



IMPLEMENTACION DE UN PROGRAMA DE CALCULO DE CAMPOS ELECTROSTÁTICOS CON EL METODO DE CARGAS EQUIVALENTES

Ricardo R. Diaz, Roberto G. Tagashira

Laboratorio de Alta Tensión, Universidad Nacional de Tucumán
Av. Independencia 1800, (4000) S.M. de Tucumán, Argentina

RESUMEN

Se presenta un programa de cálculo y visualización de las distribuciones de potenciales, campos electrostáticos y líneas de flujo eléctrico en sistemas tridimensionales monodieléctricos con simetría axial, utilizando el método de simulación de cargas (CSM). Las características distintivas del programa son: correr en computadoras personales, fácil ingreso de datos y organización de archivo de resultados para el uso de logicales comerciales de graficación o de cálculo matemático.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present a modular software for simulate and visualize the equipotential, equipfield and electric flux lines over mono-dielectric and axi-symmetric regions using a personal computer. This software, based on the Charge Simulation Method, use drawing commercial software and allows a straightforward and efficient way of analysing the results by graphical plots.

INTRODUCCION

Uno de los aspectos más importantes y delicados en el diseño y en la concepción de los dispositivos electromagnéticos es lograr la descripción correcta de los fenómenos físicos que determinan su funcionamiento. Estos fenómenos pueden ser representados mediante modelos teóricos basados en las leyes fundamentales del electromagnetismo, ordenadas en las ecuaciones de Maxwell, con apropiadas condiciones de borde.

Asumiendo ciertas hipótesis es posible obtener modelos matemáticos simplificados de los modelos teóricos, válidos para un específico dispositivo electromagnético, y capaces de proveer información cualitativa y cuantitativa de su funcionamiento.

Desde un punto de vista matemático, la estimación de esos fenómenos puede reducirse a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con adecuadas condiciones de contorno. Sin embargo, el modelo teórico del dispositivo analizado debe contener información sobre las características geométricas del sistema, las características electromagnéticas del medio donde ocurren los fenómenos físicos y de las fuentes de campos. La necesidad de considerar simultáneamente todas estas características limita las soluciones analíticas directas a casos simples con escaso interés en ingeniería.

Según el tipo de problema tratado, es posible establecer más de un modelo matemático representativo considerando las condiciones de borde y adoptando una apropiada formulación matemática. Por ejemplo, en el

caso de campos electromagnéticos estacionarios o quasi-estacionarios muchas veces es posible despreciar la influencia del campo eléctrico sobre el magnético y viceversa, con lo que se pueden establecer dos modelos matemáticos independientes: uno para campos eléctricos y otro para campos magnéticos. En la ingeniería de altas tensiones interesa particularmente el caso de los campos eléctricos donde las condiciones de borde son de potencial impuesto (Dirichlet) o de campo impuesto (Neumann).

De acuerdo a la formulación matemática del campo escogido, los modelos pueden clasificarse en tres grupos:

a) diferenciales, donde el modelo matemático es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con apropiadas condiciones de contorno. Método de Diferencias Finitas FDM, Método de Elementos Finitos FEM.

b) integrales, donde el modelo presenta la forma de un sistema de ecuaciones integrales con condiciones de borde implícitas. Método de Simulación de Cargas CSM, Método de Elementos de Borde BEM.

c) estadísticos, donde la solución del modelo matemático se basa en la simulación estadística. Métodos de Montecarlo.

El diseño de los aislamientos eléctricos se basa en el conocimiento de las leyes físicas de las descargas eléctricas y de la distribución de los campos eléctricos. El conocimiento cuantitativo de la distribución de los campos constituye una etapa fundamental que puede ser resuelta utilizando algunos de los métodos mencionados.

En el pasado, para determinar la sollicitación del campo eléctrico, se emplearon métodos experimentales como el de la cuba electrolítica o el del papel semiconductor, los que fueron remplazados ventajosamente por métodos numéricos para computadoras. A diferencia de los métodos DFM y FEM, ampliamente adoptados en diversas ramas de la ingeniería, los métodos denominados integrales emplean una formulación de tipo integral para las ecuaciones de Laplace o de Poisson y el principio de superposición. Una característica ventajosa de estos métodos, respecto a los diferenciales, es que la discretización espacial se limita a regiones de contorno, como las interfaces conductor-dieléctrico o dieléctrico-dieléctrico, y que esta discretización limitada se traduce en una menor cantidad de datos de ingreso y en un sistema de ecuaciones de orden reducido. En consecuencia, y especialmente para problemas tridimensionales, utilizando estos métodos es posible obtener mayor precisión con ahorro en el tiempo de ingreso de datos, el tiempo y la memoria de cálculo.

La limitación principal de estos métodos es la dificultad para considerar problemas no-lineales. Sin embargo, las características dieléctricas de los materiales usados como aislantes en la ingeniería de alta tensión dependen poco de la intensidad del campo cuando no existen cargas espaciales, condición que normalmente es el objetivo del diseño. En el caso de los aislantes gaseosos, de amplia utilización, las propiedades dieléctricas resultan independientes de la intensidad del campo, inclusive en presencia de cargas espaciales.

Por las razones expuestas, el CSM presenta ventajas para ser implementado en microcomputadoras con modesta capacidad de cálculo y fácil utilización. En este trabajo se presenta un programa para el cálculo de campos electrostáticos en geometría tridimensional con simetría axial monodieléctrica escrito en lenguaje FORTRAN para computadoras personales.

PRINCIPIOS DEL METODO DE SIMULACION DE CARGAS (CSM)

El CSM fue implementado para el cálculo de los campos y potenciales electrostáticos en dominios tridimensionales sin simetría de rotación [1]. El método fue desarrollado posteriormente para incluir

electrodos sin simetría axial [2], para considerar la presencia de cargas espaciales y electrodos a potencial flotante [2, 3], de dieléctricos múltiples [2, 4] y el movimiento de cargas espaciales en campos variables, creadas por ionización de un aislamiento gaseoso [5].

El método de simulación de cargas se basa en el remplazo de las cargas superficiales inducidas por las fuentes en los electrodos e interfaces de dieléctricos, por un conjunto de cargas discretas "equivalentes" desde el punto de vista de la distribución del potencial, ubicadas fuera del dominio donde se calcula el campo. La posición y el tipo de cargas es predeterminado y su magnitud se calcula haciendo respetar simultáneamente las condiciones de contorno en un número de puntos igual al número de cargas "equivalentes" propuesto. La superposición del potencial de las cargas "equivalentes" debe ser igual al potencial impuesto por las fuentes en cada uno de los j puntos vecinos a los puntos de colocación y pertenecientes a la superficie de los electrodos :

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^n p(i, j) \cdot Q_i \quad (1)$$

donde Q_i es la magnitud de la carga i -ésima y $p(i, j)$ es el respectivo coeficiente de potencial que determina la contribución de esa carga en el punto j . Si el número de cargas "equivalentes" y el número de puntos de colocación son iguales, la aplicación de esta ecuación a los n puntos de contorno conduce a un sistema de n ecuaciones lineales con n cargas incógnitas:

$$[p(i, j)] \cdot [Q_i] = [\Phi_j] \quad (2)$$

Cada uno de los ($n \times n$) elementos de la matriz $[p(i, j)]$ depende únicamente de la posición relativa de la carga y del punto de contorno, así como del tipo de carga y de la permitividad del medio.

El vector $[\Phi_j]$ contiene los valores de potencial (impuesto) de los n puntos elegidos pertenecientes a la superficie de los electrodos y vecinos a los puntos de colocación de las cargas.

El vector solución del sistema lineal (2) es $[Q_i^*]$, que contiene las magnitudes de las n cargas "equivalentes" que satisfacen las condiciones impuestas.

El potencial $\Phi(P)$ y el campo $E(P)$ en cualquier punto $P(x, y, z)$ perteneciente al dominio pueden ser calculados mediante las siguientes expresiones analíticas:

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^n p(i, P) \cdot Q_i^* \quad (3)$$

$$E(P) = - \sum_{i=1}^n \text{grad } P(p(i, P)) \cdot Q_i^* \quad (4)$$

El número, tipo y posición de las cargas "equivalentes" dependen de la distribución natural de las cargas inducidas, y se eligen en función de la experiencia adquirida y de la precisión deseada.

Si bien en principio es posible elegir cargas "equivalentes" de cualquier tipo, para minimizar el orden del sistema lineal es conveniente que las mismas reproduzcan aproximadamente la distribución real de cargas sobre los electrodos y que el respectivo coeficiente de potencial y su gradiente sean simples de calcular.

En este programa se utilizan tres tipos de cargas que individualmente conservan la simetría axial en sus respectivos sistemas de referencia relativos (r, z) y cuyas expresiones analíticas explícitas del potencial y del campo son bien conocidas:

- a) Cargas puntuales.
- b) Segmentos de cargas lineales.
- c) Cargas amulares.

En la mayor parte de los problemas de interés uno de los límites del dominio es el plano de tierra (malla de puesta a tierra del Laboratorio de Altas Tensiones, malla de una estación transformadora, suelo de una línea aérea, etc.) cuya condición de contorno es de potencial impuesto, en consecuencia se puede utilizar el principio de las imágenes perfectas [6] incorporando un conjunto de cargas "equivalentes reflejadas".

Las fórmulas del coeficiente de potencial y de las componentes radial y axial del campo eléctrico son expresadas con la nomenclatura de la fig. 1.

a) Cargas puntuales:

$$p(i, P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\left(\frac{1}{a_1} \right) - \left(\frac{1}{a_2} \right) \right]$$

$$a_1 = \sqrt{r^2 + (z - z_i)^2}$$

$$a_2 = \sqrt{r^2 + (z + z_i)^2}$$

$$E_r = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon} \left[\left(\frac{r}{a_1^3} \right) - \left(\frac{r}{a_2^3} \right) \right]$$

$$E_z = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon} \left[\left(\frac{(z - z_i)}{a_1^3} \right) - \left(\frac{(z + z_i)}{a_2^3} \right) \right]$$

b) Segmentos de cargas lineales:

$$p(i, P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{(z_{i2} - z + b_1) \cdot (z_{i1} + z + b_2)}{(z_{i1} - z + c_1) \cdot (z_{i2} + z + c_2)}$$

$$E_r = - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon \cdot (z_{i2} - z_{i1}) \cdot r} \cdot \left[\frac{z - z_{i2}}{b_1} - \frac{z - z_{i1}}{c_1} - \frac{z + z_{i1}}{b_2} + \frac{z + z_{i2}}{c_2} \right]$$

$$E_z = - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon \cdot (z_{i2} - z_{i1})} \cdot \left[-1/b_1 + 1/c_1 + 1/b_2 - 1/c_2 \right]$$

c) Cargas anulares:

$$p(i, P) = \frac{1}{2\pi^2 \varepsilon} \left[\frac{K(k_1)}{d_1} - \frac{K(k_2)}{d_2} \right]$$

$$E_r = - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi^2 \varepsilon \cdot r} \cdot [A - B]$$

$$A = \left\{ \frac{[r_i^2 - r^2 + (z - z_i)^2] \cdot E(k_1) - e_1^2 \cdot K(k_1)}{d_1 \cdot e_1^2} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{[r_i^2 - r^2 + (z + z_i)^2] \cdot E(k_2) - e_2^2 \cdot K(k_2)}{d_2 \cdot e_2^2} \right\}$$

$$E_z = - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi^2 \varepsilon} \left\{ \frac{[z - z_i] \cdot E(k_1)}{d_1 \cdot e_1^2} + \frac{[z + z_i] \cdot E(k_2)}{d_2 \cdot e_2^2} \right\}$$

$$k_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{r_i \cdot r}}{d_1} \dots \dots \dots k_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{r_i \cdot r}}{d_2}$$

$$d_1 = \sqrt{(r + r_i)^2 + (z - z_i)^2} \dots \dots \dots d_2 = \sqrt{(r + r_i)^2 + (z + z_i)^2}$$

$$e_1 = \sqrt{(r - r_i)^2 + (z - z_i)^2} \dots \dots \dots e_2 = \sqrt{(r - r_i)^2 + (z + z_i)^2}$$

donde $K(k)$ y $E(k)$ son las integrales elípticas completas de primer y segundo tipo respectivamente [7].

La solución del sistema lineal (2) se obtiene mediante la inversión directa de la matriz de coeficientes o por el método de Gauss-Seidel cuando el orden de la matriz es superior a 50. La ventaja de este método iterativo es la escasa necesidad de memoria central y la simplicidad de programación [6]. Se observa que cuando el tipo de cargas equivalentes elegido genera superficies equipotenciales de forma similar a los electrodos el método no presenta problemas de convergencia.

Para apreciar la exactitud del cálculo con el vector de cargas "equivalentes" obtenido, se calcula mediante las ecs. (3) y (4) el potencial y el campo en puntos de la superficie del electrodo (puntos de control) distintos a los elegidos para la ecuación (1).

ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

El programa consta de un grupo de subprogramas divididos en tres partes, de acuerdo a la fig. 2:

1) Ingreso de datos:

1a) SIMDAT: Subprograma conversacional que permite el ingreso de datos para la simulación del sistema electrostático como el número de electrodos, las coordenadas relativas de los puntos de contorno de cada electrodo, el tipo y el número de cargas, los puntos de control, las condiciones de borde, la precisión del cálculo.

1b) CREA: Subprograma conversacional que genera las coordenadas de los puntos del dominio donde se desea calcular el potencial y el campo, por ejemplo se pueden ingresar directamente las coordenadas de los puntos de cálculo o generar líneas segmentadas y/o mallas pertenecientes a un plano cualquiera del dominio. Este subprograma permite generar puntos de cálculo en forma masiva (decenas de miles) y luego seleccionar automáticamente aquellos que pertenecen al dominio.

2) Simulación de cargas SIMPUxx: con los datos ordenados y procesados por SIMDAT se determinan las coordenadas de las cargas, los coeficientes de potencial y su gradiente, las coordenadas absolutas de los puntos de contorno, se resuelve el sistema de ecuaciones (2), se calcula el valor de las cargas "equivalentes", se calcula el potencial y las componentes del vector campo en los puntos de control. A partir de los puntos generados por CREA se calcula el campo y el potencial en el dominio. Estos datos con sus correspondientes coordenadas son volcados en un archivo para la explotación de los resultados. Como opción se puede calcular las líneas de fuerza del campo eléctrico a partir de puntos elegidos en los electrodos. Para esto se calcula el vector campo en dichos puntos, luego se genera un segmento en la dirección del vector para determinar las coordenadas del nuevo punto de cálculo del campo. Repitiendo el procedimiento para cada punto así determinado y adoptando una ley de variación de la magnitud del segmento en función del gradiente del módulo del campo, se determinan los puntos que definen las líneas de fuerza del campo electrostático.

3) Explotación de los resultados: los valores calculados pueden ser visualizados trazando curvas equipotenciales, de igual intensidad de campo o los tubos de flujo. Esto se consigue utilizando alguno de los programas comerciales de dibujo o de presentación de resultados del tipo Autocad™, Surfer™ o similares. El subprograma SIMGRAD convierte los resultados calculados en la etapa 2) en datos de ingreso para un programa comercial de graficación.

La distribución del campo eléctrico es fundamental para el diseño de los aislamientos; estos resultados combinados con las leyes físicas de ionización permiten calcular la probabilidad de formación de la descarga con tensiones de tipo impulsivo [8, 9]. Utilizando este programa asociado a un programa de cálculo del "volumen crítico" escrito en el entorno Mathcad™ o Maple™ es posible determinar la probabilidad de formación del efecto corona impulsivo [10].

RESULTADOS

Para mostrar la potencialidad del programa implementado se han calculado las distribuciones de potencial y de campo en tres casos muy distintos: un equipo de alta tensión, una configuración con campos casi uniformes y otra con campos muy desuniformes.

En el cabezal externo de un capacitor patrón, para 300 kV, aislado interiormente en gas comprimido de 211 cm de altura se ha diseñado un equalizador toroidal que reduce la intensidad del campo a valores inferiores a 18 kV/cm. Las figs. 3a) y 3b) muestran las distribuciones equipotenciales y equicampos sin toroide para 100 kV y las figs. 3c) y 3d) el resultado con el toroide calculado. La simulación se ha realizado con cuatro

electrodos, 52 y 88 cargas sin y con ecualizador, respectivamente. El tiempo aproximado de ingreso de datos y obtención de resultados fue de cinco horas.

Las figs. 4 muestran las curvas calculadas entre dos electrodos esféricos de 250 mm de diámetro de un electrodo de medición de alta tensión [11] con eje vertical. Para la simulación fueron necesarias 98 cargas (2 cargas puntuales, 24 segmentos, 72 anillos). El tiempo total necesario para calcular las curvas de fig. 4 fue de tres horas. En las figs. 5 se ha dibujado la superficie de intersección del volumen crítico con el plano que contiene el eje de simetría, para tres tensiones diferentes. Las líneas de puntos son las líneas de fuerza del campo eléctrico calculadas mediante el programa presentado. El volumen fue calculado a partir de las líneas de fuerza aplicando el concepto de formación de un streamer [8, 9].

El caso de campo muy desuniforme corresponde a un sistema de electrodos punta-plano de eje vertical y 100 cm de distancia, con un electrodo cilíndrico de 13 cm de diámetro y 40 cm de largo, terminado en un cono de 2 mm de radio y un ángulo de 15° sobre el eje. Las figs. 6 muestran el detalle de las curvas equipotenciales y equicampos en proximidades del vértice del cono. En este caso se utilizaron 48 cargas y un tiempo (ingreso de datos, cálculo y graficación) de dos horas y media aproximadamente.

Las figs. 7 corresponden a la proyección del volumen crítico con tres valores de tensión positiva calculados utilizando el software Mathcad. La comparación de las curvas equipotenciales obtenidas con un programa de elementos finitos muestran que no existen diferencias apreciables [10].

CONCLUSIONES

Se ha implementado un programa basado en el método de simulación de cargas CSM para computadoras personales. El programa permite obtener rápidamente las distribuciones de potenciales y de campos electrostáticos, así como las líneas de fuerza en problemas tridimensionales con simetría axial. Los subprogramas de ingreso de datos y de preparación de los resultados para la visualización mediante programas comerciales permiten un sustancial ahorro de tiempo para la simulación y la utilización de los resultados en el diseño de los aislamientos. Las facilidades obtenidas muestran la conveniencia de extender el procedimiento para considerar los casos de dominios tridimensionales sin simetría axial.

Agradecimiento: Los autores agradecen la colaboración del Sr. Pablo Ruiz en la preparación de las figuras.

REFERENCIAS

- [1] Steinbigler H., "Anfangsfeldstärken und Ausnutzungsfaktoren rotationssymmetrischer Elektrodenanordnungen in Luft", Thesis, Technische Hochschule, München, 1969.
- [2] Singer H., Steinbigler H., Weiss P., IEEE Trans.PAS-93, 1974, PAS 93, pp. 1660-1668.
- [3] Minard S., "Calcul de champ électrique et de potentiel avec charges d'espace, note M/82-495. Direction des Etudes et Recherches/SIMA, Electricité de France, 1973.
- [4] Gregoire J.P., "Calcul de champ électrostatique en présence de diélectriques", HI/2370-02, Direction des Etudes et Recherches/DTIEM/SIMA, EDF, 1977.
- [5] Díaz R., "Notice d'utilisation du programme MCD (simulation du mouvement des charges d'espace)", HM/84-956, 15 pág., Direction des Etudes et Recherches/LEHT/ERMEL, EDF, France, 1985.
- [6] Durand E., "Electrostatique II", Masson, 1966.
- [7] Bowman F., "Introduction to Elliptic Functions", J. Wiley & Sons, N.Y., 1953.
- [8] Les Renardières Group, ELECTRA 35, pp. 77, 1974.
- [9] Díaz R., "Los aislamientos aéreos en los sistemas eléctricos. Fundamentos para el cálculo", Revista Electrotécnica-AEA, Vol. 1/2, Argentina, pp.7- 20, 1991.
- [10] Díaz R., Tagashira R., "Contribution to impulse first corona in inhomogeneous field", presentación al IX International Symposium on High-Voltage Engineering, Graz, 1995.
- [11] IEC 52, "Recommendations for voltage measurement by means of sphere-gaps", Publicación de la Comisión Electrotécnica Internacional.

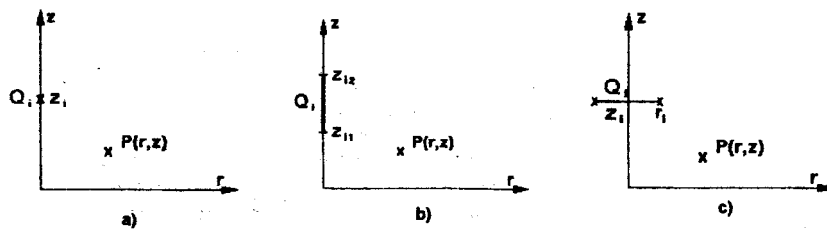


Fig. 1- Simulación discreta de cargas para el cálculo de campos.

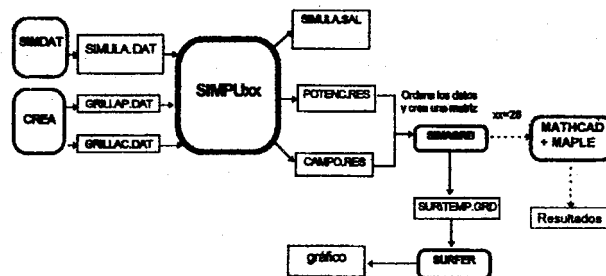


Fig. 2- Estructura del programa.

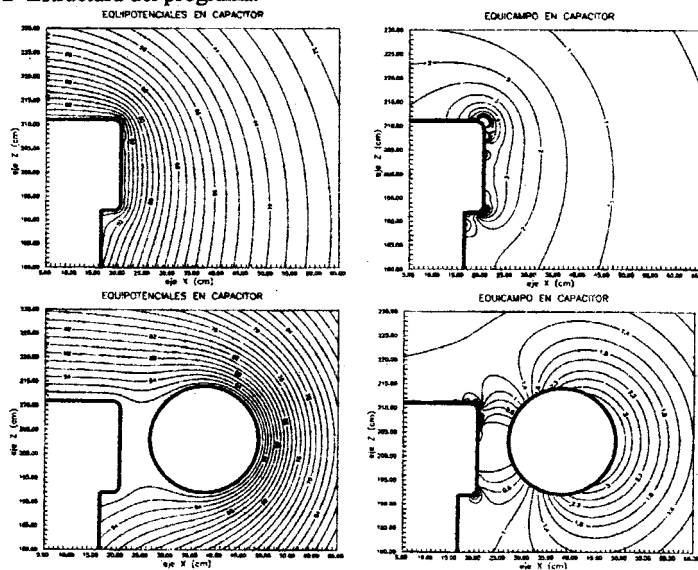


Fig. 3- Cabezal de capacitor sin y con equalizador.

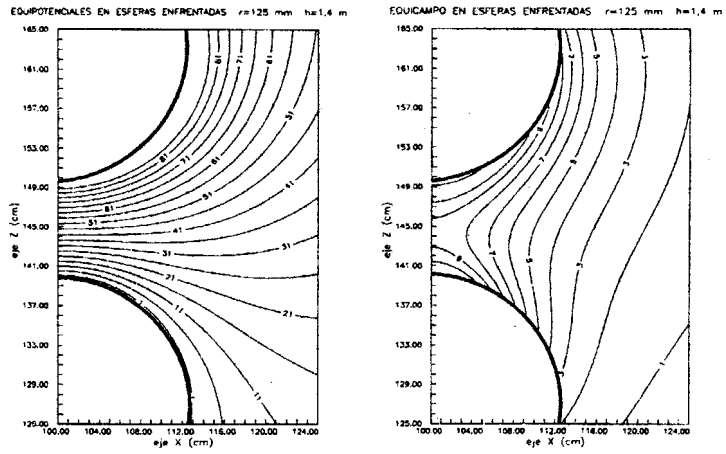


Fig. 4- Electrodo esférico. Equipotenciales y equicampos para $U = 100$ kV.

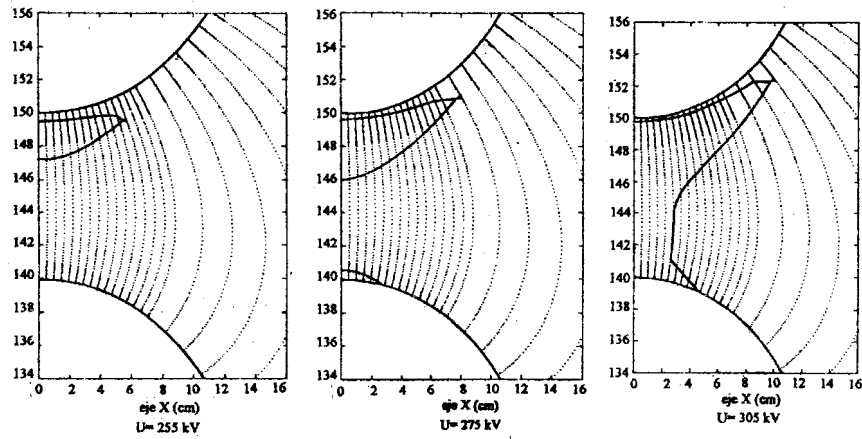


Fig. 5- Electrodo esférico. Líneas de campo y volumen crítico.

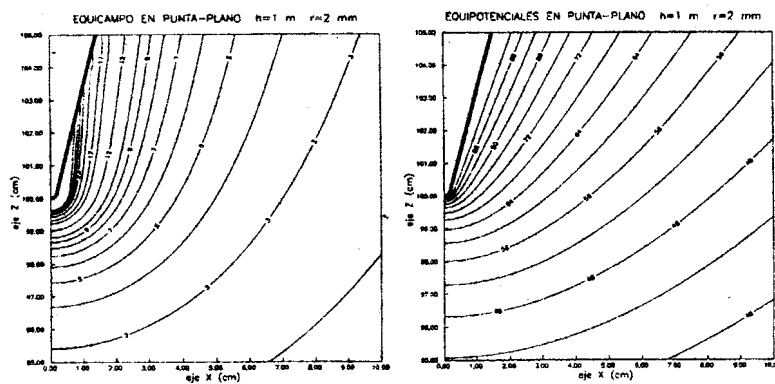


Fig. 6- Electrodo punta-plano. Equipotenciales y equicampos para $U = 100\text{ kV}$.

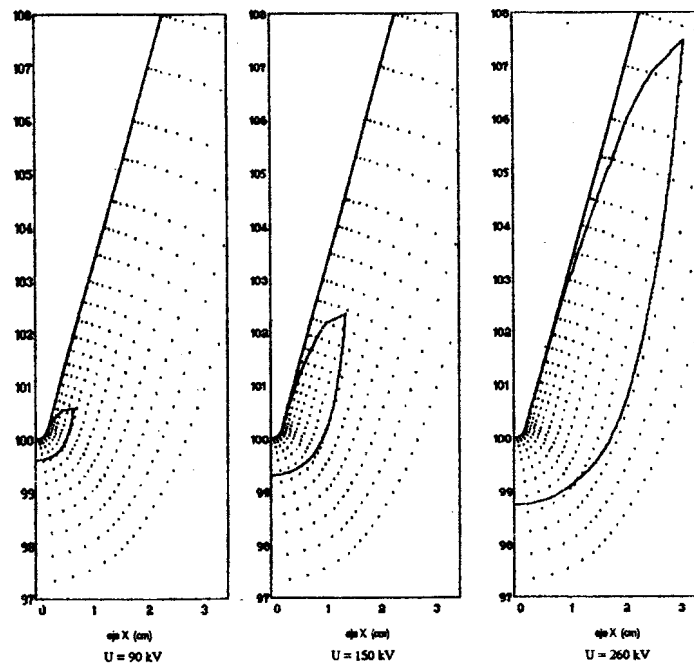


Fig. 7- Electrodo punta-plano. Líneas de campo y volumen crítico.