



DESCARGA ESTACIONARIA DE SILOS. MODELOS CONSTITUTIVOS BASADOS EN LA MECÁNICA DE LOS FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Sergio A. Elaskar y Luis A. Godoy

Departamento de Estructuras. Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correos 916. (5000) Córdoba.

RESUMEN

El flujo de materiales granulares y polvos sujeto a la fuerza gravitacional en silos es simulado por medio de una formulación viscoplástica. Se presentan dos modelos constitutivos deducidos desde la expresión de Perzyna para viscoplasticidad. El material es modelado como un fluido no-Newtoniano, en el cual la viscosidad aparente depende de parámetros constitutivos (fricción interna, cohesión y fluidez), y dinámicos (presión y segundo invariante del tensor velocidad de deformación).

Resolvemos por medio de elementos finitos, usando funciones de penalización, en casos planos y con simetría axial. Un proceso iterativo es utilizado en la solución del problema no lineal.

El principal objetivo es encontrar las cargas sobre las paredes de los silos.

ABSTRACT

The flow of granular materials and powders produced by gravitational force in silos is simulated with a viscoplastic formulation. We present in this paper two models based in the Perzyna's equation of viscoplasticity. The material is considered as a non-Newtonian fluid with viscosity dependent of the constitutive parameters (internal friction, cohesion and fluidity), and dynamic (pressure, and the second invariant of the velocity of deformation tensor).

The problem is solved by finite elements. We used penalization functions in plane and simetric geometries. The iterative process is considered in the non-linear problem.

The principal goal is to find the pressure on the walls of the silos.

INTRODUCCIÓN

El estudio del flujo de materiales granulares y polvos tiene especial importancia en muchas aplicaciones industriales, tales como en procesos, metalúrgicos, mineros, químicos, alimenticios, agropecuarios, etc. Nuestra línea de investigación está centrada en la descarga por acción gravitatoria de silos en los que se ha almacenado productos agropecuarios, cementos, etc.

Dos tipos de flujo se pueden producir durante el vaciado, flujo másico y flujo canalizado. En el primero todo el material fluye en forma continua sin que se produzcan canales y zonas de velocidad nula; en el segundo parte del material no fluye quedando adherido a las paredes del silo, formándose un canal en donde se desplazan los granos.

Durante la descarga en los silos es cuando se producen las mayores sollicitaciones que deben soportar las estructuras. En los primeros instantes del vaciado las cargas alcanzan su más elevado valor, por lo que es de vital importancia y seguridad poder evaluarlas y predecirlas. Nuestro principal interés es la adecuada evaluación del estado tensional que el material granular ejerce sobre las paredes en el caso de flujo másico. Para alcanzar dicho objetivo es necesario conocer el estado de movimiento del material almacenado. Por ello proponemos dos nuevos modelos constitutivos basados en la mecánica de los medios continuos.

Un clásico modelo continuo describiendo el flujo de materiales almacenados fue propuesto por Jenike and Shield [7], quienes consideran un flujo estacionario, despreciando los términos de aceleraciones convectivas, de un material rígido-plástico e incompresible. El principal problema que posee dicho modelo es la indeterminación del estado tensional cuando el material se comporta como rígido. Una mejora a este modelo fue introducida por Brennan y Pearce [1], ellos consideran los términos convectivos, pero los problemas mencionados continuaron.

Un nuevo modelo fue presentado por Runesson y Nilsson [10], en el mismo el material granular es modelado como uno viscoso-plástico e incompresible, utilizando al criterio de discontinuidad de Drucker-Prager para representar materiales solamente friccionales. Estos autores no presentan resultados del estado tensional y sólo se limitan a indicar en donde su modelización prevee que el material fluya o se comporte como rígido.

Un interesante modelo es introducido por primera vez por Häusler y Eibl [6], ellos usan un material viscoplastico que se reduce a un fluido de viscoelastico tipo Kelvin cuando el nivel del estado tensional es bajo. Una modificación a este modelo constitutivo fue presentada por Schmidt and Wu [11].

Otro modelo fue propuesto por Diez [2] en donde se considera al material como un fluido viscoplastico, considerando plasticidad no asociada, el criterio de Drucker-Prager es utilizado para la superficie de discontinuidad y para el potencial plástico considera von Mises. En un reciente trabajo realizado por Elaskar, et. al. [4] se indican los problemas de convergencia y de cumplimiento de la ecuación constitutiva que posee el modelo.

Una mejoría al modelo anterior fue presentada por Elaskar, et. al. [5], en donde la viscosidad aparente se obtiene con el aporte de dos modelos, uno viscoplastico y otro rígido-viscoplastico. En este caso se solucionaron los inconvenientes que presentaba el trabajo anterior, pero los mejores resultados se consiguieron cuando el límite superior de viscosidad era bajo, lo que condiciona al modelo.

Aquí presentamos dos nuevas ecuaciones constitutivas viscoplasticas.

ECUACIONES CONSTITUTIVAS

La primera formulación general considerando flujo por gravedad de materiales granulares, en función de su fluidez, cohesión y fricción interna, fue presentada por Diez [2], Diez y Godoy [3] como fluido viscoplastico. En este trabajo partimos desde una expresión más general, y exploramos sus alcances y limitaciones mediante experimentación numérica y comparación con resultados experimentales existentes en la literatura especializada.

Para un material rígido-viscoplástico, la ecuación constitutiva general presentada por Perzyna [9], puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{ij} = \gamma \langle A(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1)$$

donde

$$\langle A \rangle = A \quad \text{si } F > 0 \quad (2)$$

$$\langle A \rangle = 0 \quad \text{si } F \leq 0 \quad (3)$$

siendo F la función de discontinuidad plástica, y Q el potencial plástico.

En el primer modelo consideramos que

$$A = \beta F^n \quad (4)$$

En el segundo A toma una forma algo más compleja

$$A = a(e^{bF^n} - 1) \quad (5)$$

En ambas ecuaciones se verifican las expresiones (2).

Utilizamos la función de discontinuidad de Drucker-Prager, la cual nos permite considerar a la cohesión y a la fricción interna como parámetros del modelo. Adoptando la forma dada por Zienkiewicz y Taylor [13], tenemos:

$$F = (3J_2)^{\frac{1}{2}} - k - \alpha p \quad (6)$$

donde J_2 es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones, p es la presión, k y α están dadas por:

$$k = c \frac{6 \cos \phi}{(3 - \sin \phi)} \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{6 \sin \phi}{(3 - \sin \phi)} \quad (8)$$

siendo c es la cohesión y ϕ el ángulo de fricción interno del material.

Para la consideración del potencial plástico, usamos una regla no asociada, en función del criterio de von Mises:

$$(3J_2)^{\frac{1}{2}} - k = 0 \quad (9)$$

La ecuación constitutiva de un fluido viscoso e incompresible puede ser expresada por una relación entre tensiones y velocidades:

$$S_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (10)$$

donde $\mu \geq 0$, es una viscosidad aparente de un fluido isótropo.

Substituyendo las ecuaciones (4), (6) y (9) en (1) y considerando (10), tenemos:

$$\mu = \left[\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\beta \gamma} \right)^{\frac{1}{n}} + k + \alpha p \right] \frac{1}{3\bar{\varepsilon}} \quad (11)$$

donde $\bar{\varepsilon}$ es el segundo invariante del tensor velocidad de deformación

Por otra parte introduciendo (5), (6), y (9) en la ecuación (1) y considerando la expresión (10) llegamos a:

$$\mu = \left\{ \left[\frac{1}{b} \ln \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{a \gamma} \right) \right]^{\frac{1}{n}} + k + \alpha p \right\} \frac{1}{3\bar{\varepsilon}} \quad (12)$$

La ecuación (11) nos da la viscosidad aparente del primer modelo constitutivo propuesto al cual denominaremos "modelo con ley de potencias". La (12) expresa la del segundo modelo deducido en este trabajo, que llamamos "modelo con ley logarítmica".

Modelo con ley de potencias

Hemos introducido dos constantes en la ecuación constitutiva w_1 y w_2 .

$$k = (c + w_2) \frac{6 \cos \phi}{(3 - \sin \phi)} \quad (13)$$

$$\alpha' = w_1 \frac{6 \sin \phi}{(3 - \sin \phi)} \quad (14)$$

Significado de las constantes w_1 y w_2 :

Primero analizaremos el significado de cada una de estas constantes:

w_1 : indica la cantidad de la fricción interna que influye en el comportamiento viscoplástico. Será un porcentaje de la fricción total. El producto ($w_1 \alpha'$) puede ser interpretado como la fricción dinámica, que siempre es menor que la estática (α')

$$0 \leq w_1 \leq 1 \quad (15)$$

w_2 : la interpretación de esta constante no es tan directa. Su principal objetivo es impedir que la viscosidad alcance valores muy pequeños (caso plástico con cohesión nula). Además ayuda a verificar el adecuado cumplimiento de la ecuación constitutiva (que el material no se desgrane, [4]). Puede ser interpretada como una cohesión muy pequeña que actúa en los casos friccionales solamente (es posible que cuando un material ha permanecido almacenado durante un período de tiempo la humedad en los granos produzca un efecto semejante a una cohesión muy pequeña).

Modelo con ley logarítmica

Sólo introducimos la constante w_1 . Su significado es idéntico al presentado en el modelo anterior

DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Partimos desde la formulación integral dada por el principio de potencias virtuales. Hemos usado funciones de penalización, por lo que las variables primarias del problema son las velocidades en los nodos y a partir de ellas obtenemos las presiones. Obtenemos una viscosidad por elemento como promedio de las que aparecen en los cuatro puntos de integración de Gauss [4].

RESULTADOS NUMÉRICOS

Detallaremos ahora las características de los resultados que deseamos obtener con la teoría constitutiva propuesta.

Convergencia: al resolver el problema de la descarga por acción de la gravedad, necesitamos que el proceso iterativo sea convergente. El intervalo de valores de interés práctico en el plano cohesión-fricción es

$$0 \text{ kpa} \leq c \leq 5 \text{ kpa} \quad (16)$$

$$20^\circ \leq \phi \leq 35^\circ \quad (17)$$

Cumplimiento de la ecuación constitutiva: para el mismo conjunto de valores en donde exigimos convergencia también necesitamos que el material no se desgrane dentro del dominio de simulación numérica. Cuando expresamos, que no se desgrane, queremos significar que no aparezca una presión de tracción mayor que la dada por el vértice del cono determinado por la superficie de Drucker-Prager en el espacio de tensiones principales. La presión máxima de tracción es en el caso del modelo con ley de potencias es

$$p_{ex} = -(c + w_2) \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \quad (18)$$

recordamos que $w_2 \neq 0$ sólo para casos friccionales puros.

En el modelo con ley logarítmica debe verificarse que

$$p_{ex} = -c \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \quad (19)$$

Concordancia con los resultados experimentales: las dos primeras solicitudes son exigencias internas para un adecuado comportamiento. Esta última, es una prueba externa que debe superar el modelo. Hemos trabajado sobre casos planos y axialmente simétricos. Las geometrías estudiadas se muestran en las figuras 1 y 2. En todos los casos las mallas tenían 130 elementos lagrangeanos de nueve nodos.

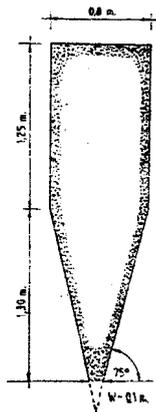


Figura 1: Silo

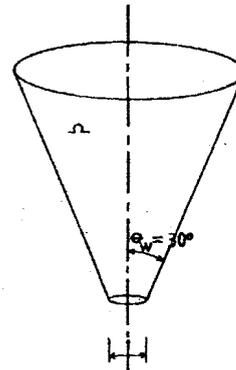


Figura 2: Tolva

El material que fluye por el silo posee un ángulo de fricción grano-grano $\phi = 33^\circ$, y un ángulo de fricción grano-pared $\phi_w = 33^\circ$. En el caso de la tolva tenemos que $\phi = 25^\circ$, y $\phi_w = 15^\circ$. En todos los casos consideramos que $a = b = \beta = 1$.

Las figuras 3, 4, 5 y 7 se obtuvieron con el modelo con ley de potencias. En las figuras 3 y 4 observamos como influye el exponente de la función de discontinuidad en la descarga del silo.

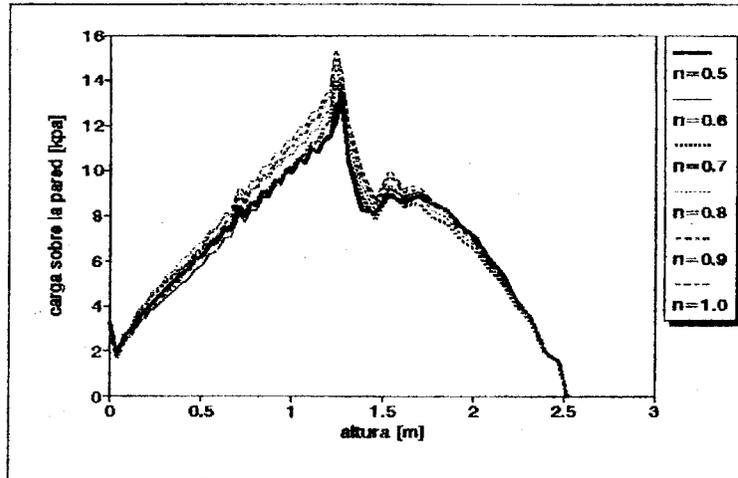


Figura 3: silo

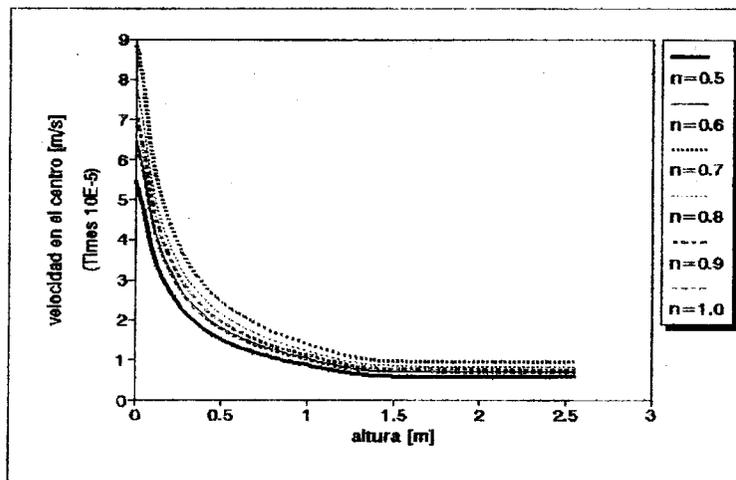


Figura 4: silo

Las figuras 5 y 6 indican la sensibilidad de los resultados cuando cambiamos w_2 para la descarga en la tolva.

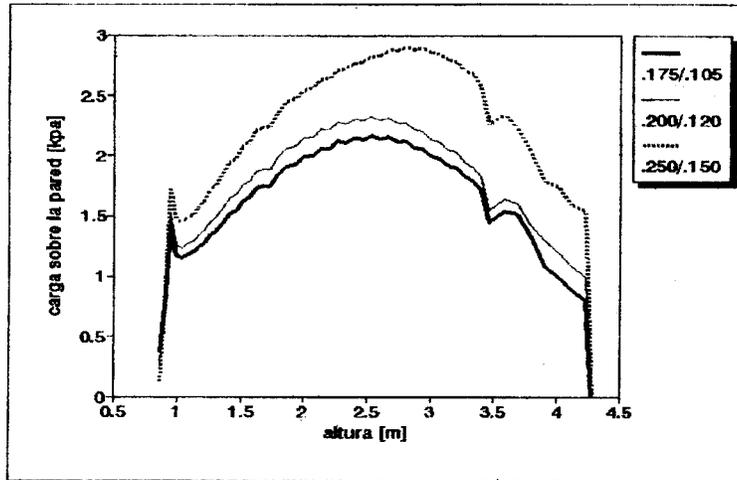


Figura 5: tolva

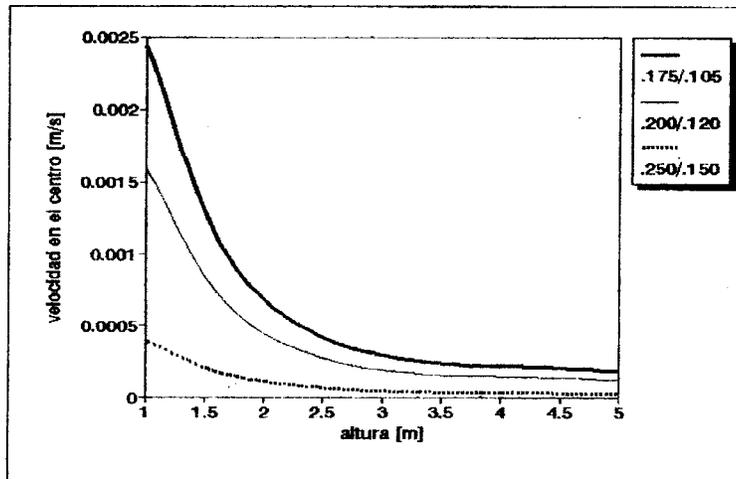


Figura 6: tolva

Los gráficos 7, 8, 9 y 10 pertenecen a los resultados conseguidos con el modelo con ley logarítmica. En las figuras 7 y 8 se muestra la sensibilidad del modelo con respecto al cambio en el valor del exponente n , ambos gráficos han sido conseguidos usando el silo de geometría plana de la figura 3.

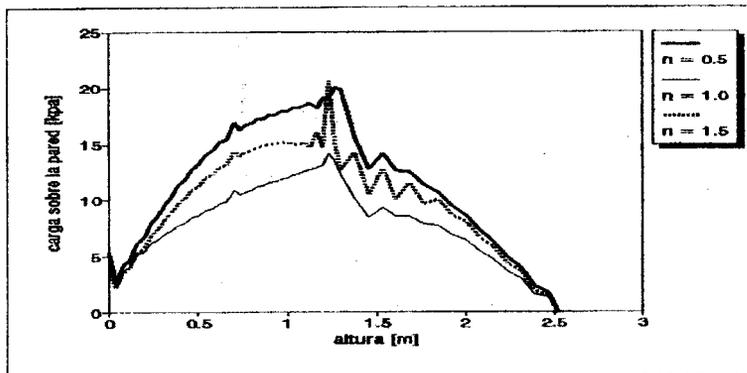


Figura 7: silo

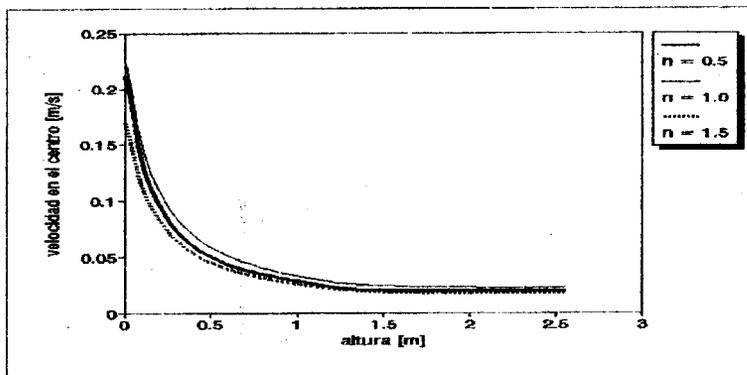


Figura 8: silo

En los gráficos 9 y 10 se indica la sensibilidad del modelo con respecto a cambios en w_1 , en este caso para la tolva.

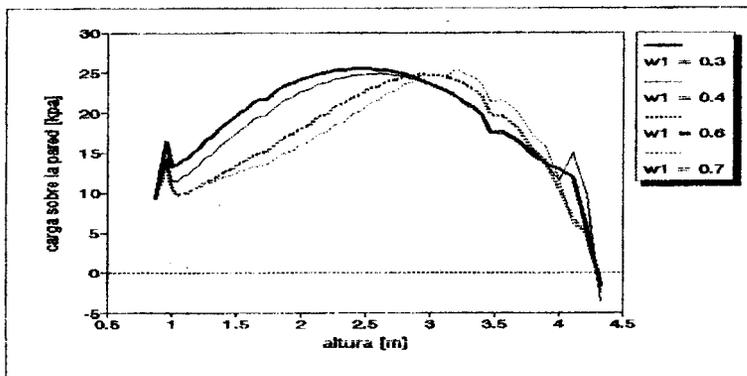


Figura 9: tolva

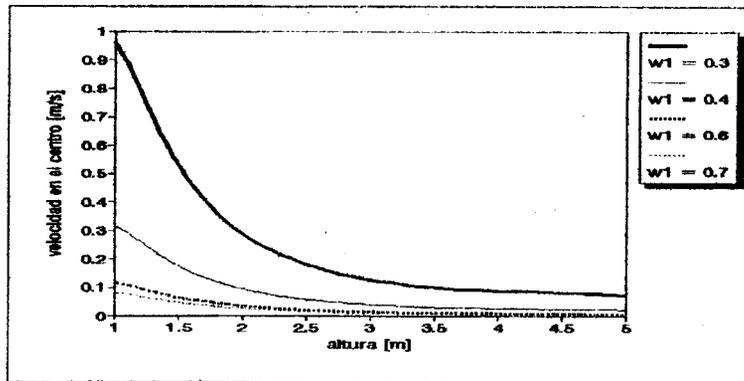


Figura 10: tolva

CONCLUSIONES

Modelo con ley de potencias:

1. La carga sobre la pared es poco sensible al cambio del exponente n .
2. La velocidad no es muy sensible a la variación de n . Pero para todos los casos resultó un poco baja. Una forma de mejorar ésto es aumentando la fluidez o el parámetro β .
3. Cuando alteramos el valor de w_2 las velocidades fueron sensibles, pero la carga no lo fue. En las figuras 5 y 6 en el caso en que $w_2 = .25/.15$ no se llegó a convergencia en el proceso iterativo, pero no tuvimos divergencia, la norma se estableció entre .01 y .02, sin disminuir ni aumentar.
4. Para todos los casos estudiados las velocidades fueron pequeñas.
5. Las cargas sobre la pared encontradas fueron buenas comparadas con las dadas en trabajos experimentales [8] y [12]. Para el silo, con $n = 0.5$ y 0.6 la curva ajusta mejor los resultados experimentales obtenidos por Kmita.
6. La sensibilidad a los cambios de n y w_2 depende tanto del material y de la geometría del silo.

Modelo con ley logarítmica:

1. La carga es influenciada por el cambio en el exponente n . El mejor resultado comparado con el dado por Kmita se consigue con $n = 1.0$. La velocidad es menos afectada por la variación en n .
2. La carga es sensible al cambio de w_1 , como se deduce de la figura 9. La velocidad es también muy sensible al valor de w_1 .
3. Las cargas y las velocidades dependen del valor de fluidez considerado.
4. Los valores de velocidades son sustancialmente mayores que los conseguidos con el modelo con ley de potencias. Esta es una de las principales ventajas del modelo.

5. Otra característica destacable es que sólo agregamos una constante a la función de discontinuidad de Drucker-Prager, y la inclusión de dicha constante tiene una explicación física consistente.
6. Las cargas sobre la pared encontradas en el caso del silo cuando $n = 1$ comparadas con las obtenidas por Kmita [8] fueron buenas. Las cargas en la pared de la tolva dadas en la figura 9 son buenas; la mejor se consigue cuando $w_1 = 0.6$, [12].

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente con subsidios otorgados por CONICET y CONICOR.

Referencias

- [1] Brennan, C. y Pearce, J. - 1978 - "Granular material flow in two-dimensional hoppers". - **Journal Applied Mechanics, ASME** - Vol 45, págs 43-50.
- [2] Diez, M. - 1990 - "Presiones en silos durante el flujo de materiales con cohesión y fricción mediante elementos finitos". - **Tesis Doctoral en Ciencias de la Ingeniería. Universidad Nacional de Córdoba.**
- [3] Diez, M. y Godoy, L. - 1992 - "Viscoplastic incompressible flow of frictional cohesive solids" - **International Journal of Mechanical Sciences.** - Vol 34, págs 395-408.
- [4] Elaskar, S.; Godoy, L. y Brewer, A. - 1995 - "Análisis de la convergencia en fluidos viscoplástico y newtoniano-viscoplástico". - En **Mecánica Computacional. AMCA.** Compilado por Larreguy, A. y Vénere, M.- Vol 15, págs. 253-263.
- [5] Elaskar, S.; Godoy, L. y Brewer, A. - 1996 - "Granular flow based on non-Newtonian fluid mechanics". - En **Engineering Mechanics.** Editado por Lin, Y., y Su, T. - Vol 1, págs. 394-397. ASCE. New York.
- [6] Haüssler, U. y Eibl, J. - 1984. "Numerical investigations on discharging silos". - **Jour. of Engng. Mech., ASCE.** - Vol 110(6), págs. 957-971
- [7] Jenike, A. y Shield, R. - 1959 - "On the plastic flow of the Coulomb solids beyond original failure" - **Journal of Applied Mechanics, ASME.** - Vol 81(E), págs. 599-602.
- [8] Kmita, J.- 1991 - "An experimental analysis of internal silo loads". - **Bulk solids handling.** - Vol 11, N 2, págs 459-468.
- [9] Perzyna, P. - 1966 - "Fundamental problems in viscoplasticity". - En **Recent Advances in Applied Mechanics.** - Vol 9, págs. 243-377. Academic Press. New York.
- [10] Runesson, K. y Nilsson, L. - 1986 - "Finite element modelling of the gravitational flow of a granular material". - **Bulk Solids Handling.** - Vol 6(5), págs. 241-248.
- [11] Schmidt, L. y Wu, Y. - 1989 - "Prediction of the dynamic wall pressures on silos". - **Bulk Solids Handling.** - Vol 9, N 3, págs 333-338.
- [12] Walker, D. y Blanchard, M. - 1967 - "Pressures in experimental coal hoppers" - **Chemical Engineering Science** - Vol 22, págs. 1706-1713.
- [13] Zienkiewicz, O. y Taylor. - 1991 - "The Finite Element Method. Vol 2". Mc. Graw Hill. London