



Modelación de Flujos Bifásicos con Sólidos en Suspensión

Walter E. Legnani

Instituto de Cálculo
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
e-mail: walter@ulises.ic.fcen.uba.ar
Ciudad Universitaria (1428) - Buenos Aires, Argentina

Abstract

In this work the dynamics of the suspended load in steady and uniform open channel flow is modeled. The model assumes that the two-phase flow can be approximated by the one-phase flow, the sediment-fluid mixture. The partial differential equations that govern the model are solved by a finite difference scheme based on the Lax-Wendroff method. Finally results of numerical experiments and conclusions are showed.

Resumen

En este trabajo se modeliza la dinámica de los sedimentos en suspensión en un flujo estacionario y uniforme en canales abiertos. El modelo supone que el flujo bifásico puede ser aproximado por uno monofásico de un fluido mezcla, formado por el sedimento más el líquido. Las ecuaciones en derivadas parciales que gobiernan el modelo se resuelven por un esquema en diferencias finitas basado en el método de Lax-Wendroff. Finalmente los resultados de los experimentos numéricos se exhiben junto con las conclusiones del trabajo.

Ecuaciones de Movimiento

Sea un flujo sobre canales abiertos, bidimensional, que transporta en suspensión a la especie particulada de algún sólido de densidad (ρ_s). Se supondrá que tanto la mezcla como el fluido son incompresibles.

Las paredes del canal pueden considerarse móviles o en algún caso rígidas, pero el lecho se tomará plano; esto es para evitar sutilezas en el accionar de las fuerzas de fricción entre éstos y el fluido mezcla.

Para la densidad del fluido mezcla se adoptará la siguiente expresión:

$$\rho_m = \rho_f (1 - C) + \rho_s C \quad (1)$$

donde ρ_m es la densidad del fluido mezcla, C y ρ_s son la concentración y densidad del sólido suspendido respectivamente.

La expresión (1) ha sido utilizada con éxito por Erling Navntoft [1] entre otros, siendo éste un fuerte respaldo para su aplicación al presente modelo.

Siguiendo con la expresión (1) estamos representando al fluido mezcla bifásico por un fluido de una fase con gradientes de densidad.

Como siguiente paso tomemos la expresión anterior, la introduciremos en las ecuaciones de Navier Stokes en dos dimensiones espaciales:

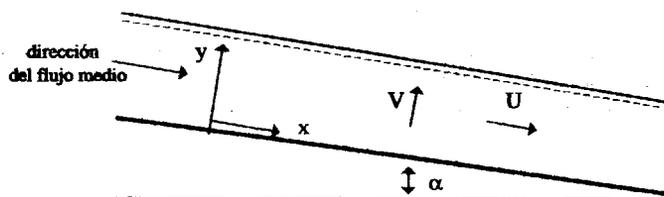
$$\rho_m \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right\} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_m g \operatorname{sen}(\alpha) + \mu_m \nabla^2 U \quad (2)$$

$$\rho_m \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right\} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho_m g \cos(\alpha) + \mu_m \nabla^2 V \quad (3)$$

donde U y V son las velocidades medias de la mezcla en las direcciones de escurrimiento y vertical respectivamente, P es la presión, g la aceleración de la gravedad, t es el tiempo, x y y son las coordenadas espaciales respectivamente en la dirección horizontal y vertical, α es el ángulo subtendido por el lecho del canal con la horizontal y μ_m es la viscosidad del fluido mezcla.

Las ecuaciones (2) y (3) representan la conservación del impulso en las direcciones del modelo (x horizontal, y vertical), en concordancia con la siguiente figura:

Figura N°1



Esquema de la orientación de los ejes de coordenadas para las definiciones de las ecuaciones (2) y (3)

Para seguir completando el modelo se deben incluir una ecuación de conservación de la masa fluida de la mezcla más una de la cantidad de sólido en el sistema más una última ecuación para la velocidad de precipitación de los granos de la especie particulada.

Siguiendo entonces incorporemos las ecuaciones de conservación restantes:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_m V)}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(CU)}{\partial x} + \frac{\partial(CV)}{\partial y} - \frac{\partial(CW)}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

en donde W es la velocidad de precipitación de los granos del sólido en suspensión.

La ecuación (4) no es más que la conservación de la masa líquida de la mezcla y la expresión (5) es la conservación de la especie particulada en suspensión.

Para la velocidad de precipitación son muy conocidas expresiones que la fijan como constante dependiendo de las características físicas de los granos, por ejemplo ecuaciones de la forma:

$$W = f(C_d, g, d, S_s) \quad (6)$$

siendo C_d el coeficiente de arrastre del agua, g la gravedad, d el diámetro de las partículas y S_s la gravedad específica (ver por ejemplo Raudkivi [2])

En el presente modelo en cambio se propone una dependencia en la que además de incluirse los parámetros anteriores también entre en juego la concentración de la especie particulada.

En este sentido hoy en día sabemos que se han fijado con éxito relaciones funcionales que tienen la forma:

$$W = f(C_d, g, d, S_s, C)$$

Para tal fin se estudio por separado el comportamiento de la siguiente expresión:

$$W=W_0(1-C)^\beta \quad (7)$$

donde W_0 es la velocidad de caída de un solo grano, C en la concentración de la suspensión, y β es un parámetro que depende del número de Reynolds ($Re=W^*d/\mu$) y del tamaño de grano adimensional D^* definido como sigue:

$$D^* = \left(\frac{\Delta \rho g d^3}{\rho_f \mu^2} \right)^{1/3} \quad (8)$$

en donde: $\Delta \rho = (\rho_s - \rho_f)$.

En base a los estudios realizados en etapas previas (sobre Raudkivi [2], Kuhnle [3] y [4]) se encuentra que si $D^* < 40$ entonces el valor de β es igual a 4.65 y bajo estas condiciones se efectuaron los experimentos numéricos del presente trabajo.

Existen muchas fórmulas de toda índole para hallar el valor de β en función de D^* que se hallan ampliamente difundidas en la literatura que estudia a las suspensiones, pero dado todo el estudio previo el modelo se construye en base a la expresión (7) y siguientes.

Las ecuaciones (2) y (3) pueden ser reescritas con la ayuda de la ecuación (4) y ciertas aproximaciones, en forma de ley de conservación. Para esto a la ecuación (2) se le suma la ecuación (4) multiplicada por U y a la ecuación (3) se le suma la ecuación (4) multiplicada por V y reagrupando adecuadamente se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + f_x + \mu \nabla^2 U = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + f_y + \mu \nabla^2 V = 0 \quad (10)$$

en donde $Q = U^* \rho_m$, $P = V^* \rho_m$, $F = Q^2/\rho_m + P_d$, $G = Q^*P/\rho_m$, $M = P^2/\rho_m + P_d$, siendo P_d la presión dinámica del sistema, $f_x = g^* \rho_m^* \sin(\alpha)$ y $f_y = g^* \rho_m^* \cos(\alpha)$.

Si de ahora en más suponemos que los gradientes de presión son aproximadamente paralelos a los de densidad (por ejemplo ambos paralelos y de sentido opuesto a la dirección positiva del eje y) y que dentro del rango de concentraciones C con el que se trabaja se puede despreciar el efecto de la viscosidad, la misma se puede expresar como:

$$\frac{\mu_{suspensión}}{\mu_{líquido}} = (1+k) + (1+2k)K_1 C + (1+3k)K_1 C + \dots \quad (11)$$

donde $k = Cte * (\rho_m - \rho_f) / \mu$, con Cte una constante experimental y K_1 es un factor de forma de los granos del sólido que para el caso de partículas esféricas vale 2.5.

De esta última expresión se obtiene como conclusión que la viscosidad de la suspensión por más que se modifique por la presencia de las partículas suspendidas es así y todo por lo menos dos órdenes de magnitud menor que cualquiera de los términos restantes.

Con estas aproximaciones las ecuaciones que representan matemáticamente el modelo son entonces:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + f_x = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + f_f = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(CU)}{\partial x} + \frac{\partial(CV)}{\partial y} - \frac{\partial(CW)}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

$$\rho_m = \rho_f(1-C) + \rho_s C \quad (15)$$

$$W = W_0(1-C)^{\beta} \quad (16)$$

El conjunto de ecuaciones (12), (13), (14), (15) y (16) es la base matemática del modelo propuesto. Este se resuelve numéricamente por medio de un esquema en diferencias finitas tipo Lax - Wendroff con ciertas modificaciones por la forma que posean las ecuaciones (12) y (13), esto se puede resumir así para los dos pasos del esquema, el primero predictor y el segundo corrector:

Paso predictor:

$$Q1(i,j) = 0.25 * (Q0(i+1,j) + Q0(i-1,j) + Q0(i,j+1) + Q0(i,j-1)) - (\Delta t/2 * \Delta x) * (FQ1(i+1,j) - FQ1(i-1,j)) - (\Delta t/2 * \Delta X) * (G1(i,j+1) - G1(i,j-1)) - \Delta t * PX1$$

$$P1(i,j) = 0.25 * (P0(i+1,j) + P0(i-1,j) + P0(i,j+1) + P0(i,j-1)) - (\Delta t/2 * \Delta x) * (FP1(i,j+1) - FP1(i,j-1)) - (\Delta t/2 * \Delta X) * (G1(i+1,j) - G1(i-1,j)) - \Delta t * PY1$$

$$C1(i,j) = 0.25 * (C0(i+1,j) + C0(i-1,j) + C0(i,j+1) + C0(i,j-1)) - (\Delta t/2 * \Delta x) * (CQ1(i+1,j) - CQ1(i-1,j)) - (\Delta t/2 * \Delta X) * (CP1(i,j+1) - CP1(i,j-1))$$

$$\rho1(i,j) = \rho_f * (1 - C1(i,j)) + \rho_s C1(i,j)$$

$$W1(i,j) = W_0 * (1 - C1(i,j))^{\beta}$$

siendo: $Q0(i,j) = U0(i,j) * \rho_m0(i,j)$, $P0(i,j) = V0(i,j) * \rho_m0(i,j)$, $G1(i,j) = Q0(i,j) * P(i,j) / \rho_m0(i,j)$
 $FQ0(i,j) = Q0(i,j)^2 / \rho_m0(i,j) + \rho_m0(i,j) * g * H$, siendo H la altura del fluido mezcla,

$$CQ0(i,j) = U0(i,j) * C0(i,j), CP0(i,j) = V0(i,j) * C0(i,j),$$

Paso corrector:

$$Q(i,j) = Q0(i,j) - (\Delta t/\Delta x) * (FQ(i+1,j) - FQ(i-1,j)) - (\Delta t/\Delta X) * (G(i,j+1) - G(i,j-1)) - \Delta t * PX$$

$$P(i,j) = P0(i,j) - (\Delta t/\Delta x) * (FP(i,j+1) - FP(i,j-1)) - (\Delta t/\Delta X) * (G(i+1,j) - G(i-1,j)) - \Delta t * PY$$

$$C(i,j) = C0(i,j) - (\Delta t/\Delta x) * (CQ(i+1,j) - CQ(i-1,j)) - (\Delta t/\Delta X) * (CP(i,j+1) - CP(i,j-1))$$

$$\rho(i,j) = \rho_f * (1 - C(i,j)) + \rho_s * C(i,j)$$

$$W(i,j) = W_0 * (1 - C(i,j))^\beta$$

siendo: $Q(i,j) = U(i,j) * \rho_m(i,j)$, $P(i,j) = V(i,j) * \rho_m(i,j)$, $G(i,j) = Q1(i,j) * P1(i,j) / \rho_m1(i,j)$

$FQ(i,j) = Q1(i,j)^2 / \rho_m1(i,j) + \rho_m1(i,j) * g * H$, siendo H la altura del fluido mezcla,

$CQ(i,j) = U1(i,j) * C1(i,j)$, $CP1(i,j) = V1(i,j) * C1(i,j)$,

Estas últimas expresiones que no son más que el esquema en diferencias del sistema de ecuaciones (12) a (16), se implementaron en un código numérico desarrollado en Fortran 77

Experimentos Numéricos

Los experimentos numéricos se efectuaron sobre mallas con cantidad de nodos variables que iban de los 100 a 200 elementos.

Para garantizar la estabilidad numérica se planteo una condición tipo Courant de la forma:

$$(|U|+c) \frac{\Delta t}{\Delta X} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

donde U es la velocidad media del fluido y c es la velocidad adiabática de propagación del sonido. (para una discusión sobre este particular ver Richtmyer R. and Morton K. [5])

Para garantizar el cumplimiento de la expresión (17) se trabajo con valores de $\Delta t/\Delta X$ que fueron 30 o más veces menores, con $\Delta x = \Delta y = \Delta X$ para los pasos espaciales.

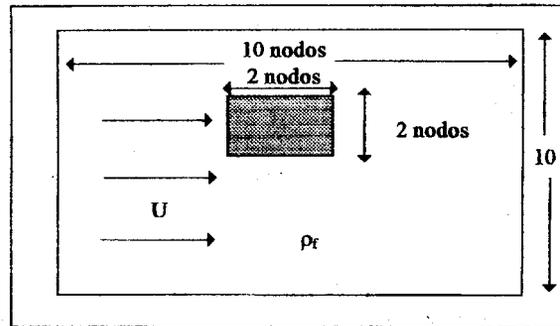
Típicamente se empleo un rango acotado por

$$\frac{\Delta t}{\Delta X} < 0.01 \quad (18)$$

A continuación se muestran resultados de uno de los experimentos numéricos concretados en el cual se estudió la dispersión de una pequeña nube del fluido mezcla liberado en un campo de velocidades homogéneo de 0.5 m/s en la dirección de escurrimiento y sin velocidad del fluido en la vertical.

La condición inicial del problema lo podemos ver en la siguiente figura:

Figura N° 2



Disposición física de los experimentos numéricos

La zona sombreada corresponde al sitio del vertido del fluido mezcla

La concentración inicial C para la nube del sólido suspendido es de 0.1 y la densidad es de 2650 Kg/m^3 .

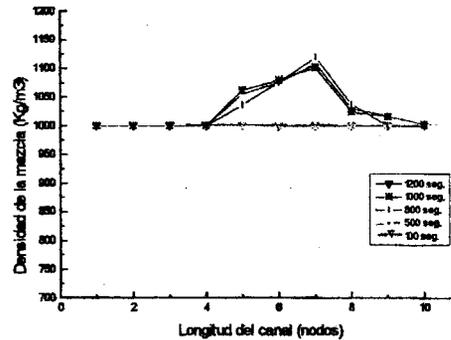
La velocidad inicial de caída de los granos se supone igual a cero, es decir caen en caída libre desde la nube que contiene al sólido suspendido y su trayectoria se ve afectada por el arrastre del fluido en la dirección media del escurrimiento.

Para la expresión que fija la velocidad de precipitación de los granos es preciso determinar el valor de la velocidad de caída de un solo grano que se vera luego disminuida por las presencia de los restantes, en este sentido y habiendo estudiado por separado este problema en particular, se llegó a que para partículas con el diámetro D^* como el tratado anteriormente W_0 debería ser de .06 a 0.1 m/s dependiendo del valor del diámetro de los granos y del número de Reynolds de la mezcla.

Con estos valores se realizaron diversos experimentos numéricos que arrojaron los resultados que se exhiben a continuación.

Para la densidad de la mezcla se obtuvo la siguiente forma para su evolución a lo largo del canal luego de precipitar desde la nube que la contenía, en la figura 3.

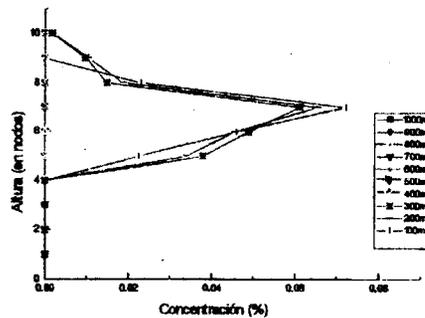
Figura N° 3



Evolución para diferentes alturas del canal de la densidad de la mezcla

Otra forma de ver como se transporta el sólido suspendido es ver como evoluciona la concentración de la especie particulada arrastrada por el líquido, en este sentido se exhibe en la siguiente figura cómo varió con el tiempo y en la altura del canal el valor de dicha concentración:

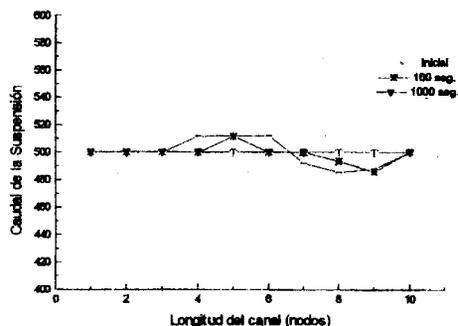
Figura N° 4



Perfil de propagación del sólido suspendido

Para el caudal de la especie fluida tenemos el siguiente gráfico que nos muestra cómo progresa en el tiempo y a lo largo del canal $Q(i,j)$ siendo éste el definido con las ecuaciones discretizadas del modelo.

Figura N°5



Evolución del caudal $Q=U*\rho_f$ a lo largo del canal y en el tiempo

Conclusiones

- 1 - Se puede aproximar un flujo bifásico por uno monofásico teniendo en cuenta la presencia de las dos especies que lo componen.
- 2 - El modelo trata sobre un conjunto de problemas de gran interés científico y tecnológico pues fluidos que transportan sólidos en suspensión se encuentran reiteradamente en la naturaleza.
- 3 - Existen detalles muy importantes a tener en cuenta cuando se realizan los experimentos numéricos dado que en la interface entre el líquido y el fluido mezcla se desarrollan inestabilidades que por un lado son de naturaleza numérica propias del esquema explícito utilizado y por otro tienen origen en la forma que adopta la presión dinámica.
- 4 - El siguiente paso es incorporar el efecto de la turbulencia en la velocidad de caída de los granos del sólido dado que todo este trabajo supone un régimen laminar, y la expresión de W cambiará dramáticamente cuando se considere este efecto.
- 5 - El comportamiento newtoniano del fluido mezcla está asegurado pues con valores de concentración menores que 0.1 el comportamiento no newtoniano no se manifiesta para los tamaños de grano utilizados.

Bibliografía

- [1] Erling Navntoft.
A theory of the velocity and suspended load distribution in a two dimensional steady and uniform open channel flow.
The Danish Center For Applied Mathematics and Mechanics.
Report N° 3, July 1970.

- [2] Raadkivi A. J.
Loose Boundary Hydraulics.
Pergamon Press, 1990.

- [3] Kuhnle Roger
Incipient Motion of Sand Gravel Sediment Mixtures.
Journal of Hydraulics Engineering, Vol 119, N° 12, 1993.

- [4] Kuhnle R. , Joe C. and Andrew J. B.
Total Sediment Load Calculations for Goodwin Creek
Sediment transport modelling proceeding International Symposium/Hy Div. ASCE.
New Orleans, LA/ August 14-18, 1989.

- [5] Richtmyer R. and Morton K.
Difference Methods for Initial Value Problems.
Interscience Publishers, 1967.

Agradecimientos

El autor desea expresar su agradecimiento por la participación del *Dr. Pablo Jacovkis* quien realizó un valioso aporte en la realización del presente trabajo.