



APROXIMACIONES POLINOMICAS EN PROBLEMAS TERMOELASTICOS DE PLACAS

por Carlos A. Rossit y Patricio A.A. Laura
Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET) y Departamento de Ingeniería
Universidad Nacional del Sur - Bahía Blanca

Resumen.

Se analiza la flexión termoelástica de placas rectangulares delgadas, de espesor ligeramente variable con dos bordes opuestos elásticamente empotrados, asumiendo la hipótesis de pequeños desplazamientos.

El problema se resuelve aproximando la solución mediante una sumatoria de funciones coordenadas polinómicas, que satisfacen idénticamente las condiciones de borde, y que es determinada mediante la utilización del método de Ritz.

Este enfoque se originó en el hecho de que el problema del estado plano termoelástico de una placa rectangular con bordes libres, -que guarda similitud matemática con la flexión termoelástica de placas rectangulares, de espesor constante con bordes empotrados -ha sido satisfactoriamente resuelto a través de aproximaciones polinómicas.

Abstract.

The present paper deals with the solution of thermoelastic bending of thin rectangular plates, of slightly varying thickness with edges elastically restrained against rotation in two opposite edges when small-deflection theory is used, and stress resultants in the middle plane are neglected.

The problem is attacked using polynomial coordinate functions which identically satisfy the governing boundary conditions and the Ritz technique to determine the plate response.

This approach was motivated by the mathematical analogy between the thermoelastic transverse behavior of a rectangular clamped plate of uniform thickness and the thermoelastic plane stress situation in a rectangular plate with stress-free edges which has been solved in a straightforward fashion using polynomial approximations.

Introducción.

El interés en el campo de la termoelasticidad tiene su origen en 1837, cuando Duhamel publicara su famosa *Memoire sur les Phenomenes Thermomecaniques*. No obstante ello, como bien lo estableciera Parkus [1] en 1964 es recién a partir de 1940, aproximadamente, que se ha desarrollado un esfuerzo investigativo sumamente activo y sistemático.

En efecto, el estudio de medios deformables sometidos a sollicitaciones térmicas ha sido fuertemente requerido por el desarrollo tecnológico de las industrias aeroespacial, nuclear, oceánica, etc.. Inclusive ha dado origen a nuevas disciplinas: termoplasticidad, termoviscoelasticidad, etc..

En problemas de este tipo, así como de cualquier otra área de la mecánica aplicada, el método de elementos finitos constituye la técnica de resolución más difundida. De cualquier manera, siempre resulta conveniente aplicar, cuando es posible, los métodos aproximados clásicos ya que brindan al analista una visión global del problema en consideración, que no siempre se obtiene con técnicas enteramente numéricas.

Consideremos el problema plano termoelástico en placas rectangulares de espesor uniforme con bordes libres sometido a una variación térmica de distribución bidimensional.

La ecuación gobernante será:

$$\nabla^4 F(x,y) = -\alpha E \nabla^2 T(x,y) \quad (1)$$

con F : Función de tensiones de Airy.

Dado que cada función coordenada debe satisfacer las condiciones de borde libre en el contorno de la placa, para el caso de geometría rectangular de lados: $2a$, $2b$, si ubicamos el origen de coordenadas en el centro de la misma se debe cumplir:

$$\begin{aligned} F\left(\pm a, y\right) &= F\left(x, \pm b\right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\left(\pm a, y\right) &= \frac{\partial F}{\partial y}\left(x, \pm b\right) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Dichas condiciones son las mismas que deben cumplir los corrimientos transversales $W(x,y)$, en el problema de flexión de una placa rectangular empotrada.

El problema fue resuelto por Przemieniecki [2], utilizando aproximaciones del tipo.

$$F \approx F_a(x,y) = \sum \sum A_{nm} X_n(x) Y_m(y)$$

tomando para $X_n(x)$ y $Y_m(y)$ "funciones viga" provenientes de la solución clásica de vibraciones transversales de barras.

Posteriormente, Laura y otros [3] adoptaron funciones coordenadas polinómicas.

En base a ello, en el presente trabajo se propone extender la aproximación de la solución mediante la utilización de funciones polinómicas coordenadas al caso de flexión termoelástica de placas rectangulares de espesor variable con bordes elásticamente empotrados.

Flexión Termoelástica de Placas Rectangulares de Espesor Variable.

Consideremos el esquema estructural indicado en la Fig. 1, de una placa cuyo espesor varía ligera y monótonicamente en una dirección.

Los bordes transversales a la dirección de espesor variable se encuentran elásticamente restringidos contra rotación, los otros dos están empotrados.

La placa se encuentra sometida a una variación térmica espacial

estacionaria tal que adquiere valores constantes T_s y T_i en las superficies superior e inferior respectivamente, variando linealmente en el espesor.

Para generalizar la solución del problema se tomarán variables adimensionales:

$$x = \frac{\bar{x}}{a} \quad ; \quad y = \frac{\bar{y}}{b}$$

y se definirá $\lambda = \frac{a}{b}$

Entonces se tendrá:

$$h(x) = h_c (1+mx) \quad ; \quad m = (h_2 - h_c)/h_c \quad , \quad \text{con } h_c = h(0)$$

$$y, T(x, y, \bar{z}) = (T_i + T_s)/2 + [(T_i - T_s)/(1+mx)] \bar{z}/h_c$$

Dada la simetría existente con respecto al eje \bar{x} , se propone la siguiente solución aproximada.

$$W \approx W_\alpha = \sum_{i=1}^N A_i \sum_{j=1}^N (\alpha_{4i} x^4 + \alpha_{3i} x^3 + \alpha_{2i} x^2 + \alpha_{1i} x + 1) (\beta_{4j} y^4 + \beta_{2j} y^2 + 1) x^i y^{2j} \quad (3)$$

Las constantes α y β se determinan sustituyendo (3) en las siguientes condiciones de borde:

$$W(-1, y) = W(1, y) = W(x, -1) = W(x, 1) = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=-1} = \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=-1} = \theta_1 \left[\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \lambda^2 \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \frac{M_T}{1-\nu} \right]_{x=-1} \quad (4)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=1} = -\theta_2 \left[\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \lambda^2 \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \frac{M_T}{1-\nu} \right]_{x=1}$$

donde la rigidez a flexión de la placa por unidad de longitud es:

$$D(x) = \frac{E h^3(x)}{12(1-\nu^2)}$$

Y M_T , representa la siguiente expresión

$$M_T = \alpha E \int_{-h/2}^{h/2} T \cdot \bar{z} \, d\bar{z}$$

Las últimas dos condiciones de borde expresan las relaciones constitutivas que definen los coeficientes de flexibilidad θ_1 y θ_2 , constantes en cada borde.

(En el caso de un borde empotrado: $\theta \rightarrow 0$; mientras que para un borde simplemente apoyado: $\theta \rightarrow \infty$).

Si llamamos:

$$D_1 = D(x=-1) = \frac{E h_c^3 (1-m)^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$D_2 = D(x=1) = \frac{E h_c^3 (1+m)^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$M_{r1} = M_r(x=-1) = \frac{\alpha E}{12} (T_i - T_o) h_c^2 (1-m)^2$$

$$M_{r2} = M_r(x=1) = \frac{\alpha E}{12} (T_i - T_o) h_c^2 (1+m)^2$$

se obtendrá:

$$\alpha_{1i} = \frac{N_i}{D_i}$$

$$\alpha_{2i} = \frac{M_i}{D_i}$$

(5)

$$\alpha_{3i} = -\alpha_{1i}$$

$$\alpha_{4i} = -1-\alpha_{2i}$$

donde:

$$N_i = \left[2 - \frac{\theta_1 D_1}{a} (-1)^{i-1} (10+4i) \right] \left[4 + \frac{\theta_2 D_2}{a} (12+8i) - \frac{\theta_2 M_{r2} a}{(1-\nu)} \right] -$$

$$\left[-2 - \frac{\theta_2 D_2}{a} (10+4i) \right] \left[-4 + \frac{\theta_1 D_1}{a} (-1)^{i-1} (12+8i) + \frac{\theta_1 M_{r1} a}{(1-\nu)} \right]$$

$$D_i = \left[2 - \frac{\theta_1 D_1}{a} (-1)^{i-1} (10+4i) \right] \left[-2 - \frac{\theta_2 D_2}{a} (6+4i) \right] -$$

$$\left[-2 - \frac{\theta_1 D_1}{a} (-1)^{i-1} (6+4i) \right] \left[-2 - \frac{\theta_2 D_2}{a} (10+4i) \right]$$

$$M_i = \left[-2 - \frac{\theta_2 D_2}{a} (6+4i) \right] \left[-4 + \frac{\theta_1 D_1}{a} (-1)^{i-1} (12+8i) + \frac{\theta_1 M_{r1} a}{(1-\nu)} \right] -$$

$$\left[-2 + \frac{\theta_1 D_1}{a} (-1)^{i-1} (6+4i) \right] \left[4 + \frac{\theta_2 D_2}{a} (12+8i) - \frac{\theta_2 M_{r2} a}{(1-\nu)} \right]$$

El objetivo de encontrar una solución aproximada para el problema en estudio, se logra minimizando la siguiente funcional.

$$J[W] = \frac{h_c}{4(1+\nu)a^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 -$$

$$2(1-\nu)\lambda^2 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \alpha(T_i - T_o) m^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 W dx dy$$

$$+ \frac{\alpha(T_i + T_o)}{2} \left[(1+m) \int_{-1}^1 \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=1} dy - (1-m) \int_{-1}^1 \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=-1} dy \right] \quad (6)$$

respecto a los coeficientes $A_{i,j}$:

$$\frac{\partial J[W]}{\partial A_{i,j}} = 0 \quad ; \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

genera entonces un sistema de $(2N+2)$ ecuaciones lineales en los coeficientes $A_{i,j}$, obtenidos los cuales se dispone de una expresión aproximada del corrimiento transversal de la placa que permite a su vez obtener los esfuerzos:

$$M_x = - \frac{D}{a^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] - \frac{M_T}{1-\nu}$$

$$M_y = - \frac{D}{a^2} \left[\lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] - \frac{M_T}{1-\nu} \quad (7)$$

$$M_{xy} = - (1-\nu) \frac{D}{a^2} \lambda \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

A los efectos de verificar la precisión del procedimiento consideremos el caso de una placa empotrada en sus cuatro bordes ($\theta_1 = \theta_2 = 0$), de espesor constante h ($m=0$), sometida a la siguiente variación térmica:

$$T = T_o \left[x^2 + y^2 \right] \frac{\pi}{h}$$

La ecuación diferencial gobernante en el problema de flexión térmica de placas de espesor constante (Boley and Weiner, [4]), es

$$D \nabla^4 W = - \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M_T \quad (8)$$

Para el caso propuesto será:

$$D \nabla^4 W = k T_o \quad (9)$$

Obviamente, el problema es matemáticamente equivalente al caso de una placa rectangular empotrada, sometida a una carga uniformemente distribuida ($p = k T_o$) para el cual se dispone de resultados en la literatura [4].

En la Tabla 1 se comparan valores de deflexiones determinados utilizando cuatro expresiones trigonométricas y los obtenidos en el presente trabajo haciendo $N=2$ en (3).

a/b	Deflexión exacta	Aproximación trigonométrica (4 términos)	Presente enfoque
0.5	0.0277 [$k T_0 a^4 / E h^3$]	0.0304	0.0273
1	0.0138	0.014	0.0138

Tabla 1 - Comparación de deflexiones en el centro de una placa rectangular empotrada ($\nu = 0.3$) sometida a una "carga" $k T_0$.

Se observa que la aproximación polinómica brinda resultados de mayor precisión.

Esta situación se agudiza aún más al determinar los esfuerzos, cuando debe trabajarse con las derivadas de la expresión aproximada.

En el caso de una placa cuadrada el valor exacto del mayor momento flector M_x que se produce en $\bar{x}=a$, $\bar{y}=0$ es $(-0.0513 k T_0 a^2)$, mientras la expresión trigonométrica arroja $(-0.0338 k T_0 a^2)$ [4].

Utilizando la presente aproximación polinómica, se obtiene $(-0.05118 k T_0 a^2)$, de excelente concordancia con el valor exacto*.

En las Tablas 2, 3 y 4 se indican coeficientes de deflexiones, momentos flectores y momentos torsores, para distintas relaciones $\lambda = a/b$ y valor del parámetro de pendiente $m = 1/3$, cuando los coeficientes de flexibilidad toman los valores ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) correspondientes al caso empotrado (obviamente: en este caso los cuatro bordes están empotrados). Los máximos valores absolutos de los momentos flectores tienen lugar en el borde de mayor espesor ($\bar{x}/a = 1$).

Conclusiones.

En la Ref. [3] se muestra que dos problemas termoelásticos distintos (problema plano de tensiones de una placa en bordes libres de tensiones y flexión transversal de una placa empotrada) pueden ser tratados bajo un enfoque unificado utilizando aproximaciones polinómicas.

En el presente trabajo, se extiende esta metodología, al caso de flexión transversal de una placa rectangular, de espesor linealmente variable, con bordes elásticamente restringidos a rotación, obteniéndose resultados numéricos para el caso en que la placa está empotrada en sus cuatro bordes.

Se pone énfasis en señalar el hecho de que el problema ha sido resuelto como un caso isotérmico de carga $p = k T_0$. De considerarse el

efecto térmico a los esfuerzos obtenidos deberá adicionarse: $[-M_x / (1-\nu)]$.

Se observa que la utilización de aproximaciones polinómicas brinda un camino sencillo y de excelente aproximación (aún con un número reducido de términos) para resolver una variada gama de problemas termoelásticos.

Es importante puntualizar que el presente enfoque es también utilizable en la resolución de la flexión termoelástica de placas circulares de espesor ligeramente variable. Por otra parte ha sido empleado en la solución de numerosos problemas dinámicos de elementos estructurales (ver, por ejemplo: [5-9]).

Agradecimientos.

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET PIA 1996-1997 y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Proyecto: Investigaciones básicas y aplicadas en mecánica del sólido. Director: Ing. Raúl Rossi). Los autores agradecen la colaboración de la Sra. María Susana Grenada en la la preparación del presente manuscrito.

Referencias:

- (1) H. Parkus, 1964. High temperature structure and materials. Proceedings 3rd. Symposium on Naval Structural Mechanics. Pergamon Press.
- (2) J.S. Przemieniecki. 1955. Transient temperatures and stresses in plates attained at high-speed flight. Journal of the Aero. Sciences Vol. 22 N° 5, 345-348.
- (3) P.A.A. Laura, R.H. Gutierrez, G. Sánchez Sarmiento y F.G. Basombrio. 1978. Thermal Stresses in Rectangular Plates: Variational and Finite Element Solutions. Nuclear Engineering and Design 47, 297-303.
- (4) B.A. Boley y J.H. Weiner. 1960. Theory of Thermal Stresses. John Wiley & Sons, New York.
- (5) P.A.A. Laura y B.F. Saffel. 1967. Study of small amplitude vibrations of clamped rectangular plates using polynomial approximations. The Journal of the Acoustical Society of America 41, 836-838.
- (6) P.A.A. Laura, J.C. Paloto y R.D. Santos. 1975. A note on vibrations and stability of a circular plate elastically restrained against rotation. Journal of Sound and Vibration 41, 177-180.
- (7) P.A.A. Laura y R. Duran. 1975. A note on forced vibrations of a clamped rectangular plate. Journal of Sound and Vibration 42, 129-135.
- (8) P.A.A. Laura, K.A. Susemihl, J.L. Pombo, L.E. Luisoni y R. Gelos. 1977. On the dynamic behavior of structural elements carrying elastically mounted concentrated masses. Applied Acoustics 10, 121-145.
- (9) P.A.A. Laura y D.R. Avalos. 1983. Variational analysis of a model for a piezoelectric polymer flexural plate hydrophone. Journal of the Acoustical Society of America 73, 1378-1383.

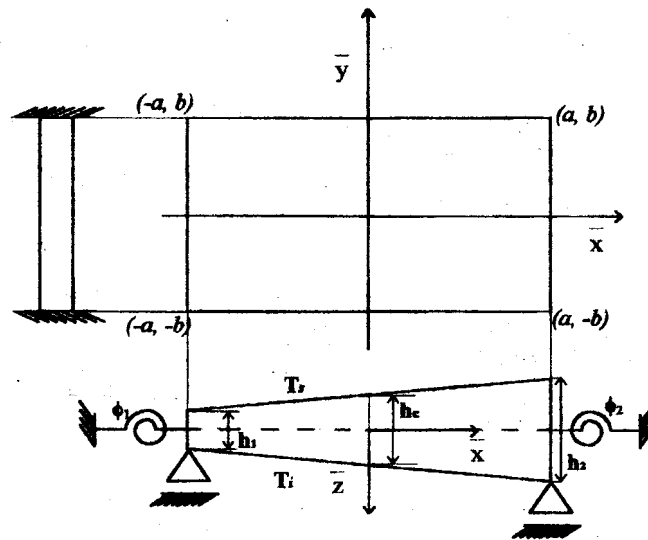


FIGURA 1 - Placa o Losa de Espesor No Uniforme Considerada en este Estudio

y	x									
		-1.00	-0.75	-0.50	-0.25	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
1.00	a)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	b)	-5.29	-6.67	-8.19	-9.87	-11.73	-13.80	-16.09	-18.56	-21.16
	c)	-5.29	-6.63	-8.03	-9.56	-11.33	-13.42	-15.83	-18.47	-21.16
	d)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.75	a)	0.00	1.18	3.13	4.37	4.37	3.31	1.78	0.49	0.00
	b)	-5.14	-6.65	-8.33	-10.15	-12.06	-14.06	-16.14	-18.36	-20.82
	c)	-5.24	-6.68	-8.29	-10.05	-11.96	-14.00	-16.19	-18.53	-21.06
	d)	0.00	0.02	0.03	0.01	-0.02	-0.08	-0.08	-0.06	0.00
0.50	a)	0.00	2.56	6.81	9.51	9.54	7.26	3.92	1.09	0.00
	b)	-4.97	-6.61	-8.42	-10.34	-12.29	-14.20	-16.10	-18.08	-20.39
	c)	-5.19	-6.68	-8.36	-10.19	-12.12	-14.14	-16.24	-18.47	-20.93
	d)	0.00	0.01	0.02	0.01	-0.01	-0.03	-0.05	-0.04	0.00
0.25	a)	0.00	3.14	8.38	11.73	11.80	9.00	4.89	1.36	0.00
	b)	-4.90	-6.58	-8.45	-10.40	-12.35	-14.24	-16.07	-17.96	-20.19
	c)	-5.17	-6.67	-8.34	-10.18	-12.09	-14.11	-16.20	-18.42	-20.87
	d)	0.00	.005	.006	.004	-.003	-.01	-0.01	-0.01	0.00
0.00	a)	0.00	3.25	8.68	12.16	12.24	9.36	5.09	1.43	0.00
	b)	-4.88	-6.58	-8.45	-10.41	-12.36	-14.24	-16.06	-17.93	-20.14
	c)	-5.17	-6.68	-8.33	-10.14	-12.06	-14.07	-16.17	-18.40	-20.85
	d)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.25	a)	0.00	3.14	8.38	11.73	11.80	9.00	4.89	1.36	0.00
	b)	-4.90	-6.58	-8.45	-10.40	-12.35	-14.24	-16.07	-17.96	-20.19
	c)	-5.17	-6.67	-8.34	-10.18	-12.09	-14.11	-16.20	-18.42	-20.87
	d)	0.00	-.005	-.006	-.004	.003	0.01	0.01	0.01	0.00
-0.50	a)	0.00	2.56	6.81	9.51	9.54	7.26	3.92	1.09	0.00
	b)	-4.97	-6.61	-8.42	-10.34	-12.29	-14.20	-16.10	-18.08	-20.39
	c)	-5.19	-6.68	-8.36	-10.19	-12.12	-14.14	-16.24	-18.47	-20.93
	d)	0.00	-0.02	-0.02	-0.01	0.01	0.04	0.05	0.04	0.00
-0.75	a)	0.00	1.18	3.13	4.37	4.37	3.31	1.78	0.49	0.00
	b)	-5.14	-6.65	-8.33	-10.15	-12.06	-14.06	-16.14	-18.36	-20.82
	c)	-5.24	-6.68	-8.29	-10.05	-11.96	-14.00	-16.19	-18.53	-21.06
	d)	0.00	-0.02	-0.03	-0.02	0.02	0.06	0.08	0.06	0.00
-1.00	a)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	b)	-5.29	-6.67	-8.19	-9.87	-11.73	-13.80	-16.09	-18.56	-21.16
	c)	-5.29	-6.63	-8.03	-9.56	-11.33	-13.42	-15.83	-18.47	-21.16
	d)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabla 2 - Deflexiones, momentos flectores y momentos torsores.

($\lambda=a/b=0.5$; $m/1/3$; $\nu=0.3$; $\theta_1=\theta_2=0$).

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} & \frac{W h_c 10^3}{\alpha a^2 (T_1 - T_2)} & \text{b)} & \frac{M_x 10^2}{E \alpha h^2 (T_1 - T_2)} \\
 & & \text{c)} & \frac{M_y 10^2}{E \alpha h_c^2 (T_1 - T_2)} \\
 & & \text{d)} & \frac{M_{xy} 10^2}{E \alpha h_c^2 (T_1 - T_2)}
 \end{array}$$

x y		-1.00	-0.75	-0.50	-0.25	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
		1.00	a) 0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	b) -5.29	-6.67	-8.19	-9.86	-11.72	-13.80	-16.09	-18.56	-21.16	
	c) -5.29	-6.62	-8.01	-9.54	-11.31	-13.41	-15.84	-18.48	-21.16	
	d) 0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.75	a) 0.00	0.38	1.01	1.40	1.38	1.03	0.54	0.14	0.00	
	b) -5.24	-6.68	-8.27	-10.02	-11.91	-13.96	-16.15	-18.51	-21.06	
	c) -5.27	-6.67	-8.22	-9.92	-11.79	-13.85	-16.11	-18.54	-21.13	
	d) 0.00	0.04	0.05	0.02	-0.03	-0.09	-0.12	-0.09	0.00	
0.50	a) 0.00	1.02	2.71	3.77	3.75	2.83	1.51	0.41	0.00	
	b) -5.16	-6.66	-8.33	-10.15	-12.07	-14.07	-16.16	-18.40	-20.88	
	c) -5.25	-6.69	-8.32	-10.11	-12.03	-14.08	-16.24	-18.55	-21.08	
	d) 0.00	0.04	0.05	0.02	-0.03	-0.09	-0.12	-0.01	0.00	
0.25	a) 0.00	1.50	3.99	5.57	5.57	4.22	2.27	0.62	0.00	
	b) -5.10	-6.65	-8.37	-10.22	-12.16	-14.13	-16.16	-18.30	-20.73	
	c) -5.23	-6.70	-8.36	-10.19	-12.14	-14.17	-16.29	-18.54	-21.03	
	d) 0.00	0.02	0.03	0.01	-0.01	-0.05	-0.07	-0.05	0.00	
0.00	a) 0.00	1.67	4.45	6.21	6.22	4.72	2.54	0.70	0.00	
	b) -5.08	-6.64	-8.38	-10.25	-12.19	-14.15	-16.16	-18.27	-20.67	
	c) -5.22	-6.70	-8.37	-10.21	-12.16	-14.20	-16.31	-18.54	-21.01	
	d) 0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
-0.25	a) 0.00	1.50	3.99	5.57	5.57	4.22	2.27	0.62	0.00	
	b) -5.10	-6.65	-8.37	-10.22	-12.16	-14.13	-16.16	-18.30	-20.73	
	c) -5.23	-6.70	-8.36	-10.19	-12.14	-14.17	-16.29	-18.54	-21.03	
	d) 0.00	-0.02	-0.03	-0.01	0.01	0.05	0.07	0.05	0.00	
-0.50	a) 0.00	1.02	2.71	3.77	3.75	2.83	1.51	0.41	0.00	
	b) -5.16	-6.66	-8.33	-10.15	-12.07	-14.07	-16.16	-18.40	-20.88	
	c) -5.25	-6.69	-8.32	-10.11	-12.03	-14.08	-16.24	-18.55	-21.06	
	d) 0.00	-0.04	-0.05	-0.02	0.03	0.09	0.12	0.01	0.00	
-0.75	a) 0.00	0.38	1.01	1.40	1.38	1.03	0.54	0.14	0.00	
	b) -5.24	-6.68	-8.27	-10.02	-11.91	-13.96	-16.15	-18.51	-21.06	
	c) -5.27	-6.67	-8.22	-9.92	-11.79	-13.85	-16.11	-18.54	-21.13	
	d) 0.00	-0.04	-0.05	-0.02	-0.03	0.09	0.12	0.09	0.00	
-1.00	a) 0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	b) -5.29	-6.67	-8.19	-9.86	-11.72	-13.80	-16.09	-18.56	-21.16	
	c) -5.29	-6.62	-8.01	-9.54	-11.31	-13.41	-15.84	-18.48	-21.16	
	d) 0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	

Tabla 3 - Deflexiones, momentos flectores y momentos torsores.

 $(\lambda = a/b = 1.0 ; m = 1/3 ; \nu = 0.3 ; \theta_1 = \theta_2 = 0)$

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} & \frac{W h_c 10^3}{\alpha a^2 (T_i - T_s)} & \text{b)} & \frac{M_x 10^2}{E \alpha h_c^2 (T_i - T_s)} \\
 \text{c)} & \frac{M_y 10^2}{E \alpha h_c^2 (T_i - T_s)} & \text{d)} & \frac{M_{xy} 10^2}{E \alpha h_c^2 (T_i - T_s)}
 \end{array}$$

y \ x	-1.00	-0.75	-0.50	-0.25	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
1.00	a)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	b)	-5.29	-6.68	-8.23	-9.94	-11.82	-13.90	-16.16	-18.58
	c)	-5.29	-6.68	-8.14	-9.79	-11.64	-13.73	-16.05	-18.55
	d)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.75	a)	0.00	0.05	0.12	0.17	0.18	0.12	0.05	0.01
	b)	-5.28	-6.69	-8.28	-9.99	-11.88	-13.95	-16.18	-18.58
	c)	-5.28	-6.68	-8.23	-9.94	-11.82	-13.89	-16.15	-18.58
	d)	0.00	0.02	0.02	0.01	-0.02	-0.05	-0.06	0.04
0.50	a)	0.00	0.14	0.37	0.50	0.48	0.34	0.17	0.04
	b)	-5.27	-6.69	-8.28	-10.03	-11.93	-13.98	-16.19	-18.57
	c)	-5.28	-6.70	-8.28	-10.03	-11.94	-14.00	-16.21	-18.59
	d)	0.00	0.02	0.03	0.01	-0.02	-0.05	-0.07	-0.04
0.25	a)	0.00	0.22	0.57	0.77	0.74	0.54	0.27	0.07
	b)	-5.28	-6.69	-8.29	-10.05	-11.98	-14.01	-16.20	-18.58
	c)	-5.28	-6.70	-8.31	-10.09	-12.01	-14.06	-16.25	-18.60
	d)	0.00	0.01	0.02	0.01	-0.01	-0.03	-0.04	-0.03
0.00	a)	0.00	0.24	0.64	0.87	0.84	0.61	0.30	0.07
	b)	-5.28	-6.69	-8.29	-10.06	-11.97	-14.01	-16.20	-18.58
	c)	-5.28	-6.70	-8.32	-10.10	-12.03	-14.08	-16.26	-18.60
	d)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabla 4 - Deflexiones, momentos flectores y momentos torsores.

($\lambda = a/b = 2$; $m = 1/3$; $\nu = 0.3$; $\theta_1 = \theta_2 = 0$)

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} & \frac{W h_c 10^3}{\alpha a^2 (T_i - T_s)} & \text{b)} & \frac{M_x 10^2}{E \alpha h_c^2 (T_i - T_s)} \\
 \text{c)} & \frac{M_y 10^2}{E \alpha h_c^2 (T_i - T_s)} & \text{d)} & \frac{M_{xy} 10^2}{E \alpha h_c^2 (T_i - T_s)}
 \end{array}$$

