



Integración Constitutiva de Modelos Basados en la Teoría Elastoviscoplastica de Perzyna

Alejandro Carosio, Guillermo Etse

Laboratorio de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán,
Av. Roca 1800. San Miguel de Tucumán (4000). Tucumán

Resumen

El presente trabajo trata la implementación computacional de la integración constitutiva de materiales basados en la Teoría Elastoviscoplastica de Perzyna mediante el algoritmo de proyección al punto más cercano propuesto por Simo y Huges (Simo & Huges, 1988) y la obtención del operador material tangente consistente. Se realiza además una comparación de la precisión respecto al algoritmo de integración propuesto por Ortiz y Simo (Ortiz & Simo, 1986) para el caso de compresión uniaxial en estado de deformación plana. Las conclusiones muestran que no existen diferencias significativas de precisión entre ambos algoritmos, pero el hecho de contar con un operador material tangente algorítmico para el método de integración analizado, conduce a una mayor eficiencia computacional del mismo.

Introducción

Actualmente, el análisis estructural necesita con frecuencia cada vez mayor considerar el comportamiento no lineal a nivel material. Esto es así en todos los diversos campos de aplicación del mismo, pudiendo citarse como casos de ejemplo el análisis de la capacidad de las estructuras sismorresistentes, o bien las predicciones de conformado de metales. Este fenómeno de no linealidad material puede tratarse por medio de una variedad de teorías, tales como la Teoría Hiperelástica (Desai, 1984), la Teoría del Daño, y la Teoría del Flujo de la Plasticidad (Lubliner, 1990), que ha probado repetidas veces su gran versatilidad al encarar este tipo de problemas. Sin embargo, dado que el tiempo no es tomado como variable del problema, estas teorías fallan al intentar describir fenómenos dependientes del tiempo de indiscutible importancia en variadas situaciones, tales como el creep y la sobrerresistencia dinámica. La Teoría Elastoviscoplastica de Perzyna (Perzyna, 1966), junto con la Teoría Elastoviscoplastica de Duvaut - Lions (Duvaut & Lions, 1972), son casi exclusivamente las herramientas computacionales utilizadas para introducir el efecto temporal junto con la no linealidad material en los modelos computacionales.

En el presente trabajo se trata en general la implementación según la Teoría Elastoviscoplastica de Perzyna de modelos materiales con endurecimiento isotrópico, tanto en lo que respecta a la integración de la ecuación constitutiva como al operador material tangente algorítmico necesario para conservar al tasa cuadrática de convergencia global (Simo & Huges, 1988). Además se presentan una particularización para el modelo de Drucker - Prager y un análisis comparativo de precisión del algoritmo implementado frente al propuesto por Ortiz y Simo (Ortiz & Simo, 1986).

Teoría Elastoviscoplastica de Perzyna y su integración constitutiva.

La Teoría Elastoviscoplastica de Perzyna se basa en las hipótesis usuales de descomposición de la deformación total en deformación elástica y deformación viscoplastica y en la relación entre deformación elástica y tensión, es decir,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (\text{ec.1})$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E}^e : \dot{\varepsilon}^e \quad (\text{ec.2})$$

donde $\{\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}^e, \dot{\varepsilon}^p\}$ representan las derivadas respecto al tiempo de la deformación total, elástica y viscoplastica, respectivamente, $\dot{\sigma}$ la derivada de la tensión respecto al tiempo y \mathbf{E}^e el operador material elástico. El flujo de deformación viscoplastica se define como

$$\dot{\varepsilon}^p \doteq \frac{1}{\eta} \cdot \langle \phi(F) \rangle \cdot \mathbf{m} \quad (\text{ec.3})$$

en la que η representa el parámetro de viscosidad, F una función de fluencia con endurecimiento isotrópico en el espacio de tensiones, ϕ una función arbitraria de F ,

usualmente de la forma $\phi(F) = \left(\frac{F}{R}\right)^N$, afectada del operador de Mc Cauley definido como

$\langle x \rangle = \frac{x + |x|}{2}$ y finalmente \mathbf{m} representa el gradiente del potencial viscoplastico, es decir,

$$\mathbf{m} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

A partir de las formas incrementales de la regla de flujo de la Teoría Viscoplastica de Perzyna y de la relación tensión - deformación elástica para dos instantes de tiempo t_{n-1} y t_n distantes entre sí $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$

$$\Delta \varepsilon_n^p = \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \phi(F)_n \rangle \cdot \mathbf{m}_n \quad (\text{ec.4})$$

$$\Delta \sigma_n = \mathbf{E} : (\Delta \varepsilon_n - \Delta \varepsilon_n^p) \quad (\text{ec.5})$$

luego

$$\sigma_n = \sigma_n^{pred} - \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \phi(F)_n \rangle \cdot \mathbf{E} : \mathbf{m}_n \quad (\text{ec.6})$$

donde σ_n^{pred} representa el predictor de tensión, definido como $\sigma_n^{pred} = \sigma_{n-1} + \mathbf{E} : \Delta \varepsilon_n$. De (ec.6) surge el siguiente residuo en tensiones

$$\Psi_n^\sigma = -\sigma_n + \sigma_n^{pred} - \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \phi(F)_n \rangle \cdot \mathbf{E} : \mathbf{m}_n \quad (\text{ec.7})$$

Se considera el incremento de la variable interna de endurecimiento isótropo para $\Delta \kappa_n$ definido en función del incremento de la deformación viscoplástica equivalente, es decir

$$\Delta \kappa_n = \mathbf{h} \cdot \sqrt{\Delta \varepsilon_n^p : \Delta \varepsilon_n^p} \quad (\text{ec.8})$$

reemplazando en (ec.8) por (ec.4)

$$\Delta \kappa_n = \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \phi(F)_n \rangle \cdot \mathbf{h} \cdot \sqrt{\mathbf{m}_n : \mathbf{m}_n} \quad (\text{ec.9})$$

A partir de (ec.9) puede plantearse el siguiente residuo de variable interna

$$\Psi_n^\kappa = -\kappa_n + \kappa_{n-1} + \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \phi(F)_n \rangle \cdot \mathbf{h} \cdot \sqrt{\mathbf{m}_n : \mathbf{m}_n} \quad (\text{ec.10})$$

La integración de la ecuación constitutiva puede plantearse entonces como el problema de minimizar el valor de los residuos en tensiones y variable interna, Ψ_n^σ y Ψ_n^κ , es decir, encontrar el estado $\{\sigma_n, \kappa_n\}$ que satisface las condiciones

$$\Psi_n^\sigma = \mathbf{0}; \quad \Psi_n^\kappa = 0 \quad (\text{ec.11})$$

en las que $\mathbf{0}$ representa el tensor de segundo orden nulo.

Expandiendo en serie de Taylor limitada a términos de primer orden las funciones residuo (ec.7) y (ec.10) para dos iteraciones sucesivas i e $i-1$, los valores de residuo correspondientes a la i -ésima iteración ${}^i\Psi_n^\sigma$ y ${}^i\Psi_n^\kappa$ quedan definidos en función de los residuos de la iteración anterior ${}^{i-1}\Psi_n^\sigma$ y ${}^{i-1}\Psi_n^\kappa$ por medio de

$${}^i\Psi_n^\sigma = {}^{i-1}\Psi_n^\sigma + \left(\frac{\partial\Psi^\sigma}{\partial\sigma}\right)_n : \Delta\sigma_n + \left(\frac{\partial\Psi^\sigma}{\partial\kappa}\right)_n : \Delta\kappa_n \quad (\text{ec.12})$$

y

$${}^i\Psi_n^\kappa = {}^{i-1}\Psi_n^\kappa + \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\sigma}\right)_n : \Delta\sigma_n + \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\kappa}\right)_n : \Delta\kappa_n \quad (\text{ec.13})$$

donde $\{\Delta\sigma_n, \Delta\kappa_n\}$ expresan el incremento de tensión y variable de estado entre las iteraciones $i-1$ e i , es decir, $\Delta\sigma_n = \sigma_n - {}^{i-1}\sigma_n$ y $\Delta\kappa_n = \kappa_n - {}^{i-1}\kappa_n$. Imponiendo a las (ec.12) y (ec.13) la condición que los residuos en la i -ésima iteración sean nulos, y notando en forma matricial

$${}^{i-1} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\Psi^\sigma}{\partial\sigma}\right) & \left(\frac{\partial\Psi^\sigma}{\partial\kappa}\right) \\ \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\sigma}\right) & \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\kappa}\right) \end{bmatrix}_n \cdot {}^{i-1} \begin{bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\kappa \end{bmatrix}_n = - {}^{i-1} \begin{bmatrix} \Psi^\sigma \\ \Psi^\kappa \end{bmatrix}_n \quad (\text{ec.14})$$

en la que el producto matricial da lugar a la contracción de índices correspondiente en cada caso. De (ec.14) se desprende que en incremento de tensión y variable de estado que satisface la condición de residuo nulo es

$${}^{i-1} \begin{bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\kappa \end{bmatrix}_n = - \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\Psi^\sigma}{\partial\sigma}\right) & \left(\frac{\partial\Psi^\sigma}{\partial\kappa}\right) \\ \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\sigma}\right) & \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\kappa}\right) \end{bmatrix}_n^{-1} \cdot {}^{i-1} \begin{bmatrix} \Psi^\sigma \\ \Psi^\kappa \end{bmatrix}_n \quad (\text{ec.15})$$

o bien

$${}^i\Delta\sigma_n = {}^{i-1}(\hat{\Psi}^\sigma)_n^{-1} : {}^{i-1}(\bar{\Psi}^\sigma)_n^{-1} \quad (\text{ec.16})$$

$${}^i\Delta\kappa_n = - \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\kappa}\right)_n^{-1} \cdot \left({}^{i-1}\Psi_n^\kappa + \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\sigma}\right)_n : \Delta\sigma_n\right) \quad (\text{ec.17})$$

donde $\hat{\Psi}^\sigma$ y $\bar{\Psi}^\sigma$ representan los tensores de cuarto y segundo orden respectivamente

$$\hat{\Psi}^\sigma = \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\kappa}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial\Psi^\sigma}{\partial\kappa}\right) \otimes \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\sigma}\right) - \left(\frac{\partial\Psi^\sigma}{\partial\sigma}\right) \quad (\text{ec.18})$$

$$\bar{\Psi}^\sigma = \Psi^\sigma - \left(\frac{\partial\Psi^\kappa}{\partial\kappa}\right)^{-1} \cdot \Psi^\kappa \cdot \left(\frac{\partial\Psi^\sigma}{\partial\kappa}\right) \quad (\text{ec.19})$$

La Fig. 1 muestra el diagrama de flujo correspondiente al algoritmo de integración descripto. Es importante notar que para leyes de endurecimiento - ablandamiento no lineales la extensión es inmediata al substituir $h \cdot \sqrt{\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}}$ por la función $h(\|\mathbf{m}\|)$ que representa la ley de variación de las variables internas en función de la norma del gradiente del potencial plástico, relacionada con la deformación viscoplástica equivalente.

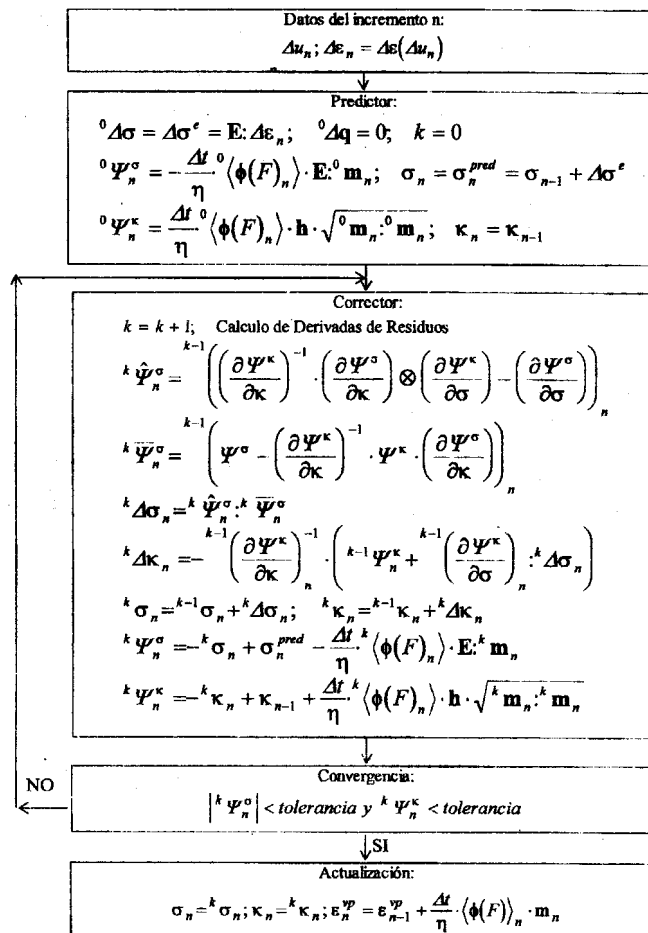


Fig. 1: Diagrama de Flujo del Algoritmo de Integración Constitutiva para la Teoría Elastoviscoplasticidad de Perzyna.

Operador Material Tangente Consistente con el Método de Newton.

Una de las propiedades deseables y de extrema importancia de todo algoritmo de resolución de problemas no lineales, tal como el tratado en el presente trabajo, es la tasa de convergencia cuadrática. En particular para algoritmos de resolución de PVB o PVBI mediante el MEF, esta característica sólo puede conservarse si el operador material utilizado es consistente con el método de Newton. Consideramos el residuo en tensiones definido por (ec.7) en una iteración global de Newton, esto implica que a diferencia del caso de la integración constitutiva el valor de la deformación viscoplástica y en consecuencia la deformación total no permanece constante durante el proceso

$$\Psi_n^\sigma = -\sigma_n + \sigma_{n-1} + \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}) - \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \phi(F)_n \rangle \cdot \mathbf{E} : \mathbf{m}_n \quad (\text{ec.20})$$

entre dos iteraciones sucesivas el residuo se obtiene expandiendo (ec.20) en serie de Taylor limitada al primer término, es decir

$${}^{i-1}\Psi_n^\sigma = {}^{i-1}\Psi_n^\sigma + \left(\frac{\partial \Psi^\sigma}{\partial \sigma} \right)_n : \Delta \sigma_n + \left(\frac{\partial \Psi^\sigma}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_n : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (\text{ec.21})$$

y tomando en cuenta que en (ec.20) tanto σ_{n-1} como $\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}$ son constantes y que para un número suficientemente grande de iteraciones el incremento de residuo es nulo,

$${}^i \Delta \Psi_n^\sigma = {}^i \Psi_n^\sigma - {}^{i-1} \Psi_n^\sigma = 0, \text{ despejando}$$

$$\frac{{}^i \Delta \sigma_n}{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n} = \left(\frac{\partial \Psi^\sigma}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_n^{-1} : \left(\frac{\partial \Psi^\sigma}{\partial \sigma} \right)_n \quad (\text{ec.22})$$

donde

$$\left(\frac{\partial \Psi^\sigma}{\partial \sigma} \right)_n^{-1} = -\mathbf{I}_4 - \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \mathbf{E} : \left\{ \langle \phi(F)_n \rangle^{-1} \mathbf{H}_n + a \cdot {}^{i-1} \mathbf{n}_n \otimes {}^{i-1} \mathbf{m}_n \right\} \quad (\text{ec.23})$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^\sigma}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_n = \mathbf{E} \quad (\text{ec.24})$$

en las que \mathbf{I}_4 es el tensor unidad de cuarto orden, ${}^{i-1} \mathbf{H}_n$ la derivada del gradiente del potencial plástico para el incremento n iteración $i-1$ y $a \cdot \mathbf{n}_n$ la derivada del operador de Mc Cauley aplicado a función arbitraria $\phi(F)$ respecto a la tensión σ , ya que por la regla de derivación en cadena

$$\frac{\partial \langle \phi(F) \rangle}{\partial \sigma} = \frac{\partial \langle \phi(F) \rangle}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \text{sgn}(\phi(F))) \cdot \frac{\partial \phi(F)}{\partial F} \cdot \mathbf{n} = a \cdot \mathbf{n} \quad (\text{ec.25})$$

luego, reagrupando

$$\mathbf{C}_n^{\text{sig}} = \frac{\Delta \sigma_n}{\Delta \epsilon_n} = \mathbf{E}^{-1} + \frac{\Delta t_n}{\eta} \cdot \langle \phi(F)_n \rangle^{i-1} \mathbf{H}_n + \frac{\Delta t_n}{\eta} \cdot a^{i-1} \mathbf{n}_n \otimes^{i-1} \mathbf{m}_n \quad (\text{ec.26})$$

y aplicando la fórmula de Sherman - Morrison, el operador material tangente consistente con el método de Newton resulta

$$\mathbf{E}_n^{\text{sig}} = \mathbf{C}_n^{\text{sig}^{-1}} = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{A}}{\frac{\eta}{\Delta t_n \cdot a} + \mathbf{n} : \mathbf{A} : \mathbf{m}} \quad (\text{ec.27})$$

donde el tensor de cuarto orden \mathbf{A} se define como $\mathbf{A} = \left(\mathbf{E}^{-1} + \frac{\Delta t_n}{\eta} \cdot \langle \phi(F)_n \rangle^{i-1} \mathbf{H}_n \right)^{-1}$

Comparación de Precisión. Implementación del modelo de Drucker Prager.

En este punto se compara la precisión alcanzada por el algoritmo de integración desarrollado con el algoritmo de integración constitutiva para materiales elasto-plásticos y elastoviscoplasticos propuesto por Ortiz y Simo (Ortiz & Simo, 1986). Con este fin se implementó el modelo de Drucker Prager con flujo no asociado definido por la siguiente función de carga

$$F(\sigma, \kappa) = \alpha \cdot \mathbf{I}_1 + \sqrt{\mathbf{J}_2} - \frac{(\sigma_0 + \kappa)}{\sqrt{3}} \quad (\text{ec.28})$$

y el potencial viscoplastico dado por la transformación volumétrica

$$Q(\sigma, \kappa) = (\beta - \alpha) \cdot \mathbf{I}_1 + F(\sigma, \kappa) = \beta \cdot \mathbf{I}_1 + \sqrt{\mathbf{J}_2} - \frac{(\sigma_0 + \kappa)}{\sqrt{3}} \quad (\text{ec.29})$$

en consecuencia

$$\mathbf{n} = \alpha \cdot \mathbf{1}_2 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\mathbf{J}_2}} \cdot \mathbf{s} \quad (\text{ec.30})$$

$$\mathbf{m} = \alpha \cdot \mathbf{1}_2 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\mathbf{J}_2}} \cdot \mathbf{s} \quad (\text{ec.31})$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\mathbf{J}_2}} \cdot \mathbf{1}_4' - \frac{1}{4 \cdot \sqrt{\mathbf{J}_2^3}} \cdot \mathbf{1}_4 \quad (\text{ec.32})$$

donde \mathbf{s} es el tensor deviator de tensiones, $\mathbf{1}_2$ el tensor unidad de segundo orden y $\mathbf{1}_4$, $\mathbf{1}'_4$ los tensores unidad y deviatorico unidad de cuarto orden, respectivamente.

Considerando el material de Drucker Prager - Perzyna definido por

$$\text{Parámetros Elásticos } E = 1.9305 \cdot 10^4 \cdot \frac{MN}{m^2}; \quad \nu = 0.2$$

$$\text{Parámetros Plásticos } \sigma_0 = 19.305 \cdot \frac{MN}{m^2}; \quad h = -1.9305 \cdot 10^2 \cdot \frac{MN}{m^2}; \quad \alpha = 0.2; \quad \beta = 0.1$$

$$\text{Parámetros Viscosos } \eta = 1.0; \quad \Delta t = 1.0 \cdot 10^{-4}$$

Se efectuaron ensayos numéricos de compresión uniaxial en deformación plana a nivel material utilizando los dos algoritmos de integración constitutiva mencionados. La Fig. 2 muestra las curvas tensión - deformación obtenidas para ambos casos junto con la correspondiente al caso elastoplástico (tiempo independiente), observándose una perfecta coincidencia de los resultados para los dos algoritmos. Además en la misma figura el punto P indica sobre la curva tensión - deformación el estado tensional de referencia utilizado para el trazado de mapas de isoerror, caracterizado por los invariantes $\{p, \rho\} = \{-1924, 3430\} \cdot psi$. Utilizando como referencia la curva tensión - deformación elastoplástica, se evidencia la elevada sobretensión para el estado definido por P.

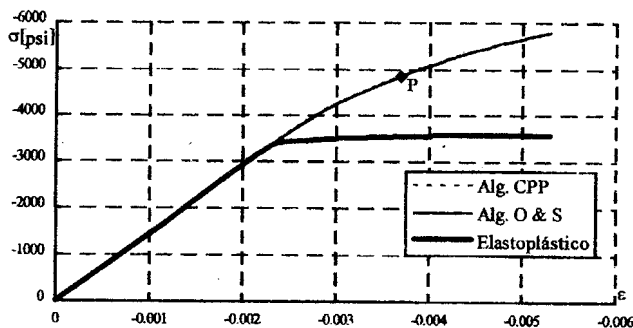


Fig. 2: Diagramas Tensión - Deformación obtenidos de ensayos numéricos de compresión uniaxial para los dos algoritmos de integración constitutiva.

En la Fig. 3 y Fig. 4 se muestran los mapas de isoerror correspondientes al algoritmo de integración viscoplastico basado en la proyección al punto más cercano y el propuesto por Ortiz y Simo, respectivamente, para un entorno tangente a la superficie definida por

$F(\sigma, \kappa) = c$, donde c es el valor de $F(\sigma, \kappa)$ correspondiente al punto P, es decir, $c = F(P)$. El valor de error máximo es en ambos casos levemente superior a $5.0 \cdot 10^{-3}$, además la distribución de las líneas de isoerror en el entorno es semejante. Sin embargo, en el mapa de isoerror del algoritmo de integración propuesto por Ortiz y Simo las isolíneas se acercan más al punto de referencia, en consecuencia el algoritmo propuesto por Ortiz y Simo presenta para el caso de compresión uniaxial y deformación plana analizado una mayor precisión que el algoritmo de integración constitutiva basado en el concepto de proyección al punto más cercano descrito en los puntos anteriores.

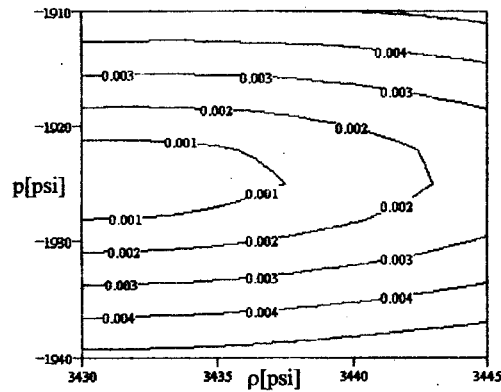


Fig. 3: Mapa de Isoerror del algoritmo de integración para la Teoría Elastoviscoplastica de Perzyna analizado

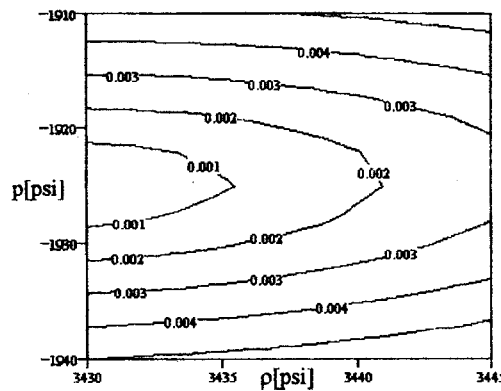


Fig. 4: Mapa de Isoerror del algoritmo de integración para la Teoría Elastoviscoplastica de Perzyna propuesto por Ortiz y Simo (Ortiz & Simo, 1986)

Conclusiones

Del análisis comparativo de precisión entre el algoritmo de integración constitutiva basado en la proyección al punto más cercano y el propuesto por Ortiz y Simo se concluye que para el caso analizado las diferencias entre ambos no son realmente significativas en cuanto a precisión se trata. En cuanto a la eficiencia computacional, la posibilidad de utilizar el operador material tangente algorítmico en el primer permite conservar la tasa de convergencia global cuadrática o cuasi cuadrática, a expensas de una mayor complejidad de cálculo tanto a nivel constitutivo en el que es necesario calcular el hessiano del potencial viscoplastico como a nivel de problema de valores de borde.

Bibliografía

- Desai, C; Sirlwardane, H. (1984), "Constitutive Laws for Engineering Materials", Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Duvaut, G; Lions, J. L. (1972), "Les inequations en Mechanique et en Physique", Dunod, Paris.
- Lubliner, Jacob (1990), "Plasticity Theory", Macmillan Publishing Company, New York.
- Ortiz, M.; Simo, J. C. (1986), "An Analisis of a New Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations", Int. J. Num. Meth. Eng., John Wiley & Sons, vol. 23, pag. 353 - 366.
- Perzyna, P. (1966) "Fundamental Problems in Viscoplasticity", Recent Advances in Applied Mechanics, Academic Press, New York, vol. 9, pag. 243 - 377.
- Simo, J. C (1988); T. J. Huges, "Elastoplasticity and Viscoplasticity: Computational Aspects"