

ANÁLISIS COMPARATIVO DE MÉTODOS DE ESTIMACIÓN ESPECTRAL PARA LA DETERMINACIÓN DE PROFUNDIDAD AL BASAMENTO MAGNÉTICO EN EXPLORACIÓN GEOFÍSICA

Natalia V. Maltagliatti* y Claudia L. Ravazzoli†

*Carrera de Geofísica, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata, Paseo del Bosque S/N, 1900, La Plata, Argentina,

†Departamento de Geofísica Aplicada, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata y CONICET,
email: claudia@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar

Palabras Claves: estimación espectral, máxima entropía, Geofísica.

Key Words: power spectrum estimation, maximum entropy, Geophysics.

Abstract.

Bajo determinadas condiciones, se ha demostrado que los espectros de potencias de las anomalías magnéticas de intensidad total permiten estimar la profundidad media de las rocas magnéticas del basamento. Esto resulta de especial importancia en la determinación de espesores y delimitación de cuencas sedimentarias, lo que tiene aplicación en el campo de la exploración geofísica para hidrocarburos.

En el presente trabajo se abordará el problema de estimación de profundidades analizando y comparando los resultados obtenidos a partir de datos (anomalías) sintéticos, utilizando los métodos de periodogramas suavizados y de máxima entropía.

Del análisis paramétrico de las mejores estimaciones alcanzadas con los diferentes métodos para profundidades, espesores y espaciamiento de datos variables se establecen conclusiones y criterios prácticos para aplicar la metodología descrita a datos reales.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo del espectro de potencias discreto asociado a distintas clases de datos reales ha recibido la atención de numerosos autores por constituir una herramienta de utilidad para el análisis e interpretación de los mismos. Dentro del contexto de la exploración geofísica, se ha demostrado que bajo determinadas condiciones los espectros de las anomalías magnéticas de intensidad total permiten estimar la profundidad media de las rocas magnéticas. Esto es de especial interés en el estudio de cuencas sedimentarias en las que las rocas suprayacentes tienen susceptibilidades magnéticas muy inferiores a las de las rocas que constituyen el basamento, por tener estas últimas altos contenidos de minerales ferromagnéticos. Por lo tanto, las anomalías magnéticas observadas en este tipo de ambiente se asocian al basamento, lo que permite extraer datos útiles acerca del mismo. En particular, conocer la profundidad al basamento y el espesor sedimentario es muy importante en estudios geológicos, geodinámicos y en el campo de la exploración y prospección de hidrocarburos.

Distintos autores han analizado la determinación de profundidades a las *fuentes magnéticas* mediante técnicas espectrales, entre los que podemos mencionar Treitel et al. (1971),¹ Spector & Grant (1970),² Cassano & Roca (1975),³ Blakely & Hassanzadeh (1981)⁴ y más recientemente Garcia-Abdeslem & Ness (1994),⁵ Blakely (1996),⁶ Ghidella (1997)⁷ y Naidu & Mathew (1998).⁸ En general estos métodos suponen que el vector magnetización varía espacialmente en forma aleatoria, comportamiento asociado a la complejidad y no uniformidad de las propiedades magnéticas de las rocas y en ciertos casos a las inversiones de polaridad del campo magnético.

La determinación precisa de las profundidades hace necesario calcular el espectro de potencias de las anomalías medidas con la mayor exactitud posible. En el presente trabajo se analizarán los resultados obtenidos a partir de datos sintéticos, utilizando *periodogramas suavizados* con diferentes ventanas espectrales, diseñadas de modo tal que la varianza de la estimación espectral suavizada resulte menor que la varianza del periodograma crudo. Por otro lado, se utilizarán métodos de *máxima entropía* analizando la mejor estimación alcanzada para distintas longitudes del operador de predicción. Para un modelo de magnetización de distribución gaussiana se comparan los resultados obtenidos con ambas técnicas, observando además la influencia de parámetros tales como el espaciamiento y longitud del segmento de datos, el espesor y la profundidad al estrato magnetizado.

Como conclusión de este trabajo con datos sintéticos se espera establecer criterios que permitan aplicar la metodología descripta a la estimación de profundidades confiables a partir de datos reales.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y MODELO TEÓRICO

Analizaremos la anomalía magnética asociada a una capa horizontal magnetizada de la corteza. La misma se considera de extensión infinita y de espesor constante, con tope a una profundidad z_1 , base a una profundidad z_2 y espesor $d = z_2 - z_1$, de acuerdo con el esquema de la Figura 1. La capa está compuesta por una serie de diques verticales cuya magnetización

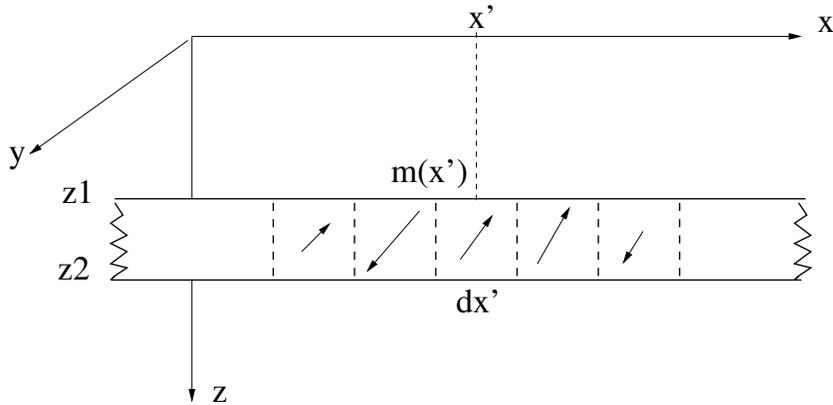


Figura 1: Modelo de placa infinita bidimensional de magnetización variable según x .

m tiene una dirección constante pero módulo y sentido variables. Nuestro trabajo se basa entonces en un modelo de fuente bidimensional, en el cual la magnetización varía solamente en la dirección x y por lo tanto será aplicable sobre perfiles.

2.1. Anomalías magnéticas en el dominio espacial

Analizamos la anomalía magnética escalar de intensidad total T^d generada en un punto $M(x, y, z)$ por un dique vertical infinitesimal de extensión infinita según la dirección y , centrado en x' , cuya magnetización no varía según las variables y, z . Recordemos que dicha anomalía se define como la proyección del correspondiente vector anómalo según la dirección del campo magnético principal del lugar y para este caso resulta:⁴

$$T^d(M, x') = m(x') g(x - x', z) dx', \quad (1)$$

donde

$$g(x, z) = 2[g_1(x, z) P + g_2(x, z) Q], \quad (2)$$

$$P = \cos A \cos(C - B) \cos I \cos(C - D) - \sin A \sin I,$$

$$Q = \sin A \cos(C - D) \cos I + \cos A \cos(C - B) \sin I,$$

siendo A el ángulo que el vector magnetización forma con el plano horizontal, B el ángulo que forma la proyección horizontal de este vector con el norte geográfico y C el acimut del perfil (eje x) con el norte geográfico.⁹ Las funciones g_1 y g_2 están dadas por

$$g_1(x, z) = \frac{(z_2 - z)}{(z - z_2)^2 + x^2} - \frac{(z_1 - z)}{(z - z_1)^2 + x^2}, \quad (3)$$

$$g_2(x, z) = \frac{x}{(z - z_2)^2 + x^2} - \frac{x}{(z - z_1)^2 + x^2}. \quad (4)$$

Para obtener la anomalía total de la placa infinita en el punto x integramos a lo largo del intervalo ocupado por las masas magnéticas, resultando el modelo convolucional⁴

$$T(M) = \int_{-\infty}^{\infty} m(x') g(x - x', z) dx'. \quad (5)$$

2.2. Espectro de potencias teórico para un modelo de magnetización aleatoria

La expresión convolucional (5) puede transformarse al dominio de los números de onda k_x mediante su Transformada de Fourier (TF_x) en la variable x resultando:

$$\widehat{T}(k_x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x, z) e^{-i k_x x} dx = \widehat{M}(k_x) \widehat{G}(k_x, z), \quad (6)$$

siendo \widehat{T} , \widehat{M} y \widehat{G} las respectivas transformadas (asumiendo que existen) y donde

$$\widehat{G}(k_x, z) = 2\pi (P - i \operatorname{sig} k_x Q) e^{|k_x|z} (e^{-|k_x|z_2} - e^{-|k_x|z_1}). \quad (7)$$

Siguiendo las ideas de Blakely & Hasaanzadeh^{1,4} en este punto introducimos la hipótesis de que el vector magnetización de la capa tiene dirección constante pero su módulo y sentido varían aleatoriamente según la dirección x , admitiendo inversiones laterales de polaridad. Este comportamiento se asocia a la complejidad y no uniformidad de las propiedades magnéticas de las rocas y en ciertos casos a las inversiones de polaridad del campo magnético principal terrestre. Aunque esta descripción en principio puede parecer poco realista, se debe tener en cuenta que en aplicaciones prácticas esto puede interpretarse como una cuestión de escalas, pues al trabajar con variables discretas dentro de un intervalo de muestreo espacial la magnetización es una constante.⁴

El comportamiento no-determinístico de la función $m(x)$ puede implicar el no cumplimiento del requerimiento de *energía finita* necesario para su representación mediante Transformada de Fourier. Por lo tanto, bajo esta suposición, la existencia de \widehat{M} y por ende de \widehat{T} no está estrictamente asegurada. Sin embargo, como la autocorrelación (o autocovarianza) de las funciones aleatorias tiene energía finita, su transformada está definida. Luego, de la relación de Wiener-Khinchin,^{10,11} puede obtenerse el *espectro de potencias* (o *densidad espectral*) de las anomalías magnéticas \widehat{P}_T , mediante la Transformada de Fourier de su autocorrelación C_{TT}

$$\widehat{P}_T(k_x, z) = |\widehat{T}(k_x, z)|^2 = TF_x \{C_{TT}(x)\} = |\widehat{M}(k_x)|^2 |\widehat{G}(k_x, z)|^2, \quad (8)$$

donde de (7)

$$|\widehat{G}(k_x, z)|^2 = \Theta^2 e^{2|k_x|z} e^{-2|k_x|z_1} \{e^{-|k_x|d} - 1\}^2, \quad (9)$$

y hemos denominado $\Theta^2 = 4\pi^2(P^2 + Q^2)$.

Suponiendo que la magnetización $m(x)$ puede representarse mediante un modelo de ruido blanco con media cero y desviación estándar σ , su espectro de potencias es una constante independiente de k_x ^{4,12}

$$|\widehat{M}(k_x)|^2 = TF_x \{C_{mm}(x)\} = \sigma^2, \quad (10)$$

donde C_{mm} es su autocorrelación. Luego, tomando logaritmo natural a ambos miembros en (8) y usando (9) y (10), llegamos a:

$$\ln \widehat{P}_T(k_x, z) = A_P - 2 |k_x|(z_1 - z) + 2 \ln \{e^{-|k_x|d} - 1\}, \quad (11)$$

siendo $A_P = \ln \{\sigma^2 \Theta^2\}$. De (11) resulta que cuanto mayor es el espesor d , el logaritmo del espectro de la anomalía se aproxima cada vez más a una recta de pendiente negativa $-2(z_1 - z)$, por ser, en general, $z_1 > z$. Esto sugiere que la regresión lineal del logaritmo del espectro \widehat{P}_T permitiría obtener una estimación de la profundidad z_1 . Blakely & Hassanzadeh⁴ sugieren corregir el espectro por el efecto del término exponencial asociado al espesor del magnetoestrato, la que requiere hacer suposiciones acerca del mismo, por lo que en la práctica preferimos no realizarla.

Cabe mencionar que el comportamiento del espectro de potencia en (11) es consistente con el modelo propuesto por Spector & Grant² basado en consideraciones estadísticas y con el de Treitel et al.,¹ en el que la interfase entre sedimentos (no magnéticos) y basamento magnético se representa mediante una distribución de líneas de dipolos de magnetización no correlacionada lateralmente.

3. ESTIMACIÓN ESPECTRAL EN VARIABLES DISCRETAS

Hasta aquí la descripción del problema se realizó en términos de variables continuas, lo que equivale a suponer conocidos los valores de las funciones y sus espectros en un número infinito de puntos. Sin embargo, la implementación práctica del método de estimación de profundidades a partir de *datos* (sintéticos o reales) requiere la formulación del mismo en variables espaciales y números de onda discretos. Esto demanda la utilización de herramientas de la teoría de análisis de señales digitales, cuyos fundamentos han sido establecidos y analizados por numerosos autores.¹⁰⁻¹⁴

En primer lugar, consideremos una discretización finita y regular del eje x en N puntos con la cual representaremos la variable espacial $x = n\Delta x$, $n = 0, N - 1$, siendo Δx el intervalo de muestreo espacial. Supondremos conocido el valor de las funciones g, m y de las anomalías T sólo en dichos puntos, las que de ahora en más serán consideradas como series discretas de longitud N . En este contexto, la expresión del modelo dada por (5) toma la forma de una convolución lineal discreta entre las series $g(n)$ y $m(n)$ dada por

$$T(n) = \sum_{j=0}^{N-1} m(j) g(n - j) \Delta x, \quad n = 0, N - 1. \quad (12)$$

Introducimos la Transformada de Fourier Discreta (TFD) de una serie de longitud N en la forma^{12, 14}

$$\widehat{F}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i(\frac{2\pi}{N})n k}, \quad k = 0, N - 1, \quad (13)$$

y su Antitransformada

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{F}(k) e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right) n k}, \quad n = 0, N - 1, \quad (14)$$

donde k denota los números armónicos adimensionales. Como es sabido, en general, la longitud finita y la no periodicidad de la serie de datos, así como la presencia de discontinuidades, dan lugar a errores numéricos que dificultan el cálculo del espectro de potencias verdadero. En particular, la estimación de la autocorrelación y el espectro de potencias de series no determinísticas constituyen aplicaciones muy importantes del análisis de señales y han sido abordadas con diversos enfoques. Sin embargo, como se mencionó al comienzo, en el presente trabajo nos limitaremos a aplicar las técnicas de periodogramas suavizados y de máxima entropía, cuyos fundamentos se sintetizan a continuación.

3.1. Periodogramas suavizados

Uno de los enfoques tradicionales para el problema de la estimación espectral se basa en el cálculo de la Transformada de Fourier Discreta de la autocorrelación seguido de un procedimiento de suavización, con lo que se obtiene una buena aproximación del espectro de potencias discreto.^{11,12} Con esta idea Oppenheim & Schaeffer¹² definen y analizan las propiedades de un estimador de la autocorrelación de la forma

$$C_{ff}(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-|l|-1} f(j) f(j+l) \Delta x, \quad -(N-1) \leq l \leq (N-2), \quad (15)$$

donde $C_{ff}(l) = C_{ff}(-l)$. A partir de C_{ff} se define el *periodograma* de la serie f

$$\begin{aligned} \hat{P}_N(k) &= \sum_{l=-(N-1)}^{N-2} C_{ff}(l) e^{-i\left[\frac{2\pi}{2(N-1)} k l\right]} \\ &= C_{ff}(0) + 2 \sum_{l=1}^{N-1} C_{ff}(l) \cos \left[\frac{2\pi}{2(N-1)} k l \right], \quad k = -(N-1), (N-2). \end{aligned} \quad (16)$$

Teniendo en cuenta que $C_{ff}(l)$ es igual a una convolución lineal discreta de $f(l)$ con $f(-l)$ (salvo un factor $\frac{1}{N}$), extendiendo con $(N-1)$ ceros la serie original $f(l)$ y de las propiedades de la TFD de la convolución discreta, puede demostrarse que

$$\hat{P}_N(k) = \frac{1}{N} |\hat{F}(k)|^2 \quad (17)$$

Puesto que el análisis de la varianza demuestra que el periodograma (17) es un estimador sesgado del espectro de potencias,¹² un procedimiento eficiente para obtener estimaciones más consistentes del mismo se logra suavizando la autocorrelación mediante *ventanas* pares

$$w(l), \quad l = -M_v, (M_v - 1)$$

en la forma:

$$\begin{aligned}\widehat{P}_w(k) &= \sum_{l=-M_v}^{M_v-1} C_{ff}(l) w(l) e^{-i\left[\frac{2\pi}{M_v}k l\right]} \\ &= C_{ff}(0) w(0) + 2 \sum_{l=1}^{M_v-1} C_{ff}(l) w(l) \cos\left[\frac{2\pi}{2M_v}k l\right], \quad k = -M_v, (M_v - 1),\end{aligned}\tag{18}$$

donde $w(l) = w(-l)$ y M_v denota el “ancho” de la ventana siendo un parámetro de gran influencia en el grado de suavizamiento del espectro resultante. Se han propuesto en la literatura varios tipos de ventanas con diferentes propiedades,^{11,12} pero en el presente análisis nos limitaremos a considerar funciones cosenoidales de la forma

$$w(l) = \alpha + \beta \cos\left(\frac{\pi l}{M_v - 1}\right), \quad l = -M_v, M_v - 1,\tag{19}$$

las que han sido ampliamente utilizadas por tener un lóbulo principal ancho, lo que permite una mayor resolución en frecuencias con mínima distorsión espectral.¹¹ Para $\alpha = \beta = 0.5$ se obtiene la clásica ventana de Hanning, mientras que para $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.46$ resulta la de Hamming.^{11,12} Para estos casos se ha demostrado que el cociente entre la varianza del espectro suavizado y la varianza del periodograma resulta¹²

$$R = \frac{\text{var}[\widehat{P}_w(k)]}{\text{var}[\widehat{P}_N(k)]} = 2 \frac{M_v}{N} \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2} \right).\tag{20}$$

De esta manera, cambiando la forma y el ancho de estas ventanas puede lograrse que $R \ll 1$, lo que es útil como criterio orientativo para la elección de M_v .

3.2. Método de Máxima Entropía

Otra de las técnicas ampliamente aceptadas para la estimación espectral es el método de Máxima Entropía (MEM), originalmente por Burg,¹⁵⁻¹⁷ al que nos referiremos como MEM-B. La teoría de este método y su relación con los modelos autoregresivos (AR) ha sido descrita en detalle por diversos autores, en particular Ulrych-Bishop (1975).¹⁸ Este algoritmo se basa en la hipótesis de que una serie discreta estacionaria $f(n)$ puede representarse con un modelo AR de orden M_e de la forma

$$\tilde{f}(n) = \sum_{j=1}^{M_e} d(j) f(n - j), \quad n = M_e + 1, N,\tag{21}$$

lo que implica que $f(n)$ puede estimarse mediante una suma pesada de M_e valores previos (*forward prediction*). Definiendo la discrepancia

$$e(n) = f(n) - \tilde{f}(n), \quad n = M_e + 1, N,\tag{22}$$

entre los valores medidos y la estimación del modelo se determinan los coeficientes $d(j)$, $j = 1, M_e$ mediante un procedimiento de mínimos cuadrados que involucra la resolución de un sistema de ecuaciones normales. Luego, el espectro de potencia de la serie f se estima con la siguiente expresión:¹⁰

$$P_{MEM}(K_x) \simeq \frac{P_m}{\left| 1 - \sum_{j=1}^{M_e} d(j) e^{iK_x \Delta x j} \right|^2}, \quad (23)$$

donde P_m es el error medio cuadrático asociado a la predicción lineal. Para la implementación numérica introducimos una discretización regular del eje de frecuencias de la forma

$$K_x = \left(\frac{2\pi}{N} \right) \frac{k}{\Delta x}, \quad k = 0, N - 1, \quad (24)$$

con lo cual (23) puede escribirse como

$$P_{MEM}(k) \simeq \frac{P_m}{\left| 1 - \sum_{j=1}^{M_e} d(j) e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right) k j} \right|^2}, \quad (25)$$

donde P_m está dado por¹⁰

$$P_m(d) = \phi(0) - \sum_{j=1}^{M_e} \phi(j) d(j), \quad \phi(j) \simeq \frac{1}{N-j} \sum_{i=1}^{N-j} f(i) f(i+j). \quad (26)$$

Años más tarde, Barrodale-Erickson (1980)^{19,20} analizaron el algoritmo originalmente propuesto por Burg y señalaron varias limitaciones del mismo, particularmente por imponer una estructura tipo Toeplitz a la matriz del sistema de ecuaciones normales que permiten determinar los parámetros del modelo AR. Para evitar las inestabilidades numéricas asociadas a dicho método estos autores proponen un algoritmo alternativo (MEM - BE), numéricamente estable para generar sucesivos sistemas de ecuaciones normales cuyos parámetros se determinan usando un método de Cholesky. Este método involucra coeficientes de predicción hacia adelante y hacia atrás (*forward and backward*) y el espectro de potencias se calcula usando una expresión análoga a (25).

La determinación del orden M_e del modelo AR tiene gran importancia en el análisis espectral y condiciona fuertemente las estimaciones de profundidad. Distintos autores han analizado empíricamente este problema con diferentes criterios y resultados,^{4,10,21} pero ninguno de ellos puede considerarse del todo objetivo. En este trabajo adoptaremos el criterio propuesto por Akaike²² quien demostró que el error final de predicción (FPE) para una serie de N valores y un modelo de orden M_e resulta

$$\text{FPE}(N, M_e) = \frac{N + M_e}{N - M_e} P_m(d). \quad (27)$$

De este modo el orden óptimo M_* se determina buscando el mínimo de (27) para distintos valores de M_e .

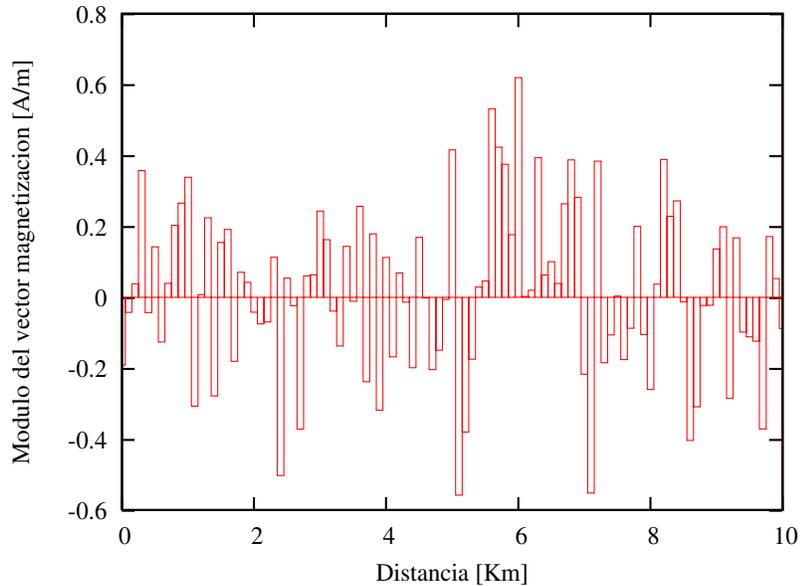


Figura 2: Modelo de magnetización aleatoria (en A/m) para los primeros 10 Km del perfil.

4. EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA PARA LA ESTIMACIÓN DE PROFUNDIDADES

Para ilustrar la implementación del método de estimación de profundidades analizaremos en primer lugar un perfil de anomalías sintéticas calculado a partir de una distribución de magnetización gaussiana con varianza $\sigma = 0.05$ y media igual a cero. La serie $m(n)$ se calcula usando un generador de números pseudo aleatorios dado por¹⁰ tomando $N = 501$ valores en el rango $(-0.6, 0.6)$ A/m, según se muestra en la Figura 2, donde se restringió el rango a solo 10 Km del perfil para poder apreciar mayor detalle. Los cambios de signo en $m(x)$ deben interpretarse como cambios de polaridad en el vector \mathbf{m} , lo que se deduce teniendo en cuenta que las componentes de dicho vector pueden expresarse en la forma⁹

$$\begin{aligned} m_x &= m \cos A \cos(C - B), \\ m_z &= m \sen A. \end{aligned} \tag{28}$$

Supondremos que la inclinación magnética del lugar es $I = 15^\circ$, la declinación $D = 10^\circ$, el acimut del perfil $C = 20^\circ$ y tomamos $A = 12^\circ$ y $B = 10^\circ$ (según la convención de Talwani-Heirtzler⁹). Calcularemos un perfil de 50 km de longitud, en puntos equiespaciados cada 100 m, a una altura $z = 0$ y estimaremos la profundidad al tope z_1 suponiendo un espesor de basamento $d = z_2 - z_1 = 2000$ m. La anomalía sintética $T(n)$, $n = 0, 500$ calculada según (12) se muestra en la Figura 3. Para este ejemplo se considera $z_1 = 1000$ m.

En todos los casos para hacer la estimación de profundidad, en primer lugar se normalizan los espectros respecto de su valor máximo al intervalo $[0, 1]$, con lo cual el logaritmo de la estimación espectral normalizada tiene su máximo en 0. Luego se realiza una regresión lineal por mínimos cuadrados eligiendo la porción **más empinada** del espectro en el entorno del límite

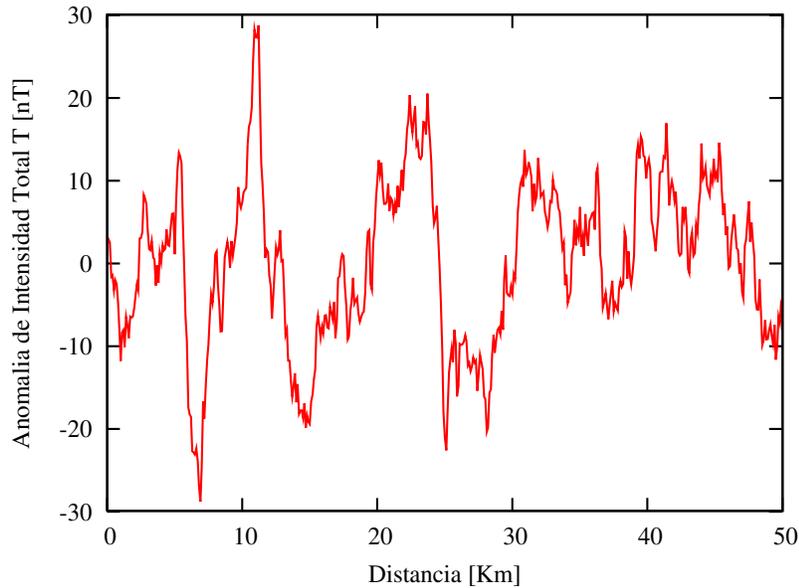


Figura 3: Perfil de anomalía de intensidad total (en nanoTesla) para la placa de 2000 m de espesor, con tope a 1000 m de profundidad.

de bajas frecuencias,¹ de cuya pendiente se deduce el valor aproximado de la profundidad z_1 .

A los fines prácticos el espectro se estimará en un número finito de frecuencias discretas dentro del intervalo de Nyquist $[0, \frac{\pi}{\Delta x}]$.

La Figura 4 (a) muestra los espectros de potencia estimados mediante la técnica de periodogramas suavizados, utilizando las ventanas descritas en la sección anterior para $M_v = 71$. Este valor fue elegido teniendo en cuenta los valores resultantes para el coeficiente R dado por la ec. (20) y la calidad de la estimación de profundidad, que para la ventana de Hanning resultó de 996 m (error 0.4 %, ver definición (29)) y para la de Hamming de 1010.4 m (error 1.04 %).

Paralelamente, en la Figura 4 (b) se observan los espectros obtenidos mediante los métodos de máxima entropía, usando las rutinas de MEM - B y MEM - BE, con la longitud de operador $M_e = M_* = 4$ encontrada usando el criterio de Akaike,^{19,22} habiéndose estimado profundidades de 1140 m (error 14 %) y de 912.17 m (error 8.8 %) respectivamente. De la comparación entre

Ventana de Hanning				Ventana de Hamming		
z_1 (m)	z_{1e} (m)	M_v	R	z_{1e}	M_v	R
$z_1 = 500$	519.3	62	0.093	500.09	56	0.09
$z_1 = 1000$	996.00	71	0.106	1010.40	71	0.112
$z_1 = 2000$	2071.08	141	0.210	2023.99	140	0.222
$z_1 = 3000$	3018.20	199	0.298	2995.86	197	0.312
$z_1 = 4000$	3991.50	275	0.410	3980.50	262	0.415

Tabla 1. Estimaciones de profundidad óptimas con los parámetros correspondientes para los métodos de periodogramas suavizados para $d = 2000$ m y $N = 501$.

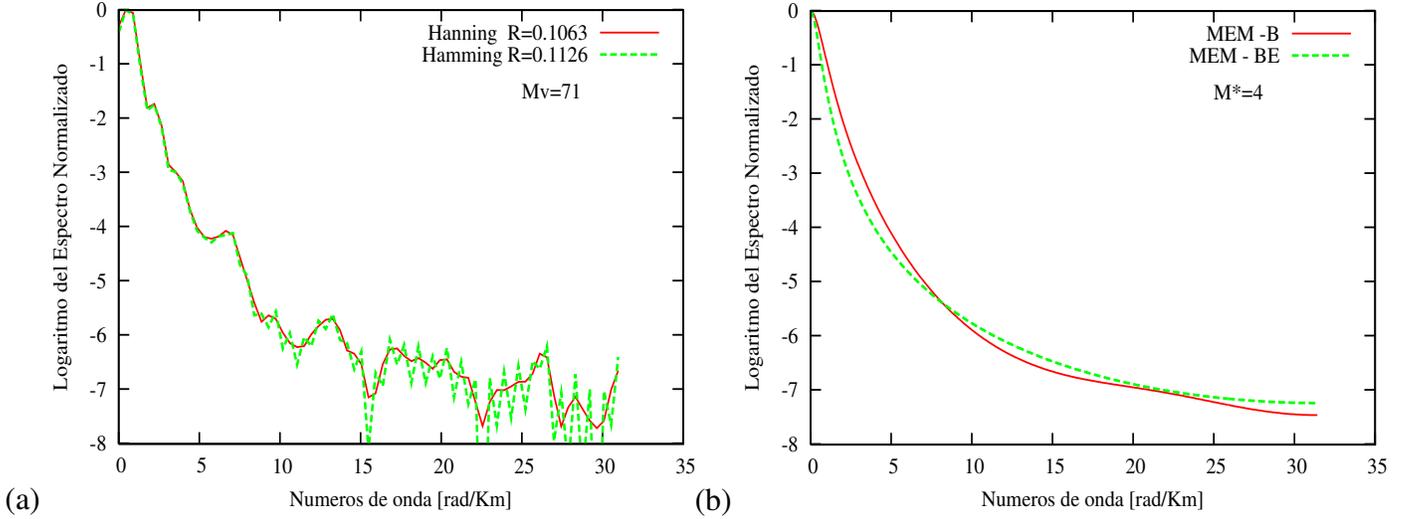


Figura 4: Logaritmo de los espectros de potencias normalizados vs. número de onda, obtenidos mediante los diferentes métodos de estimación.

Método MEM - BE				Método MEM - B		
z_1 (m)	z_{1e} (m)	M_e	M_{*BE}	z_{1e} (m)	M_e	M_{*B}
$z_1 = 500$	494.31	5	3	581.05	3	3
$z_1 = 1000$	942.86	7	4	1049.73	5	4
$z_1 = 2000$	1999.3	2	4	2028.45	7	4
$z_1 = 3000$	2607.95	2	4	2952.12	13	11
$z_1 = 4000$	2957.86	2	4	3292.05	11	11

Tabla 2. Estimaciones de profundidad óptimas con los parámetros correspondientes para los métodos de máxima entropía para $d = 2000$ m y $N = 501$, donde M_{*B} y M_{*BE} denotan las longitudes del operador obtenidas con el criterio de Akaike.

ambas figuras se observa la mayor suavidad de los espectros obtenidos con los métodos de máxima entropía, como así también el apartamiento de la tendencia lineal para números de onda medios y altos.

4.1. Efecto de la profundidad al tope del estrato

A continuación analizaremos el efecto de considerar profundidades z_1 variables entre 500 y 4000 m, manteniendo fijo el resto de los parámetros (es decir, espesor, espaciamento, cantidad de puntos, etc.), comparando las estimaciones z_{1e} logradas mediante los diferentes métodos.

En la Tabla 1 se muestran las **mejores** estimaciones logradas mediante periodogramas, incluyéndose además el ancho de ventana utilizado y el valor correspondiente para el coeficiente R . Nótese que al aumentar la profundidad del tope del estrato magnetizado es necesario incrementar la longitud de la ventana M_v para mantener la calidad de las estimaciones. A partir de

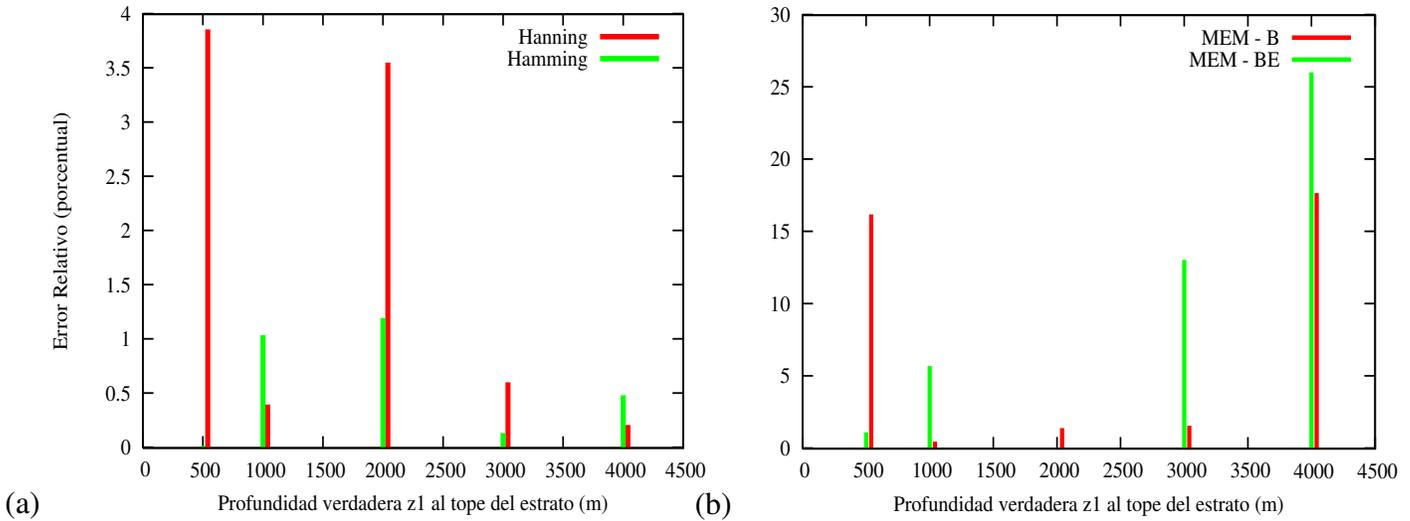


Figura 5: Error relativo de las estimaciones de profundidad z_1 obtenidas con periodogramas suavizados con ventanas de Hanning y de Hamming para un espesor $d = 2000$ m y $N = 501$.

este análisis observamos una proporcionalidad casi lineal entre z_1 y el factor R o equivalentemente, entre z_1 y M_v , como surge de (20), lo que resulta útil como criterio para el diseño de la ventana espectral. Esto se cumple para ambos tipos de ventana.

En el caso de los métodos MEM, cuyos resultados versus profundidad se detallan en la Tabla 2, cabe aclarar que hemos considerado el valor M_* que surge del criterio de Akaike como un *valor inicial* para el orden del modelo AR, el que luego fue modificado en uno, dos o tres puntos para obtener estimaciones de profundidad mejores.

En las Figuras 5 (a) - (b) graficamos el error relativo porcentual para las estimaciones mostradas en las Tablas 1 y 2 con los diferentes métodos, el que se ha definido en la forma:

$$e_R(\%) = \frac{|z_1 - z_{1e}|}{z_1} \times 100. \quad (29)$$

Para las estimaciones obtenidas utilizando ventanas de Hanning el error en general está por debajo del 3.86 %, mientras que para las de Hamming el error no supera el 1.2 %. En cuanto a los métodos de máxima entropía los errores están por debajo de 17.7 % y 26 % para MEM - B y MEM - BE, respectivamente.

Para profundidades superiores a los 4500 m hemos observado que la calidad de las estimaciones empeora substancialmente con cualquiera de los métodos, debido a que al aumentar la distancia entre el estrato y las observaciones las anomalías (y por ende los espectros) pierden detalle sobre sus características. Cabe destacar que este análisis no ha sido considerado en detalle por otros autores y pone de manifiesto la sensibilidad de la calidad de las estimaciones respecto de la profundidad.

d (m)	Periodogramas suavizados		Máxima Entropía	
	z_{1e} Han (m)	z_{1e} Ham (m)	z_{1e} B (m)	z_{1e} BE (m)
$d_1 = 1000$	2005.70	1986.54	2005.96	1785.05
$d_2 = 2000$	2071.08	2023.99	2028.45	1999.30
$d_3 = 3000$	2005.63	2003.44	1980.00	1957.55
$d_4 = 4000$	2002.40	2002.51	2083.00	2044.60

Tabla 3. Estimaciones de profundidad óptimas utilizando los métodos de periodogramas suavizados y máxima entropía para $z_1 = 2000$ m, variando el espesor del estrato.

4.2. Efecto del espesor

Seguidamente procedimos a variar el espesor del magnetoestrato entre 1000 y 4000 m, tomando una profundidad fija $z_1 = 2000$ m y manteniendo los mismos valores de N y Δx . Los resultados de las mejores estimaciones se presentan en la Tabla 3 para los cuatro métodos bajo estudio, y los correspondientes errores se grafican en la Figura 6. Por brevedad no se detallan en la tabla la totalidad de los parámetros utilizados, que mencionaremos a continuación. De los resultados puede observarse que para las estimaciones logradas usando ventanas de Hanning el error no supero el 4.6 % tomando M_v entre 136 - 142. Para las ventanas de Hamming el error máximo fue del 1.2 % respectivamente con M_v en el intervalo 119 - 140. Para el método MEM-B se observa que el error tiende a crecer con el espesor habiéndose utilizado órdenes M_e entre 5 y 7 (siendo el correspondiente $M_{*B} = 4$). Con respecto al MEM - BE si bien el comportamiento del error no guarda una correlación marcada con los espesores, vemos que las estimaciones para espesores mayores de 1000 m son muy aceptables, con errores no mayores al 2 %. En este caso los valores de M_e variaron entre 2 y 3, siendo $M_{*BE} = 4$.

4.3. Efecto del espaciamiento entre estaciones

En este punto se analizará el efecto del espaciamiento de los datos, para una profundidad de 2000 m y un espesor de 2000 m, manteniendo fija la longitud del perfil en 50 Km, lo que implica variar el número de puntos N en cada caso. Esto se indica en la Figura 7 donde se

Δx (m)	Periodogramas suavizados		Máxima Entropía	
	z_{1e} Han (m)	z_{1e} Ham (m)	z_{1e} B (m)	z_{1e} BE (m)
$\Delta x_1 = 100$	2071.08	2023.99	2028.45	1999.30
$\Delta x_2 = 250$	1993.51	2053.48	1854.40	1491.44
$\Delta x_3 = 500$	2089.90	1929.81	1899.02	1480.11
$\Delta x_4 = 781$	1989.09	2080.65	2167.63	1558.17
$\Delta x_5 = 1000$	1997.47	1952.04	1577.80	965.37

Tabla 4. Estimaciones de profundidad óptimas utilizando los métodos de periodogramas suavizados y máxima entropía para $d = 2000$ m, $z_1 = 2000$ m, variando el espaciamiento de los datos.

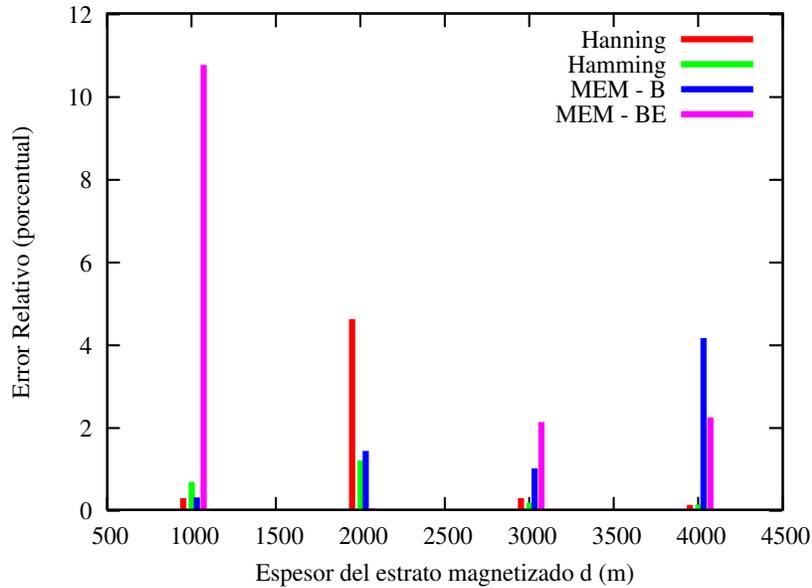


Figura 6: Error relativo de las estimaciones de profundidad z_1 obtenidas con los diferentes métodos para una profundidad $z_1 = 2000$ m para espesores variables.

muestra el error relativo de las estimaciones al incrementar el parámetro Δx . Allí se observa que los periodogramas dan muy buenas estimaciones, con errores inferiores al 5%, aún con grandes espaciamientos, lo que demuestra la robustez del método. La cantidad de puntos M_v utilizados en ambas ventanas varió entre 141 para $\Delta x = 100$ m y 32 para $\Delta x = 1000$ m.

En cuanto a las estimaciones logradas con el método MEM-B, podemos decir que son aceptables para intervalos inferiores a los 1000 m (con errores inferiores al 10%), valor a partir del cual empeoran notoriamente. Las longitudes del operador para este caso variaron entre $M_e = 7$ para $\Delta x = 100$ m, siendo $M_{*B} = 4$ y $M_e = M_{*B} = 2$ para $\Delta x = 1000$ m.

A diferencia del anterior, el algoritmo MEM - BE arroja resultados inaceptables al incrementarse el espaciamiento, dando muy buenas estimaciones sólo para Δx del orden de los 100 m. Los parámetros utilizados en este caso variaron entre $M_e = 2$ para $\Delta x = 100$ m, siendo $M_{*BE} = 4$ y $M_e = 5$ para $\Delta x = 1000$ m, siendo $M_{*BE} = 2$.

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos descripto y analizado el cálculo de espectros de potencias asociados a datos magnéticos por constituir una herramienta relativamente simple para estimar la profundidad media a la interfase entre sedimentos y basamento. Esto es de sumo interés en investigaciones geofísicas, particularmente en zonas donde las anomalías magnéticas exhiben alta variabilidad espacial, puesto que el método supone magnetización aleatoria.

El análisis paramétrico realizado nos permite concluir que para lograr estimaciones confiables con datos reales los métodos espectrales deben utilizarse con ciertas precauciones, debien-

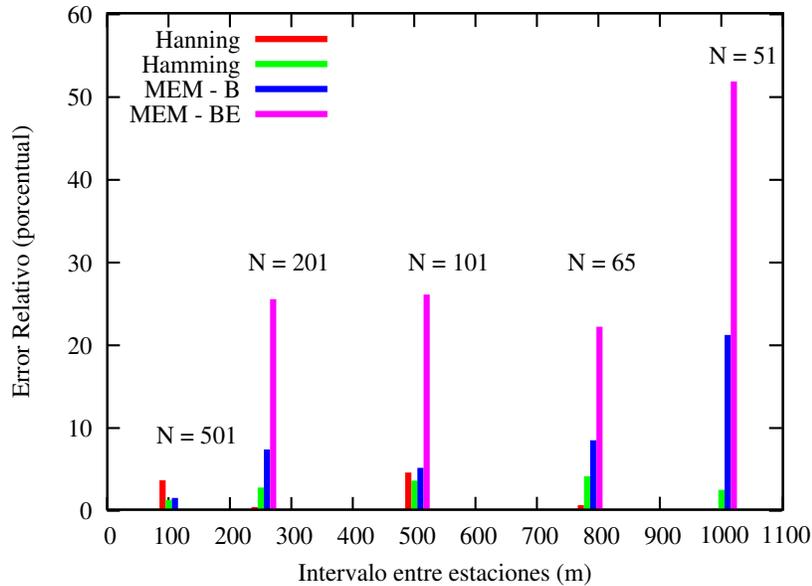


Figura 7: Error relativo de las estimaciones de profundidad z_1 obtenidas con los diferentes métodos para una profundidad $z_1 = 2000$ m variando el intervalo entre estaciones y el número de datos N .

do removerse cualquier tendencia regional presente en los datos previo a su aplicación.

En cuanto a la metodología aplicar y a los parámetros involucrados, la elección debe hacerse cuidadosamente teniendo en cuenta los siguientes elementos, que surgen de los ejemplos considerados.

Los métodos de máxima entropía, tanto MEM - B como MEM - BE en general muestran errores considerables, fuertemente dependientes de la profundidad y no son recomendables cuando la misma es del orden de los 4000 m. En líneas generales, podemos decir que las longitudes de operador obtenidas usando el criterio de Akaike no siempre garantizan la mejor estimación, aunque pueden tomarse como un buen valor inicial, lo que resulta útil debido a su objetividad.

Los métodos basados en periodogramas suavizados permiten determinaciones con errores mucho menores que los anteriores (particularmente usando ventanas de Hamming), y son más robustos en cuanto a las variaciones versus profundidad. Sin embargo, hay que tener en cuenta que requieren series de datos de mayor longitud que los métodos MEM, como se desprende de las Tablas 1 y 2. Los resultados indican que existe una relación aproximadamente lineal entre la profundidad y el ancho de la ventana espectral.

Los errores asociados a los cuatro métodos considerados en general no muestran una dependencia fuerte con el espesor del magnetoestrato (excepto para el caso del MEM - BE para espesores del orden de los 1000 m).

Para intervalos de medición variables (mayor o menor número de datos), se observa que las estimaciones basadas en periodogramas son mucho más robustas que las obtenidas con máxima entropía, manteniendo la calidad de las mismas dentro de márgenes de error muy aceptables para un amplio rango de variación del parámetro N . Esto debe tenerse en cuenta para una

implementación de este procedimiento con *ventanas móviles* sobre el perfil de anomalías, lo que involucra segmentos de datos de menor longitud.

Por último, con el fin de establecer conclusiones más generales, cabe mencionar que se está llevando a cabo un análisis similar al realizado en el presente trabajo, considerando otros modelos estadísticos para la magnetización.

AGRADECIMIENTOS

Los resultados de esta investigación forman parte de una Tesis de Grado realizada en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la U.N.L.P. Nuestro agradecimiento al Dr. Ian Barrodale por las rutinas Fortran para la implementación del método MEM - BE.²⁰

Este trabajo fue parcialmente financiado por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (PICT03 3-13376) y por CONICET (PIP05-06 5126).

REFERENCIAS

- [1] S. Treitel, W. G. Clement, and R. K. Kaul. The spectral determination of depths to buried magnetic basement rocks. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **24**, 415–428 (1971).
- [2] A. Spector and F. Grant. Statistical models for interpreting aeromagnetic data. *Geophysics*, **45**, 433–446 (1980).
- [3] E. Cassano and F. Rocca. Interpretation of magnetic anomalies using spectral estimation techniques. *Geophysical Prospecting*, **23**, 663–681 (1975).
- [4] R. Blakely and S. Hassanzadeh. Estimation of depth to magnetic source using maximum entropy power spectra, with application to the peru-chile trench. *Geological Society of America Memoir*, **154**, 667–681 (1981).
- [5] J. Garcia-Abdeslem and Ness G. Inversion of the power spectrum from magnetic anomalies. *Geophysics*, **59**, 391 – 401 (1994).
- [6] R. Blakely. *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge University Press, (1996).
- [7] M. Ghidella. *Desarrollo de métodos de interpretación de datos geomagnéticos aéreos y satelitarios: su aplicación a la evolución tectónica del Antártico*. Tesis Doctoral. Instituto Antártico Argentino y Universidad de Buenos Aires, Argentina, (1997).
- [8] P. Naidu and M. Mathew. *Analysis of geophysical potential fields: A digital signal processing approach*. Elsevier, (1998).
- [9] M. Talwani and J. Heirtzler. Computation of magnetic anomalies caused by two dimensional structures of arbitrary shape, computers and the mineral industries, part 1. *Stanford Univ. Public. Geol. Sci.*, **9** (1), 464–480 (1964).
- [10] W. Vetterling W. Press, S. Teukolsky and B. Flannery. *Numerical Recipes in FORTRAN: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, (1992).
- [11] M. Bath. *Spectral analysis in Geophysics*. Elsevier, (1974).
- [12] A. Oppenheim and R. Schaffer. *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, (1975).
- [13] R. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. Mc Graw Hill, (1978).

- [14] M. Worthington L. Hatton and J. Makin. *Seismic Data Processing*. Blackwell Sci. Publ., (1986).
- [15] J. P. Burg. Maximum entropy spectral analysis. *37th. Annual International SEG Meeting, Oklahoma City*, (1967).
- [16] J. P. Burg. *A new analysis technique for time series data*. NATO Adv. Study Inst. on signal processing, Enschede, The Netherlands, (1968).
- [17] J. P. Burg. *Maximum entropy spectral analysis: Ph.D. thesis*. Stanford University, (1975).
- [18] T. J. Ulrych and T. Bishop. Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. *Rev. Geophys.*, **13**, 183–200 (1975).
- [19] I. Barrodale and R. E. Erickson. Algorithms for least-squares linear prediction and maximum entropy spectral analysis - part 1: Theory. *Geophysics*, **45**, 420 – 432 (1980).
- [20] I. Barrodale and R. E. Erickson. Algorithms for least-squares linear prediction and maximum entropy spectral analysis - part 2: Fortran program. *Geophysics*, **45**, 433 – 446 (1980).
- [21] J. Berryman. Choice of operator length for maximum entropy spectral analysis. *Geophysics*, **43**, 1384 – 1391 (1978).
- [22] H. Akaike. Fitting autoregressive models for prediction. *Ann. Inst. Stat. Math.*, **21**, 243–247 (1969).