



CONSIDERAÇÕES SOBRE ALGORÍTMOS DE ATUALIZAÇÃO DE TENSÕES EM ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA ASSOCIADA E NÃO ASSOCIADA

C.R. Eboli, L.E. Vaz e E.A. Vargas Jr.

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Civil
Rua Marquês de São Vicente, 225
22453-900 - Gávea - Rio de Janeiro - Brasil

RESUMO

Neste artigo diferentes formulações para o mapeamento de retorno do vetor de tensões em análise elasto-plástica por elementos finitos são revisitadas e exemplos de suas implementações computacionais são apresentados e discutidos.

ABSTRACT

In this paper different formulations for the returning mapping of the stress vector in finite element elastoplastic analysis are revisited and examples of their computational implementation are presented and discussed.

1. INTRODUÇÃO

A atualização do vetor de tensões associado a um dado incremento de deformações a nível do ponto de Gauss é uma etapa necessária em cada iteração de uma análise elasto-plástica de modelos de elementos finitos. O incremento de deformações corresponde a um incremento de deslocamentos obtido a nível da estrutura para um dado incremento de carga via método de Newton-Raphson ou quase-Newton.

Inúmeras tem sido as técnicas apresentadas na literatura para se proceder à atualização de tensões a nível constitutivo. Com o reconhecimento deste problema como um problema de programação matemática (PM), técnicas de PM passaram a ser utilizadas tanto para modelos de plasticidade associada como para não associada. Algumas vezes (hiper-) poliedros circunscritos são utilizados em substituição à (hiper-) superfície de escoamento do material da estrutura a ser analisada de modo a se linearizar as restrições do problema de PM, outras vezes o problema é formulado a partir das condições de Kuhn-Tucker do problema de PM original.

Neste artigo diversas formulações propostas até aqui são reapresentadas e comparadas em termos de eficiência computacional e outras propriedades. A superfície de escoamento de Mohr-Coulomb é utilizada e modelos de plasticidade associada e não associada, com e sem endurecimento, são tratados. Exemplos de estado plano de deformações são analisados e recomendações e conclusões são apresentadas a partir dos resultados obtidos.

2. FORMULAÇÕES DA ELASTO-PLASTICIDADE

2.1. Equações Básicas da Elasto-Plasticidade

2.1.1- Superfície de escoamento

O critério de resistência de Mohr-Coulomb tem sido usado com freqüência para representar a resistência de materiais geológicos como solos e rochas [1]. Para problemas de estado plano de deformação este critério é representado pela equação (1).

$$f(\sigma, q) = [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2]^{1/2} + (\sigma_x + \sigma_y) \operatorname{sen} \phi - 2c \cos \phi + q = 0 \quad (1)$$

onde ϕ é o ângulo de atrito, c a coesão, q um parâmetro de endurecimento do material e σ_x , σ_y e τ_{xy} as componentes do vetor de tensão σ . No espaço dos eixos $\sigma_x + \sigma_y$, $2\tau_{xy}$ e $\sigma_x - \sigma_y$ a superfície de escoamento que representa o critério de resistência de Mohr-Coulomb é um cone de seção circular conforme representado na figura 1.

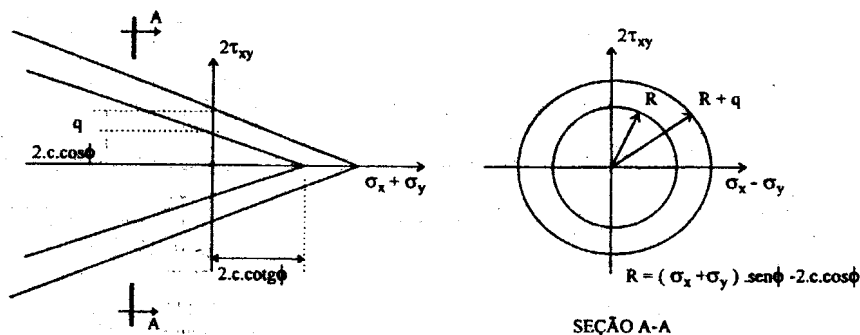


Fig. 1 - Superfície de Escoamento de Mohr-Coulomb.

2.1.2- Incremento de deformação plástica

No modelo elasto-plástico o material se comporta elasticamente até que o estado de tensão atinja a superfície de escoamento. A partir deste ponto um estado de carregamento mantém o estado de tensões sobre a superfície que é expandida caso haja endurecimento. O incremento de deformação plástica associado ao novo estado de tensões é dado pela equação (2) caso se considere a hipótese de fluxo associado [2].

$$d\epsilon_p = d\lambda f_{,\sigma} \quad (2)$$

onde $d\epsilon_p$ é o vetor dos incrementos de deformação plástica, $d\lambda$ o incremento do parâmetro plástico (não negativo) que define a magnitude do vetor $d\epsilon_p$ e $f_{,\sigma}$ é o gradiente à superfície de escoamento que define a direção de $d\epsilon_p$. Para a superfície de Mohr-Coulomb.

$$f_{,\sigma} = \begin{Bmatrix} \cos \theta + \operatorname{sen} \phi \\ -\cos \theta + \operatorname{sen} \phi \\ 2 \operatorname{sen} \theta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{onde } \cos \theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2\}^{1/2}} \text{ e } \sin \theta = \frac{2\tau_{xy}}{\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2\}^{1/2}}$$

Quando se considera a hipótese de fluxo plástico não associado, que é mais apropriada para materiais geológicos, é necessário se definir a superfície que define o potencial plástico. Para o material Mohr-Coulomb esta superfície é em geral dada por

$$g(\sigma) = \{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2\}^{1/2} + (\sigma_x + \sigma_y) \operatorname{sen} \psi + b^{-1} q. \quad (4)$$

Neste caso o incremento de deformação plástica é definido por

$$d\epsilon_p = d\lambda g_{,\sigma} \quad (5)$$

onde $g_{,\sigma}$ é o gradiente à superfície que define o potencial plástico.

$$g_{,\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \theta + \operatorname{sen} \psi \\ -\cos \theta + \operatorname{sen} \psi \\ 2 \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

É interessante observar que para o material Mohr-Coulomb no problema de estado plano de deformação é possível selecionar os vetores $g_{,\sigma}$ e $f_{,\sigma}$ através da matriz A^{-1} .

$$g_{,\sigma} = A^{-1} f_{,\sigma} \quad \text{onde} \quad (7)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+k & -1+k & 0 \\ -1+k & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{sendo } k = \frac{\operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \phi} \quad (8)$$

2.1.3- Complementaridade de f e $d\lambda$

Como já foi dito, $d\lambda$ é sempre não negativo. Por outro lado o estado de tensões deve obedecer a

$$f(\sigma, q) \leq 0. \quad (9)$$

Além disso só há incremento de deformação plástica quando a superfície de escoamento é tocada pelo vetor que representa o estado de tensões sendo assim

$$d\lambda \cdot f = 0. \quad (10)$$

A equação (11) representa a complementaridade entre as grandezas $d\lambda$ e $f(\sigma, q)$.

2.1.4- Endurecimento

O modelo de endurecimento adotado neste trabalho é o de endurecimento isotrópico linear. No caso do endurecimento ser associado a f ,

$$dq = -h d\lambda f_{,q} \quad (11)$$

onde h é um coeficiente de endurecimento e $f_{,q}$ o gradiente de f em relação a q . No endurecimento não associado temos

$$dq = -h d\lambda g_{,q} \quad (12)$$

sendo $g_{,q}$ o gradiente de g em relação a q . Observe que no nosso caso $f_{,q} = 1$ e $g_{,q} = b^1$, logo

$$g_{,q} = b^{-1} f_{,q} \quad (13)$$

2.2. Elasto-Plasticidade como um problema de Programação Matemática

O problema da elasto-plasticidade pode ser representado alternativamente como solução do seguinte problema de programação matemática (PM) [3].

$$\min v(\sigma, q) = \frac{1}{2} (\sigma_e - \sigma) A D^{-1} (\sigma_e - \sigma) + \frac{1}{2} (q_e - q) b h^{-1} (q_e - q) \quad (14)$$

$$\text{sub } f(\sigma, q) \leq 0$$

onde σ_e é a tensão obtida por

$$\sigma_e = \sigma_0 + D \epsilon \quad (15)$$

sendo σ_0 a tensão correspondente a iteração anterior, e ϵ de o incremento de deformação total que é função do incremento de deslocamento obtido a nível da estrutura via método BFGS e D a matriz de elasticidade. A é a inversa da matriz definida em (8). h é o coeficiente de endurecimento definido em (11) e (12). b é o inverso do coeficiente dado em (13). $q_e = q_0$ é o parâmetro de endurecimento q da iteração anterior.

As condições de ótimo do problema de PM definido em (14) são conhecidas como condições de Kuhn-Tucker. Para se obter as condições de K-T é necessário definir inicialmente a função Lagrangeana do problema o que se faz somando-se à função objetivo $v(\sigma, q)$ a restrição $f(\sigma, q)$ multiplicada pelo multiplicador de Lagrange $d\lambda$ [4].

$$L(\sigma, q) = v(\sigma, q) + d\lambda f(\sigma, q) \quad (16)$$

As condições de K-T são dadas então pelas seguintes equações:

$$L_{,\sigma} = 0 \quad \therefore -A D^{-1} (\sigma_e - \sigma) + d\lambda f_{,\sigma} = 0 \quad (17)$$

$$L_{,q} = 0 \quad \therefore -b h^{-1} (q_e - q) + d\lambda f_{,q} = 0 \quad (18)$$

ou ainda

$$d\epsilon_p = d\lambda A^{-1} f_{,\sigma} = d\lambda g_{,\sigma} \quad (19)$$

$$dq = -d\lambda h b^{-1} f_{,q} = -d\lambda h g_{,q} \quad (20)$$

Vale observar que as equações (19) e (20) são válidas tanto para a lei de fluxo associado como para a lei de fluxo não associado. No primeiro caso basta tomar $A^{-1} = I$ ao invés de (8) e $b = 1$.

As demais equações de K-T são

$$d\lambda \geq 0 \quad ; \quad f(\sigma, q) \leq 0 \quad e \quad d\lambda f(\sigma, q) = 0. \quad (21)$$

As equações (19) e (20) correspondem, respectivamente, as equações (5) e (12). Isto mostra que resolver o problema de PM (14) é equivalente a resolver as equações básicas da elasto-plasticidade.

3. ALGORÍTIMO DE SOLUÇÃO

Vários tem sido os algoritmos utilizados na solução do problema da elasto-plasticidade a nível do ponto de Gauss de um modelo de elementos finitos com elementos isoparamétricos. O problema pode ser resolvido via o uso de algoritmos de PM que resolvem o problema de PM dado em (14), via solução direta das equações básicas ou via algoritmos que resolvem o problema equivalente ao problema (14) obtido através das condições de K-T do problema original. Este último enfoque é particularmente útil quando se faz a representação poliédrica da superfície de escoamento. Neste caso o problema (14) recai num problema de programação quadrática que pode ser transformado num Problema Linear Complementar (PLC) equivalente e resolvido pelo algoritmo de Lemke. Os 3 enfoques aqui abordados serão discutidos mais detalhadamente nos itens seguintes.

3.1. Solução Direta do Problema de PM

Neste caso o problema (14) é resolvido diretamente via algoritmos de PM. Neste artigo o algoritmo de programação quadrática recursiva de Han-Powell foi utilizado [5].

3.2. Solução Direta das Equações Básicas

As equações básicas, na sua forma mais geral (fluxo não associado), podem ser escritas como:

$$D^{-1}(\sigma_e - \sigma) = d\lambda g_{\sigma} \quad (22)$$

$$-h^{-1}(q_e - q) = -d\lambda g_q \quad (23)$$

$$f(\sigma, q) \leq 0 \quad (24)$$

$$d\lambda \geq 0 \quad (25)$$

$$d\lambda f(\sigma, q) = 0 \quad (26)$$

As 3 últimas equações podem ser substituídas por

$$f(\sigma, q) = 0 \quad (27)$$

caso se trabalhe com pontos iniciais σ fora da região viável, o que conduz automaticamente a $d\lambda \geq 0$ como demonstrado em [6], e satisfaz automaticamente a condição de complementaridade (26).

As equações (22), (23) e (27) são resolvidas então via método de Newton-Raphson. Elas são tratadas como resíduos que devem ser anulados em cada passo via desenvolvimento em série de Taylor até termos de primeira ordem [6].

O vetor de resíduos é definido como:

$$R^k = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ f \end{Bmatrix}^k = \begin{Bmatrix} -D^{-1}(\sigma_c - \sigma) + d\lambda g_{\sigma\sigma} \\ -h^{-1}(q_c - q) + d\lambda g_{qq} \\ f \end{Bmatrix}^k \quad (28)$$

O desenvolvimento em série de Taylor fornece

$$\begin{aligned} r^k + \frac{\partial r^k}{\partial \sigma} \Delta \sigma^k + \frac{\partial r^k}{\partial q} \Delta q^k + \frac{\partial r^k}{\partial (d\lambda)} \Delta (d\lambda)^k &= 0 \\ f^k + \frac{\partial f^k}{\partial \sigma} \Delta \sigma^k + \frac{\partial f^k}{\partial q} \Delta q^k &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} D^{-1} + d\lambda g_{\sigma\sigma} & 0 & g_{\sigma\sigma} \\ 0^t & h^{-1} + d\lambda g_{qq} & g_{qq} \\ f_{,\sigma}^t & f_{,q} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta q \\ \Delta (d\lambda) \end{Bmatrix}^k = - \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ f \end{Bmatrix}^k \quad (30)$$

Definindo-se os vetores

$$f_{,x} = \begin{Bmatrix} f_{,\sigma} \\ f_{,q} \end{Bmatrix}; \quad g_{,x} = \begin{Bmatrix} g_{,\sigma\sigma} \\ g_{,qq} \end{Bmatrix}; \quad \Delta X = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta q \end{Bmatrix}; \quad r = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

e a matriz W associada às equações r e às incógnitas X , vem

$$\begin{bmatrix} W & g_{,x} \\ f_{,x}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta (d\lambda) \end{Bmatrix}^k = - \begin{Bmatrix} r \\ f \end{Bmatrix}^k \quad (32)$$

que conduz a

$$\begin{aligned} (f^k - f_{,x}^t W_k^{-1} r^k) / (f_{,x}^t W_k^{-1} g_{,x}^k) \\ \Delta X^k = - W_k^{-1} (r^k + \Delta (d\lambda)^k g_{,x}^k). \end{aligned} \quad (33)$$

Após cada iteração os valores são atualizados como:

$$\begin{cases} \sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta \sigma^k \\ q^{k+1} = q^k + \Delta q^k \\ d\lambda^{k+1} = d\lambda^k + \Delta (d\lambda)^k \end{cases} \quad (34)$$

Este procedimento tem a vantagem de formar explicitamente a matriz elasto-plástica consistente que relaciona o incremento de tensão $\Delta \sigma$ com o incremento de deformação total $\Delta \varepsilon$. Ele pode ser resolvido

também via BFGS caso a matriz W^{-1} seja obtida aproximadamente.

3.3. Solução do Problema Linear Complementar (PLC) Equivalente

Conforme dito anteriormente quando se utiliza a representação poliédrica da superfície do escoamento o problema de PM dado por (14) recai num problema de programação quadrática. As equações correspondentes às condições de K-T deste novo problema definem o que se chama de Problema Linear Complementar (PLC) [7]. Este problema pode ser resolvido, por exemplo, pelo algoritmo de Lemke [8].

3.3.1- Representação poliédrica da superfície de escoamento de Mohr-Coulomb

Quando se utilizam ℓ planos para circunscrever a superfície de escoamento de Mohr-Coulomb o poliedro circunscrito pode ser representado por [9]

$$f_{\ell}(\sigma, q) = N^t \sigma - \sigma_p + p. \quad (35)$$

A linha j de N^t e os elementos j dos vetores σ_p e p são dados respectivamente por

$$n_j^t = \frac{n_{p_j}^t}{\|n_{p_j}\|}; \quad \sigma_{p_j} = \frac{2c \cos \phi}{\|n_{p_j}\|}; \quad p_j = \frac{q}{\|n_{p_j}\|} \quad (36)$$

onde n_{p_j} é o vetor que contém a normal aos planos j definidos pelo ângulo $\theta_j = \frac{2\pi}{\ell} j$ e dado por

$$n_{p_j} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_j + \sin \phi \\ -\cos \theta_j + \sin \phi \\ 2 \sin \theta_j \end{Bmatrix}. \quad (37)$$

Nos modelos de fluxo não associados deve se fazer também a representação poliédrica da superfície do potencial plástico analogamente a (35) chega-se a

$$g_{\ell}(\sigma, q) = M^t \sigma + b^{-1} p. \quad (38)$$

onde o vetor linha $m_{p_j}^t$ vale

$$m_j^t = \frac{m_{p_j}^t}{\|m_{p_j}\|} \quad (39)$$

sendo $m_{p_j}^t$ o vetor linha que contém a normal aos planos j definidos pelo ângulo $\theta_j = \frac{2\pi}{\ell} j$ e dado por

$$m_{p_j} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_j + \sin \phi \\ -\cos \theta_j + \sin \phi \\ 2 \sin \theta_j \end{Bmatrix}. \quad (40)$$

O vetor p é o mesmo que aparece em (38) e está definido em (39). Supondo apenas o plano $j = r$ ativo na solução, com $\lambda_r \neq 0$ e os demais $\lambda_j = 0$ para $j \neq r$, as demais equações podem ser escritas como

$$\lambda_r = \frac{|F_r|}{|g_r|} = \frac{\gamma_r}{|m_r|} \quad \text{logo} \quad p_r = \frac{q}{|n_r|} = -\frac{1}{|n_r|} \cdot \frac{\gamma_r}{|m_r|} \cdot h b^{-1} \quad (41)$$

Como no endurecimento linear isotrópico todos os planos devem ser ativados simultaneamente se $\lambda_r \neq 0$, vem

$$q = p_r \cdot |n_r| = p_r \cdot |n_r| \quad \text{logo} \quad p_r = -\frac{1}{|n_r|} \frac{\gamma_r}{|m_r|} \cdot h b^{-1} \quad (42)$$

ou genericamente

$$p = -K \cdot \gamma \quad \text{onde} \quad k_{\alpha} = \frac{h b^{-1}}{|n_{\alpha}| |m_{\alpha}|} \quad (43)$$

A representação poliédrica permite escrever finalmente o problema (14) na seguinte forma

$$\min \frac{1}{2} (\sigma_c - \sigma) A D^{-1} (\sigma_c - \sigma) + \frac{1}{2} (p_c - p)^t b^{-1} h (p_c - p) \quad (44)$$

$$\text{sub } f_2(\sigma, p) = N^t \sigma - \sigma_p + p \leq 0 \quad (45)$$

As condições de K-T correspondentes ao problema (44) e (45), denominando γ os multiplicadores de Lagrange associados à f_2 são

$$-A D^{-1} (\sigma_c - \sigma) + N \gamma = 0 \quad (46)$$

$$-b h^{-1} (p_c - p) + \gamma = 0 \quad (47)$$

$$\gamma \geq 0 ; \gamma^t w = 0 ; w \geq 0 \quad (48)$$

Sendo w um vetor de variáveis de folga que transforma a desigualdade $f_2(\sigma, p) \leq 0$ em igualdade $f_2(\sigma, p) + w = 0$. Explicitando σ em (46), p em (49), substituindo-as em (47), considerando que $M = A^{-1} N$ e levando em conta (43), pode-se chegar as equações seguintes

$$w = -f(\sigma_c, p_c) + [N^t D M - K] \gamma \quad (49)$$

$$\gamma \geq 0 ; w \geq 0 ; \gamma^t w = 0$$

As equações (49) representam um PLC que como foi dito pode ser resolvido via algoritmo de Lemke.

4. EXEMPLOS

Como exemplos de aplicação será estudado um cilindro de parede espessa e comprimento infinito com 8 m de raio interno e 50 m de raio externo., carregado com uma pressão externa p variando de 5 a 20 Mpa. A figura 2 b apresenta a malha de elementos isoparamétricos de 8 nós utilizada na análise de uma fatia de espessura unitária do cilindro. Tomou-se partido da dupla simetria da estrutura representando-se apenas $\frac{1}{4}$ da fatia. Os parâmetros que definem as propriedades mecânicas do material também estão indicados na figura 2 b. Na figura 2 a as soluções analítica e numérica para as tensões circunferenciais e radiais correspondentes a uma pressão externa $p = 20$ Mpa estão representadas. Na figura 2 c as soluções analítica e numérica para o deslocamento radial correspondentes a um ângulo de dilatação $\psi = 30$ e pressões externas variando de $p = 5$ a 20 Mpa estão indicadas. Na figura 2 d as mesmas soluções correspondentes a $p = 20$ Mpa estão representadas para ângulos de dilatação de $\psi = 0, \psi = 15$ e $\psi = 30$. Os resultados numéricos obtidos com as 3 formulações praticamente coincidem

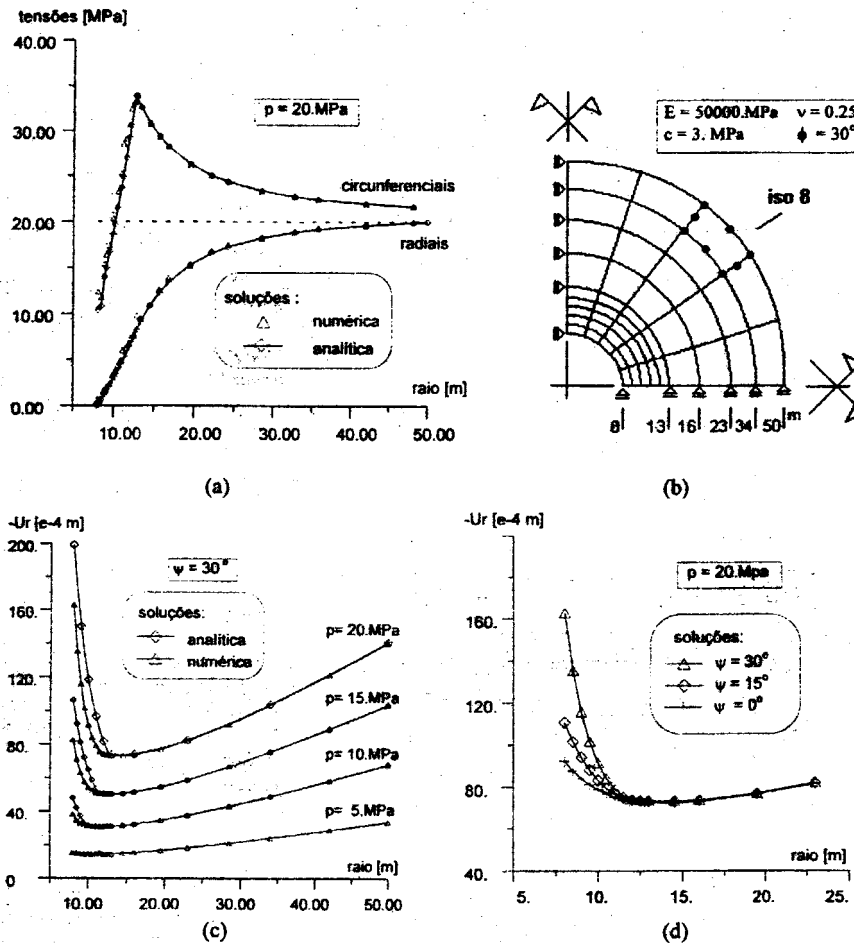


Figura 2 - Exemplo - Cilindro de parede espessa submetido a pressão externa

5. CONCLUSÕES

Três formulações para a análise de estruturas elasto-plásticas no estado plano de deformações via modelo de elementos finitos são discutidas, implementadas num programa de computador e alguns exemplos são apresentados. A superfície de escoamento de Mohr-Coulomb é utilizada e leis de fluxo associado e não associado são consideradas.

Pode-se concluir dos exemplos estudados que a solução via PLC com a representação poliédrica da superfície de escoamento e da superfície do potencial plástico é muito eficiente e recomenda-se a sua utilização todas as vezes que for possível utilizar a representação poliédrica. Ela dispensa a determinação da matriz A^{-1} , que pode ser de difícil determinação para alguns critérios de resistência e potenciais plásticos complexos.

A formulação via solução direta das equações de resíduos é muito genérica, podendo ser usada com igual simplicidade em problemas de plasticidade associada e não associada e é também bastante eficiente do ponto de vista computacional. Além disso, deve ser usada nos casos em que a representação poliédrica das superfícies f e g é de difícil obtenção como em problemas tridimensionais.

Finalmente a solução direta do problema de PM é uma alternativa à solução via equações de resíduos mas necessita da determinação de A^{-1} para sua implementação para o caso não associado, o que nem sempre é possível. Sua utilização no caso de fluxo plástico associado é muito cômoda mesmo para problemas tridimensionais. Ela também não apresenta as dificuldades da solução por resíduos quando se utilizam mais de uma superfície de escoamento.

6. REFERÊNCIAS

- [1] C.S. Desai e H. Siriwardane, Constitutive Laws for Engineering Materials, Prentice Hall, 1984.
- [2] L. M. Kachanov, Fundamentals of the Theory of Plasticity, Mir Publishers, 1974.
- [3] G. Maier e J. Munro, Mathematical Programming Applications to Engineering Plastic Analysis, Applied Mechanics, vol. 35, n. 12, pp 1631 - 1643, dec. 1982.
- [4] D. G. Luenberger, Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publishing Co, 1973.
- [5] S. P. Han, Superlinear, Convergent Variable Metric Algorithms for General Nonlinear Programming Problems, Mathematical Programming, n. 11, pp 263 - 282, 1976.
- [6] J. C. Simo e R. L. Taylor, A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 22, n. 3, pp 649 - 670, 1986.
- [7] G. Maier, A Matrix Theory of Piecewise Linear Elastoplasticity with Interaction Yield Planes, Meccanica, vol. 5, n. 1, pp 54 - 56, 1970.
- [8] C. Lemke, On Complementary Pivot Theory, Mathematical Decision Sciences, Edts. G.B. Dantzig e A.F. Yenott, pp 95 - 114, 1968.
- [9] S.W. Sloan, Lower Bound Limit Analysis using Finite Elements and Linear Programming, report n. 020.01.87, University of Newcastle, Australian, 1987.