

ELEMENTO MULTINODAL DE VIGA CON CURVATURA PLANA. DESARROLLO
MEDIANTE ENFOQUE LAGRANGIANO

Juan Möller & Eduardo Aqueveque
Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D, Temuco, CHILE

RESUMEN

En este trabajo se formula y presenta las matrices de rigidez y de masa para un elemento finito de viga de n -nudos con curvatura en el plano. Este desarrollo se basa en la teoría de la viga de Timoshenko, utiliza funciones de forma Lagrangianas y considera el enfoque de integración numérica reducida, lo que conduce a un elemento de amplia aplicabilidad en estructuras curvas reticulares planas. Utilizando un programa computacional original ad-hoc se ha estudiado y validado el comportamiento del elemento aplicándolo a casos típicos, de cuyos resultados se incluye uno de los gráficos representativos.

ABSTRACT

The stiffness and mass matrices of an n -node 2-D curved beam element are derived and introduced in this paper. Lagrangian shape functions are used for its derivation. The element is based upon the Timoshenko's beam theory, and the reduced integration approach is considered. This leads to an element of a wide application range within the 2-D curved framed structures. One representative result from the validation of this element is also included.

INTRODUCCION

El primer elemento finito de viga estaba basado en la teoría de flexión de viga de Euler-Bernoulli convencional, donde los efectos del esfuerzo cortante transversal pueden ser despreciados [1]. Las ecuaciones que toman en consideración la deformación cortante transversal e inercia rotacional fueron dadas por Timoshenko [2,3], y explicadas por Cowper [4].

Un enfoque simplificado para la derivación de elementos de viga de Timoshenko fue dada por Hinton & Owen [5], donde las secciones normales al eje neutro antes de la deformación se asume que permanecen rectas, pero no obligadamente normales. Al examinar el comportamiento de tal elemento en vigas con diferente razón grosor/longitud se encontró que las vigas más delgadas eran sobre-rígidas. Se ha sugerido como fórmula para superar este fenómeno, denominado bloqueo, realizar una integración numérica reducida.

El análisis de estructuras curvas mediante elementos finitos presenta dificultades especiales a causa de su geometría y el desarrollo de elementos finitos curvos eficientes ha sido objeto de un renovado esfuerzo de investigación [6,10]

En este trabajo se presenta un enfoque alternativo para la formulación de un elemento finito de viga curvo. Este es un elemento de n -nudos basado en la teoría de la viga de Timoshenko, en el cual se considera la opción de integración numérica reducida a fin de superar el efecto de bloqueo. Se emplea funciones de forma Lagrangianas para definir la geometría y el campo de desplazamientos del elemento. El enfoque utilizado conduce a un elemento de gran aplicabilidad en el análisis de estructuras reticulares curvas de 2-D. Se incluye uno de los resultados representativos en una aplicación del elemento a una estructura curva.

FORMULACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Considérese un elemento de viga curvo de n-nudos, tal como el mostrado en la figura 1, donde el eje local 'x' es tangente al eje neutro de la viga, y ésta se deforma en el plano global X-Y, tal como se ve en la figura 2.

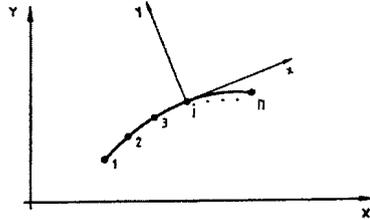


Figura 1: Elemento de viga curvo de n-nudos

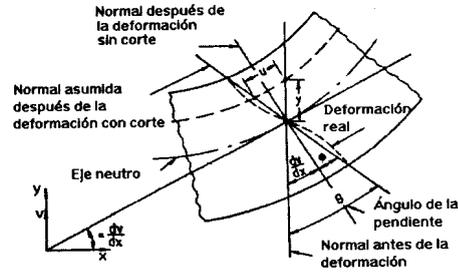


Figura 2: Viga curva deformada

Las asunciones usadas en este enfoque son similares a aquellas empleadas en Referencia 10.

Las componentes del campo de desplazamiento nodal en el nudo i-ésimo se definen como sigue:

u_i^0 , desplazamiento axial
 v_i , desplazamiento vertical
 θ_i , pendiente del eje neutro
 Φ_i , ángulo por efecto cortante

$$\Phi_i = \theta_i - v_{i,x} \quad (1)$$

Así, el vector de desplazamiento nodal se anota como sigue

$$\underline{\delta} = \{ \underline{\delta}_1 \quad \underline{\delta}_2 \} \quad (2)$$

donde,

$$\underline{\delta}_1 = \{ u_1^0 \quad v_1 \quad \theta_1 \dots u_n^0 \quad v_n \quad \theta_n \} \quad (3)$$

$$\underline{\delta}_2 = \{ \phi_1 \quad \phi_2 \dots \phi_n \} \quad (4)$$

La geometría del elemento puede describirse en términos de un parámetro intrínseco ξ definido en el dominio [0,1] por medio de las funciones de forma Lagrangianas, como sigue:

$$X(\xi) = \sum_{j=1}^n X_j N_j(\xi) \quad (5)$$

y similarmente $Y(\xi)$, donde,

$$N_j(\xi) = \prod_{r=1}^n \prod_{r \neq j} \frac{(n-1)\xi - (r-1)}{j-r} \quad (6)$$

$$\xi_i = \frac{i-1}{n-1} \quad (7)$$

El campo de funciones de desplazamiento puede definirse también por medio de las expresiones Lagrangianas, como sigue:

$$u^o(\xi) = \sum_{j=1}^n u_j^o N_j(\xi) \quad (8)$$

y similarmente para $v(\xi)$ y $\theta(\xi)$. En cuanto a las componentes de desplazamiento en cualquier punto (x,y,z) dentro del elemento, se tiene que: $\theta(x) = dv(x)/dx + \phi(x)$, $u(x,y,z) = -y\theta(x)$, $v(x,y,z) = v(x)$ y $w(x,y,z) = 0$.

Empleando las relaciones esfuerzo-deformación, puede demostrarse que las componentes de deformación, en cualquier punto, pueden expresarse como sigue:

$$\epsilon_x^o = \underline{B}_o \underline{\delta} \quad \epsilon_x^b = -y \underline{B}_b \underline{\delta} \quad \gamma_{xy} = \underline{B}_y \underline{\delta} \quad (9)$$

donde, ϵ_x^o , ϵ_x^b , y γ_{xy} son la deformación normal debido a carga axial, deformación normal debido a flexión y deformación cortante respectivamente, y,

$$\underline{B}_o = \left[\begin{array}{cccc} \frac{dN_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & 0 & \dots \end{array} \right] \quad (10)$$

y similarmente \underline{B}_b y \underline{B}_y , donde, $dN/dx = (dN_j/d\xi)/J(\xi)$, ya que la longitud infinitesimal ds del elemento es $dx = ds = J(\xi)ds$. Además,

$$\frac{dN_j}{d\xi} = \sum_{r=1, r \neq j}^n \left(\frac{n-1}{j-r} \right) N_j \quad (11)$$

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dX}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dY}{d\xi} \right)^2} \quad (12)$$

$$\frac{dX}{d\xi} = \sum_{j=1}^n X_j \frac{dN_j}{d\xi} \quad (13)$$

y similarmente para $dY/d\xi$.

Las componentes de esfuerzo en cualquier punto del elemento curvo pueden expresarse como $\sigma_x = E\epsilon_x$, y $\tau_{xy}(x,y,z) = G\gamma_{xy}(x,y,z)$, desde donde se tiene que:

$$\sigma_x^o = E \epsilon_x^o, \quad \sigma_x^b = E \epsilon_x^b, \quad \bar{\tau}_{xy}(x) = G k \bar{V}_{xy}(x) \quad (14)$$

donde, σ_x^o , σ_x^b , son esfuerzos normales debido a carga axial y momento flexor respectivamente, y $\bar{\tau}_{xy}(x)$ el esfuerzo cortante medio en 'x' en términos de la deformación cortante media en ese punto y el factor de forma k dado por Cowper [4].

La energía de deformación interna del elemento puede anotarse entonces como:

$$U = U_o + U_b + U_s \quad (15)$$

donde,

$$U_o = \frac{1}{2} \bar{\delta}^t \left(\int_0^L EA(x) \underline{B}_o^t \underline{B}_o dx \right) \bar{\delta} \quad (16)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \bar{\delta}^t \left(\int_0^L EI_z(x) \underline{B}_b^t \underline{B}_b dx \right) \bar{\delta} \quad (17)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \bar{\delta}^t \left(\int_0^L kGA(x) \underline{B}_s^t \underline{B}_s dx \right) \bar{\delta} \quad (18)$$

donde $A(x)$ es el área de la sección e $I(x)$ es el momento de inercia de la sección en el punto 'x' con respecto al eje 'z'.

De las ecuaciones previas, y aplicando el teorema de energía potencial total, es posible demostrar que la matriz de rigidez del elemento de viga curvo de n-nudos puede expresarse como sigue:

$$\underline{K} = \underline{K}_o + \underline{K}_b + \underline{K}_s \quad (19)$$

donde,

$$\underline{K}_o = \int_0^1 E A(x) \underline{B}_o^t \underline{B}_o J d\xi \quad (20)$$

$$\underline{K}_b = \int_0^1 E I_z(x) \underline{B}_b^t \underline{B}_b J d\xi \quad (21)$$

$$\underline{K}_s = \int_0^1 k G A(x) \underline{B}_s^t \underline{B}_s J d\xi \quad (22)$$

Estas integrales pueden ser evaluadas numéricamente por medio de la técnica de cuadratura Gaussiana [11], la cual, después de modificarse la definición original del intervalo para adecuarlo al

definido para ξ , puede escribirse como sigue:

$$\int_0^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^m w_i f(a_i) \quad (23)$$

donde, m es el numero de puntos de cuadratura, w_i el coeficiente de peso y a_i el parámetro derivado de la expresion de cuadratura Gaussiana original. Así las matrices componentes de rigidez pueden ser reescritas de la siguiente forma:

$$\underline{K}_o = \sum_{i=1}^m w_i E A \underline{B}_o^t \underline{B}_o J(a_i) \quad (24)$$

y similarmente para \underline{K}_b y \underline{K}_c .

El criterio de integración reducida implica definir m menor que el número de nudos del elemento. Este enfoque es recomendado para obtener \underline{K} , en donde está involucrado el efecto cortante.

FORMULACION DE LA MATRIZ DE MASA

Las componentes de velocidad en cualquier punto local (x,y,z) dentro del elemento pueden ser definidas como sigue:

$$\dot{u}_{(x,y,z)} = \dot{u}_0 - y \dot{\theta} , \quad \dot{v}_{(x,y,z)} = \dot{v}_{(x,t)} , \quad \dot{\theta}_{(x,y,z)} = \dot{\theta}_{(x,t)} \quad (25)$$

Por lo tanto, las funciones de velocidad pueden definirse en términos de las funciones Lagrangianas de la siguiente forma:

$$\dot{u}^0(\xi, t) = \sum_{j=1}^n \dot{u}_j^0(t) N_j(\xi) \quad (26)$$

$$\dot{v}(\xi, t) = \sum_{j=1}^n \dot{v}_j(t) N_j(\xi) \quad (27)$$

$$\dot{\theta}(\xi, t) = \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j(t) N_j(\xi) \quad (28)$$

Así, las componentes de velocidad pueden anotarse en términos del vector de velocidad nodal, como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \dot{\delta}(t) \quad (29)$$

$$= \underline{N} \dot{\delta} \quad (30)$$

La energía cinética del elemento se define como sigue:

$$KE = \left(\frac{1}{2} \right) \iiint [\dot{u}^2 + \dot{v}^2] \rho \, dx \, dy \, dz \quad (31)$$

A partir de esta expresión y las definiciones anteriores se obtiene que:

$$KE = \left(\frac{1}{2} \right) \dot{\delta}^t \left\{ \int_L \mathbf{N}^t \underline{D}_d \mathbf{N} \, dx \right\} \dot{\delta} \quad (32)$$

donde,

$$\underline{D}_d = \rho \begin{bmatrix} A(x) & 0 & 0 \\ 0 & A(x) & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (33)$$

Finalmente, la matriz de masa \underline{M} del elemento se obtiene de la energía cinética como sigue:

$$KE = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t \underline{M} \dot{\delta} \quad (34)$$

donde,

$$\underline{M} = \int_0^L \mathbf{N}^t \underline{D}_d \mathbf{N} \, ds = \int_0^1 \mathbf{N}^t \underline{D}_d \mathbf{N} \, J \, d\xi \quad (35)$$

APLICACION

La estructura curva representada en la Figura 3 fue utilizada como uno de los casos tipos de análisis estático y dinámico para propósitos de estudio y validación del elemento formulado. Para ello fue necesario elaborar previamente un programa computacional ad-hoc en base a este elemento. En este programa, se dejó como opción abierta al usuario la definición de nudos por elemento.

La estructura curva fue modelada con diferentes magnitudes de carga y razones diámetro-longitud de viga. El número de nudos se varió entre dos y cinco por elemento. En el caso del análisis estático la información de referencia fue proporcionada por la solución analítica

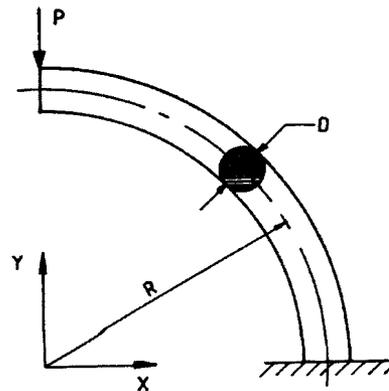
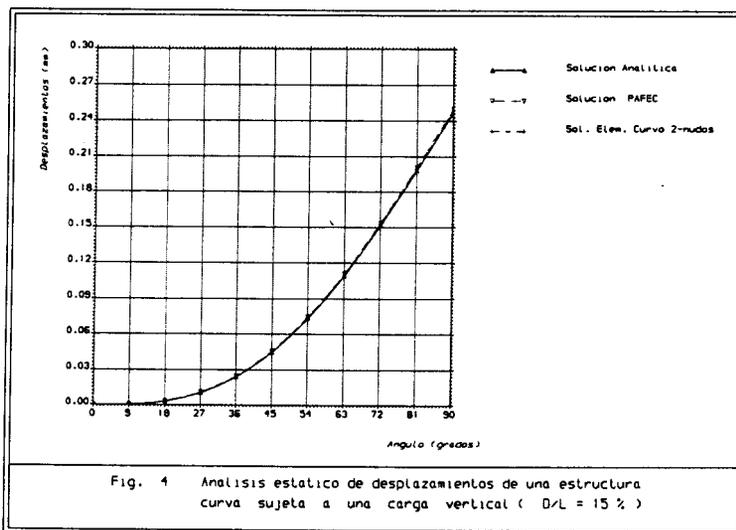


Figura 3: Estructura de viga curva, R= 1000 mm

conocida de esta estructura [12], en tanto que en el análisis dinámico se utilizó como información comparativa aquellos resultados obtenidos empleando elementos finitos rectos y curvos de dos nudos incluidos en paquetes computacionales comerciales.

Uno de los resultados representativos obtenidos se presenta en forma gráfica en la Figura 4, el cual corresponde al análisis estático de desplazamientos de la estructura curva considerada.



CONCLUSIONES

En base a la teoría de viga de Timoshenko, el uso de funciones de forma Lagrangianas y un algoritmo apropiado, se ha derivado y presentado en este trabajo las matrices de rigidez y de masa de un elemento finito de viga curvo de n -nudos de 2D. Se ha considerado la opción de integración numérica reducida particularmente para obtener la componente de rigidez K_c , donde el efecto cortante está involucrado, lo cual minimiza su efecto distorsionante en vigas más esbeltas. Así, este enfoque conduce a un elemento de mayor aplicabilidad en el campo de las estructuras curvas reticulares planas al poder extenderse su uso también a aquellas con mayor razón de esbeltez.

Utilizando un language computacional apropiado, por ejemplo FORTRAN, este elemento puede ser codificado e incorporado como una opción adicional a la librería de elementos finitos de un programa computacional de uso más general. Opción que lo capacitará para un análisis estático y dinámico del tipo de estructuras señalado.

La definición de nudos por elemento puede ser manejada como una alternativa abierta al usuario del programa, a fin de aprovechar mejor el potencial multinodal de este elemento y así facilitar y hacer más eficiente su uso en la modelación y análisis de los casos.

En cuanto al estudio y validación del elemento formulado se destaca lo siguiente:

- Se obtuvieron resultados aceptables y consistentes a partir de una relación de esbeltez (espesor/logitud) igual o mayor a un 10%.
- El enfoque de integración reducida tiene una incidencia favorable en la precisión de los resultados obtenidos, respecto de aquellos logrados sin tal opción.
- El uso de mayor número de nudos por elemento también tiene incidencia favorable en la precisión del resultado, pero principalmente mejora la eficiencia del proceso de discretización del modelo a analizar.

RECONOCIMIENTO

A la Dirección de Investigación de la Universidad de La Frontera por su apoyo a este desarrollo.

REFERENCIAS

- [1] Leckie, F.A., Lindberg, G.M., *The effect of lamped parameters on beam frequencies*, Aeronautical Quarterly, Vol.14, pp 224 - 240, 1963.
- [2] Timoshenko, S.P., *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, Phil. Magazine, Vol.41, pp 744 - 745, 1921.
- [3] Timoshenko, S.P., *On the transverse vibrations of bars of uniform cross - section*, Phil. Magazine, Vol.43, pp 125-131, 1922.
- [4] Cowper, G.P., *The shear coefficient in Timoshenko beam theory*, J. Applied Mechanics, Vol.33, pp 315 - 330, 1966.
- [5] Hinton, E., Owen, D.R., *An Introduction to Finite Element Computation*, Pineridge Press, London, 1979.
- [6] Babu, C.R., Prathap, G.A., *A linear thick curved beam element*, J.Numerical Methods in Eng., Vol.23, pp 1313-1328, 1986.
- [7] Palanithan, R., Chandrakara, P., *Curved beam element stiffness matrix*, J. Computers and Structures, Vol.21, pp 663-669, 1985.
- [8] Prathap, G.A., Babu, C.R., *An isoparametric quadratic thick curved beam element*, J.Numerical Methods in Eng., Vol.23, pp 1583-1600, 1986.
- [9] Benedetty, A., Tralli, A., *A new hibrid f.e. model for arbitrarily curved beam-I.Linea analysis*, J.Computers and Structures, Vol.33, pp 1437-1449, 1989.
- [10] Balsubramanian, I., Prathap, G., *A field consistent higher-order curved beam element for static and dynamic analysis of stepped arches*, J. Computers and Structures, Vol.33, pp 281-288, 1989.
- [11] Kopal, Z., *Numerical Analysis*, London, Chapman & Hall, 1961.
- [12] El-Zafrany, A., *An Advanced Finite Element System for Engineering Analysis*. Ph.D.Thesis, Cranfield Institute of Technology, England, 1983.