los problemas prácticos. Finalmente se presenta un ejemplo de aplicación y se comparan los resultados con la solución clásica de Winkler.

2. MODELOS DE FUNDACION ELASTICA

2.1. Fundación elástica de Winkler

La ecuación diferencial para la deformación w de una viga con sección transversal uniforme sobre una fundación elástica de Winkler, puede escribirse como sigue:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + k w = q \quad (1)$$

donde EI es la rigidez de flexión de la viga, k es el módulo de reacción del terreno (coeficiente de balasto del suelo \times ancho de la base de la viga = $k_0 \cdot b$) y q es la carga transversal.

En este modelo, usado por más de un siglo, se admite que el terreno reacciona con una carga $p(x)$ normal a la viga que es directamente proporcional a la deformación de ésta $w = w(x)$:

$$p(x) = k \cdot w(x) \quad (2)$$

El módulo de fundación de Winkler tiene dimensión $[N/m^2]$ y constituye el único parámetro que define la fundación.

Como se ha señalado anteriormente, el modelo de Winkler puede interpretarse físicamente como una sucesión de resortes lineales muy próximos entre sí. Para

mejorarlo, algunos autores consideran algún tipo de interacción entre los resortes y agregan un segundo parámetro en las ecuaciones anteriores.

A continuación se describen brevemente cuatro de estos modelos de fundación biparamétricos.

2.2. Fundación de Filonenko-Borodich

Este autor supone que los extremos superiores de los resortes están conectados a una membrana elástica sometida a una tracción constante T, obteniendo:

$$p(x) = k \cdot w(x) - T \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3)$$

2.3. Fundación de Pasternak

Pasternak (1954) introduce interacciones de corte entre los resortes, considerando que los extremos superiores de los mismos están conectados a un lecho incompresible que experimenta sólo deformaciones por corte, y obtiene:

$$p(x) = k \cdot w(x) - k_g \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4)$$

en la que k_g es el parámetro del lecho de corte.

2.4. Fundación generalizada

Este modelo supone que en cada punto de contacto existe no solamente una presión sino también un momento aplicados a la viga por la fundación. El momento se considera proporcional al ángulo de rotación. Así, las acciones de la fundación por unidad de longitud de la viga resultan:

$$p(x) = k \cdot w(x) \quad (5a)$$

$$m(x) = k_\theta \cdot \frac{dw}{dx} \quad (5b)$$

en las cuales k y k_θ son los dos módulos de fundación. A partir de $m(x)$, puede obtenerse una carga lineal equivalente. Esto puede hacerse de manera análoga a la transformación del momento torsor en una fuerza de corte equivalente que es usual en la teoría de placas. De esta forma, las ecuaciones (5) se reemplazan por:

$$p(x) = k \cdot w(x) - k_\theta \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (6)$$

sin incluir el momento distribuido $m(x)$.

2.5. Fundación de Vlasov

Partiendo de la representación de la fundación como un medio elástico continuo semi-infinito e introduciendo algunas hipótesis simplificadoras, Vlasov (1966) dedujo para la reacción de la fundación la expresión:

$$p(x) = k \cdot w(x) - 2 \cdot t \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (7)$$

Análogamente propuso fórmulas para la determinación de los parámetros k y t en términos de las constantes elásticas y dimensiones de la viga y de la fundación.

2.6. Resumen

Matemáticamente, las ecuaciones (3), (4), (6) y (7) son equivalentes. La única diferencia es la definición de los parámetros. A los fines de la solución del problema, estas diferencias resultan irrelevantes por lo cual las ecuaciones mencionadas pueden reescribirse en la forma:

$$p(x) = k \cdot w(x) - k_1 \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (8)$$

en la cual k es el primer parámetro (módulo de Winkler) y k_1 el segundo parámetro.

3. CONSIDERACION DE LAS DEFORMACIONES POR CORTE

La deformación w de la viga se expresará como la suma de dos componentes, como sigue:

$$w = w_f + w_c \quad (9)$$

donde w_f es la flecha causada por el efecto de flexión y w_c es la debida al efecto de corte. Derivando dos veces con respecto a x :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w_f}{dx^2} + \frac{d^2 w_c}{dx^2} \quad (10)$$

Como es conocido de la teoría de la flexión de Bernoulli-Navier, el primer término del segundo miembro de la (10) puede escribirse en función del momento flector M , en la forma:

$$\frac{d^2 w_f}{dx^2} = - \frac{M}{E \cdot I} \quad (11)$$

La deformación por corte de un elemento diferencial de viga puede escribirse como:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta w_c}{\Delta x} = \frac{\tau}{G} \quad (12)$$

donde γ , τ y G representan respectivamente la deformación angular, la tensión tangencial y el módulo de elasticidad transversal del material. Para contemplar la no uniformidad de la distribución de las tensiones tangenciales en la sección de la viga, se introduce un factor de forma η que permite expresar τ en la forma:

$$\tau = \frac{\eta \cdot Q}{A} \quad (13)^{**}$$

en la que Q es la fuerza de corte y A el área de la sección transversal de la viga.

Pasando al límite para $\Delta x \rightarrow 0$ en la ecuación (12):

$$\frac{dw_c}{dx} = \frac{\eta \cdot Q}{G \cdot A} \quad (14)$$

y derivando con respecto a x:

$$\frac{d^2 w_c}{dx^2} = \frac{\eta}{G \cdot A} \frac{dQ}{dx} \quad (15)$$

Planteando las ecuaciones de equilibrio de un elemento de viga sometido a una carga transversal distribuida $r(x)$ y a un momento distribuido $m(x)$, se obtienen las relaciones conocidas:

$$Q = \frac{dM}{dx} + m(x) \quad (16a)$$

$$\frac{dQ}{dx} = -r(x) \quad (16b)$$

Usando las ecuaciones (11), (15) y (16b), puede escribirse:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I} - \frac{\eta}{G \cdot A} r(x) \quad (17)$$

4. VIGA CORTE-DEFORMABLE SOBRE FUNDACION ELASTICA GENERALIZADA

Conforme la descripción del modelo de fundación elástica generalizada, puede escribirse:

$$r(x) = q(x) - k \cdot w(x) \quad (18a)$$

$$m(x) = k_1 \cdot \frac{dw}{dx} \quad (18b)$$

donde se han separado los efectos de ambos parámetros en la reacción del terreno y se ha designado con $q(x)$ la carga distribuida exterior actuante sobre la viga de fundación. Llevando a la ecuación (17):

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I} - \frac{\eta}{G \cdot A} [q(x) - k \cdot w] \quad (19a)$$

$$M = -E \cdot I \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\eta}{G \cdot A} [q(x) - k \cdot w] \right\} \quad (19b)$$

Derivando y teniendo en cuenta (16a) y (18b), se obtiene:

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{1}{E \cdot I} \left[Q - k_1 \frac{dw}{dx} \right] - \frac{\eta}{G \cdot A} \left[\frac{dq}{dx} - k \cdot \frac{dw}{dx} \right] \quad (20a)$$

$$Q = - E.I \left\{ \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{\eta}{G.A} \left[\frac{dq}{dx} - k \cdot \frac{dw}{dx} \right] \right\} + k_1 \frac{dw}{dx} \quad (20b)$$

Derivando nuevamente la (20a) se arriba a la ecuación diferencial del problema:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \left(\frac{\eta \cdot k}{G.A} + \frac{k_1}{E.I} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{k}{E.I} w = \frac{q(x)}{E.I} - \frac{\eta}{G.A} \frac{d^2 q}{dx^2} \quad (21)$$

La solución general de la (21) puede escribirse

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x) \quad (22)$$

donde $w_0(x)$ representa la solución de la ecuación homogénea y $w_1(x)$ es una solución particular de la (21). En el caso presente, teniendo en cuenta que para los casos prácticos es:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\eta \cdot k}{G.A} + \frac{k_1}{E.I} \right)^2 - \frac{k}{E.I} < 0 \quad (23)$$

la solución de la ecuación homogénea toma la forma:

$$w_0(x) = C_1 \cos(\phi \alpha x) \cdot \text{ch}(\phi \beta x) + C_2 \cos(\phi \alpha x) \cdot \text{sh}(\phi \beta x) + C_3 \text{sen}(\phi \alpha x) \cdot \text{ch}(\phi \beta x) + C_4 \text{sen}(\phi \alpha x) \cdot \text{sh}(\phi \beta x) \quad (24)$$

en la cual:

$$\phi = \sqrt[4]{\frac{k}{E.I}} \quad (25)$$

$$\psi = \text{Arc tg} \left\{ \frac{4 \cdot k}{E.I (\eta k/G.A + k_1/E.I)^2 - 1} \right\} \quad (26)$$

$$\alpha = \text{sen} \frac{\psi}{2} ; \quad \beta = \cos \frac{\psi}{2} \quad (27)$$

Considerando una carga distribuida lineal dada por:

$$q(x) = q_0 + \epsilon \cdot x \quad (28)$$

una solución particular de la (21) puede escribirse como:

$$w_1(x) = \frac{1}{k} (q_0 + \epsilon \cdot x) \quad (29)$$

5. EL METODO DE MATRICES DE TRANSFERENCIA

La aplicación del método de matrices de transferencia al análisis de estructuras de

barras fué sistematizado por Falk (1956) y luego desarrollado extensamente por Kersten (1962) y por Pestel y Leckie (1963).

En correspondencia con una sección cualquiera de una viga de eje recto, se define el vector de estado $\{Y\}$ como:

$$\{Y\}^T = \{w, \phi, M, Q\} \quad (30)$$

donde w representa el desplazamiento normal al eje original de la barra, ϕ el giro de la sección considerada, M el momento flector y Q la fuerza de corte en la misma sección.

Las condiciones de borde en el extremo izquierdo de la barra implican el conocimiento de dos componentes del vector de estado $\{Y\}_1^i$ en dicho extremo. A su vez, y puesto que el comportamiento de la viga está gobernado por una ecuación diferencial lineal, es posible obtener el vector de estado en el extremo derecho de un primer elemento de barra mediante una relación del tipo:

$$\{Y\}_1^d = [T]_1 \cdot \{Y\}_1^i + \{g\}_1 \quad (31)$$

en la cual $[T]_1$ representa una matriz de transferencia, llamada matriz de tramo, cuyos elementos son función de las propiedades geométricas y mecánicas de la barra y, en el caso que nos ocupa, de los parámetros que definen las características de la fundación elástica, y $\{g\}_1$ es un vector que depende, además, de las cargas aplicadas en el tramo. De manera análoga, los vectores de estado a la izquierda y derecha de un nudo que vincula dos elementos vecinos, están vinculados por una ecuación de la forma:

$$\{Y\}_2^i = [N]_2 \cdot \{Y\}_1^d + \{n\}_2 \quad (32)$$

La reiteración de las operaciones indicadas en las ecuaciones (31) y (32) lleva a:

$$\begin{aligned} \{Y\}_2^d &= [T]_2 \cdot \{Y\}_2^i + \{g\}_2 \\ \{Y\}_3^i &= [N]_3 \cdot \{Y\}_2^d + \{n\}_3 \\ \{Y\}_3^d &= [T]_3 \cdot \{Y\}_3^i + \{g\}_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \{Y\}_n^d &= [T]_n \cdot \{Y\}_n^i + \{g\}_n \end{aligned} \quad (33)$$

Finalmente, conociéndose dos elementos del vector de estado $\{Y\}_n^d$ para la sección extrema derecha de la viga, es posible mediante la resolución de un sistema de dos ecuaciones algebraicas lineales, encontrar el valor de los elementos desconocidos del vector inicial, de suerte que las condiciones de borde en el extremo derecho resulten satisfechas.

Las operaciones descritas anteriormente pueden sistematizarse de manera que el cálculo de los vectores de estado en los extremos de cada tramo se reduzca a

productos de matrices únicamente. Para ello es preciso introducir los vectores de carga $\{g\}$ y $\{n\}$ en las matrices de tramo y nudo respectivamente, agregando al mismo tiempo un elemento adicional igual a 1 al vector de estado. De la transformación resulta:

$$\{\bar{Y}\}_k^d = [\bar{T}]_k \cdot \{\bar{Y}\}_k^i \quad (34)$$

donde:

$$\{\bar{Y}\}_k^d = \begin{Bmatrix} \{Y\}_k^d \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

y

$$[\bar{T}]_k = \left[\begin{array}{c|c} [T]_k & \{g\}_k \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (36)$$

Los vectores de estado extremos quedan vinculados en general por la ecuación:

$$\{\bar{Y}\}_n^d = [\bar{H}] \cdot \{\bar{Y}\}_1^i \quad (37)$$

en la cual:

$$[\bar{H}] = [\bar{T}]_n \cdot [\bar{N}]_n \cdot [\bar{T}]_{n-1} \cdot [\bar{N}]_{n-1} \cdot \dots \cdot [\bar{N}]_2 \cdot [\bar{T}]_1 \quad (38)$$

6. DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ DE TRAMO

Para determinar los coeficientes de la matriz de tramo, se calcularán inicialmente los valores de las constantes de integración contenidas en la solución general de la ecuación diferencial en términos de las componentes del vector de estado inicial $\{Y\}_k^i$, que corresponde a la sección $x = 0$. Se plantea así un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas cuya solución puede expresarse en la forma:

$$\{C\}_k = [A]_k \cdot \{Y\}_k^i + \{q\}_k^i \quad (39)$$

donde

$$\{C\}_k^T = \{C_1, C_2, C_3, C_4\} \quad (40)$$

$[A]_k$ y $\{q\}_k^i$ representan una matriz de transformación y un vector de cargas cuyos componentes se indicarán más adelante.

Conocidas las constantes de integración de la solución general, pueden calcularse las

componentes del vector de estado $\{Y\}_k^d$ correspondiente a la sección $x = L$, mediante una expresión del tipo:

$$\{Y\}_k^d = [B]_k \cdot \{C\}_k + \{q\}_k^d \quad (41)$$

Reemplazando $\{C\}_k$ según (39):

$$\{Y\}_k^d = [B]_k \cdot [A]_k \cdot \{Y\}_k^i + [B]_k \cdot \{q\}_k^i + \{q\}_k^d \quad (42)$$

Esta última ecuación puede escribirse más sintéticamente en forma idéntica a la (31), esto es:

$$\{Y\}_k^d = [T]_k \cdot \{Y\}_k^i + \{g\}_k \quad (43)$$

con lo cual se obtienen las expresiones de la matriz de tramo y del vector de cargas correspondientes a un elemento genérico k :

$$[T]_k = [B]_k \cdot [A]_k \quad (44a)$$

$$\{g\}_k = [B]_k \cdot \{q\}_k^i + \{q\}_k^d \quad (44b)$$

Los elementos no nulos de las distintas matrices y vectores contenidas en las (44) son:

$$A_{1,1} = 1 \quad (45a)$$

$$A_{2,2} = -\frac{\alpha}{\phi^3 \cdot \text{sen } \psi} \left[\phi^2 (1 - 4\beta^2) + \frac{\eta \cdot k}{G.A} + \frac{k_1}{E.I} \right] \quad (45b)$$

$$A_{2,4} = \frac{\phi \cdot \alpha}{k \cdot \text{sen } \psi} \quad (45c)$$

$$A_{3,2} = -\frac{\beta}{\phi^3 \cdot \text{sen } \psi} \left[\phi^2 (1 - 4\alpha^2) - \frac{\eta \cdot k}{G.A} - \frac{k_1}{E.I} \right] \quad (45d)$$

$$A_{3,4} = -\frac{\phi \cdot \beta}{k \cdot \text{sen } \psi} \quad (45e)$$

$$A_{4,1} = -\frac{1}{\phi^2 \cdot \text{sen } \psi} \left(\phi^2 \cdot \cos \psi - \frac{\eta \cdot k}{G.A} \right) \quad (45f)$$

$$A_{4,3} = -\frac{1}{E.I \cdot \phi^2 \cdot \text{sen } \psi} \quad (45g)$$

$$q_1^i = -\frac{q_0}{k} \quad (46a)$$

$$q_2^i = \frac{\alpha}{k \cdot \phi^3 \cdot \text{sen } \psi} \left[\phi^2(1 - 4 \cdot \beta^2) + \frac{\eta \cdot k}{G \cdot A} \right] \cdot \epsilon \quad (46b)$$

$$q_3^i = \frac{\beta}{k \cdot \phi^3 \cdot \text{sen } \psi} \left[\phi^2(1 - 4 \cdot \alpha^2) - \frac{\eta \cdot k}{G \cdot A} \right] \cdot \epsilon \quad (46c)$$

$$q_4^i = \frac{1}{k \cdot \phi^2 \cdot \text{sen } \psi} \left[\phi^2 \cdot \cos \psi - \frac{\eta \cdot k}{G \cdot A} \right] \cdot q_0 \quad (46d)$$

$$B_{1,1} = C \cdot \text{Ch} \quad (47a)$$

$$B_{1,2} = C \cdot \text{Sh} \quad (47b)$$

$$B_{1,3} = S \cdot \text{Ch} \quad (47c)$$

$$B_{1,4} = S \cdot \text{Sh} \quad (47d)$$

$$B_{2,1} = -\phi \cdot \alpha \cdot S \cdot \text{Ch} + \phi \cdot \beta \cdot C \cdot \text{Sh} \quad (47e)$$

$$B_{2,2} = -\phi \cdot \alpha \cdot S \cdot \text{Sh} + \phi \cdot \beta \cdot C \cdot \text{Ch} \quad (47f)$$

$$B_{2,3} = \phi \cdot \alpha \cdot C \cdot \text{Ch} + \phi \cdot \beta \cdot S \cdot \text{Sh} \quad (47g)$$

$$B_{2,4} = \phi \cdot \alpha \cdot C \cdot \text{Sh} + \phi \cdot \beta \cdot S \cdot \text{Ch} \quad (47h)$$

$$B_{3,1} = -E \cdot I \left[\phi^2 (C \cdot \text{Ch} \cdot \cos \psi - S \cdot \text{Sh} \cdot \text{sen } \psi) - \frac{\eta \cdot k}{G \cdot A} C \cdot \text{Ch} \right] \quad (47i)$$

$$B_{3,2} = -E \cdot I \left[\phi^2 (C \cdot \text{Sh} \cdot \cos \psi - S \cdot \text{Ch} \cdot \text{sen } \psi) - \frac{\eta \cdot k}{G \cdot A} C \cdot \text{Sh} \right] \quad (47j)$$

$$B_{3,3} = -E \cdot I \left[\phi^2 (S \cdot \text{Ch} \cdot \cos \psi + C \cdot \text{Sh} \cdot \text{sen } \psi) - \frac{\eta \cdot k}{G \cdot A} S \cdot \text{Ch} \right] \quad (47k)$$

$$B_{3,4} = -E \cdot I \left[\phi^2 (S \cdot \text{Sh} \cdot \cos \psi + C \cdot \text{Ch} \cdot \text{sen } \psi) - \frac{\eta \cdot k}{G \cdot A} S \cdot \text{Sh} \right] \quad (47l)$$

$$B_{4,1} = -E \cdot I \left\{ \phi^3 \left[\alpha(1 - 4 \cdot \beta^2) S \cdot \text{Ch} + \beta(1 - 4 \cdot \alpha^2) C \cdot \text{Sh} \right] - \phi \left[\frac{\eta \cdot k}{G \cdot A} + \frac{k_1}{E \cdot I} \right] \cdot (-\alpha \cdot S \cdot \text{Ch} + \beta \cdot C \cdot \text{Sh}) \right\} \quad (47m)$$

$$B_{4,2} = - E.I \left\{ \phi^3 \left[\beta(1 - 4.\alpha^2) C.Ch + \alpha(1 - 4.\beta^2) S.Sh \right] - \phi \left(\frac{\eta.k}{G.A} + \frac{k_1}{E.I} \right) . (-\alpha.S.Sh + \beta.C.Ch) \right\} \quad (47n)$$

$$B_{4,3} = - E.I \left\{ \phi^3 \left[-\alpha(1 - 4.\beta^2) C.Ch + \beta(1 - 4.\alpha^2) S.Sh \right] - \phi \left(\frac{\eta.k}{G.A} + \frac{k_1}{E.I} \right) . (\alpha.C.Ch + \beta.S.Sh) \right\} \quad (47o)$$

$$B_{4,4} = - E.I \left\{ \phi^3 \left[-\alpha(1 - 4.\beta^2) C.Sh + \beta(1 - 4.\alpha^2) S.Ch \right] - \phi \left(\frac{\eta.k}{G.A} + \frac{k_1}{E.I} \right) . (\alpha.C.Sh + \beta.S.Ch) \right\} \quad (47p)$$

$$q_1^d = \frac{1}{k} (q_0 + \epsilon.L) \quad (48a)$$

$$q_2^d = \frac{\epsilon}{k} \quad (48b)$$

$$q_4^d = \frac{k_1}{k} \epsilon \quad (48c)$$

En las expresiones anteriores se introdujo, para abreviar, la notación:

$$\text{sen}(\phi.\alpha.L) = S \quad ; \quad \text{cos}(\phi.\alpha.L) = C \quad (49a)$$

$$\text{sh}(\phi.\beta.L) = Sh \quad ; \quad \text{ch}(\phi.\beta.L) = Ch \quad (49b)$$

7. MATRIZ DE NUDO

Para pasar de un elemento al siguiente asegurando las condiciones de continuidad e incorporando eventuales fuerzas de nudo, se recurre a una matriz nudal. La expresión, para un nudo genérico k , es:

$$\{Y\}_k^i = [N]_k . \{Y\}_{k-1}^d + \{n\}_k \quad (50)$$

Los elementos no nulos de la matriz $[N]_k$ y del vector de cargas $\{n\}_k$, son:

$$N_{1,1} = 1 \quad (51a)$$

$$N_{2,2} = 1 \quad (51b)$$

$$N_{2,4} = \frac{\eta_k}{(G.A)_k} - \frac{\eta_{k-1}}{(G.A)_{k-1}} \quad (51c)$$

$$N_{3,3} = 1 \quad (51d)$$

$$N_{4,4} = 1 \quad (51e)$$

$$n_2 = - \frac{\eta_k \cdot P_k}{(G.A)_k} \quad (52a)$$

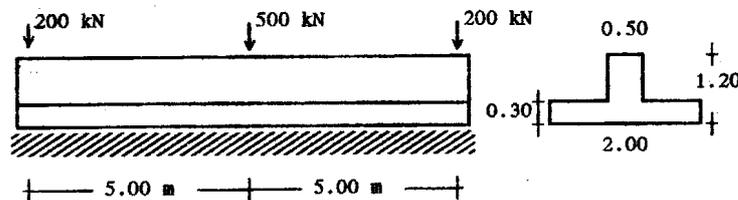
$$n_3 = M_k \quad (52b)$$

$$n_4 = - P_k \quad (52c)$$

en las cuales M_k y P_k representan la cupla y carga concentradas actuantes en el nudo k .

8. EJEMPLO DE APLICACION

Siguiendo el procedimiento expuesto se analizará la viga de fundación cuyas características geométricas y mecánicas, así como las constantes que definen el suelo de sustentación, se indican a continuación:



Datos	
k_0	4600 kN/m ³
k_1	104500 kN
E.I	8.850×10^6 kN.m ²
G.A	11.025×10^6 kN
η	1.75

La viga está solicitada por tres cargas concentradas, simétricamente dispuestas, cuyos valores se incluyen en el esquema.

Los resultados obtenidos en base a la solución propuesta en el presente trabajo y su comparación con los correspondientes a la solución clásica de Winkler sin considerar las deformaciones por corte se han volcado en las Figuras 1 a 3. La Fig. 1 muestra la deformada de la viga, en su mitad izquierda la solución propuesta y en la derecha la solución clásica, siendo de destacar el quiebre en correspondencia a la carga central que se manifiesta al incluir el efecto de las deformaciones por corte. En la Fig. 2

se presentan los diagramas de momentos flectores para las dos situaciones mencionadas precedentemente determinados, como en el caso de la elástica, en base a una división de la viga en 20 elementos. Por último, la Fig. 3 corresponde, en su parte izquierda, al diagrama de fuerzas de corte para la solución propuesta en este trabajo, incluyéndose en su parte derecha, el obtenido para la solución clásica los que no presentan diferencias significativas.

9. CONCLUSIONES

Se ha presentado la solución al problema de la viga deformable por corte sobre una fundación elástica biparamétrica, caso de interés en el análisis de fundaciones de estructuras por soleras continuas. Para el cálculo práctico se propone el empleo del método de matrices de transferencia cuya economía computacional le confiere importantes ventajas frente a la solución en base a la matriz de rigidez. Dado que se parte de la solución exacta de la ecuación diferencial, la división en elementos se requiere al sólo efecto de contemplar cambios en las propiedades de la viga o de la fundación, presencia de cargas o cuplas concentradas, cargas distribuidas parciales etc. y su número no afecta los resultados. El aumento en la cantidad de puntos de división puede resultar de interés cuando se requiere un trazado ajustado de los diagramas de fuerzas de sección.

REFERENCIAS

- Aydoğan, M. (1995), "Stiffness-Matrix Formulation of Beams with Shear Effect on Elastic Foundation", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 121, No. 9, p.1265-1270.
- Chen, Y.H. (1987), "General Dynamic Stiffness Matrix of a Timoshenko Beam for Transverse Vibrations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, p. 391-402.
- Cudmani, R.O. y Reimundín, J.C. (1981), "Vigas sobre Fundación Elástica - Solución Mediante Matrices de Transferencia", *Primeras Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural*, Buenos Aires.
- Falk, S. (1955), "Biegen, Knicken und Schwingen des Mehrfeldrigen geraden Balkens", *Abhandlungender der Braun-schweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, Vol. VII.
- Filonenko-Borodich, M.M. (1940), "Algunas Teorías Aproximadas de la Fundación Elástica" (en Ruso), *Uchenye Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika*, No. 46, U.S.S.R., p. 3-18.
- Betenyi, M. (1946), *Beams on Elastic Foundation*, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.
- Kersten, R. (1962), *Reduktionsverfahren der Baustatik*, Springer-Verlag, Berlin.
- Kerr, A.D. (1964), "Elastic and Viscoelastic Foundation Models", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 31, No. 3, p. 491-498.
- Pasternak, P.L. (1954), *Sobre un Nuevo Método de Análisis de una Fundación Elástica por Medio de Dos Constantes de Fundación* (en Ruso), Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscú, U.S.S.R..
- Pestel, E.G. y Leckie, F.A. (1963), *Matrix Methods in Elasto-Mechanics*, Mc-Graw-Hill Book Co., New York.

Przemieniecki, J.S. (1968), *Theory of Matrix Structural Analysis*, Mc-Graw-Hill Book Co., New York.

Reimundín, J.C., Cudmani, R.O. y Riera, J.D. (1971), "Matrices de Transferencia para Vigas con Carga Axial y Deformaciones por Corte", *Anais das XV Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, Volumen II, p. 783, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Ting, B.Y. y Mockry, E.F. (1984), "Beam on Elastic Foundation Finite Element", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 108, ST3, p. 611-620.

Vlasov, V.Z. y Leont'ev, U.N. (1966), *Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations*, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalén, Israel.

Winkler, E. (1867), *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Praga, Dominicus.

Wölfer, K.H. (1969), *Vigas Flotantes en Medio Elástico*, Editorial Gustavo Gili S.A., Barcelona.

Zhaohua, F. y Cook, R.D. (1983), "Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundations", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 109, No. 6, p. 1390-1402.

