

ELEMENTOS FINITOS DE DIFERENTES ÓRDENES PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDAD PLANA Y MEZCLAS DE SUS MALLAS

Sebastián Toro^{*}, Victorio Sonzogni[†], Carlos Neuman[‡]

^{*} GIMNI, Universidad Tecnológica Nacional, F.R. Santa Fe.
Lavaise 610, 3000 Santa Fe.
e-mail: storo@frsf.utn.edu.ar

[†] Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)
INTEC, CONICET, Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
e-mail: sonzogni@intec.unl.edu.ar

[‡] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Litoral
Santiago del Estero 2829, 3000 Santa Fe, Argentina
e-mail: cneuman@fiquis.unl.edu.ar

Palabras clave: Elementos finitos, Error de discretización, Mallas compuestas, Mejoramiento de la solución numérica.

Resumen. *En este trabajo se muestran resultados de la implementación de elementos finitos triangulares y cuadrangulares en elasticidad plana, con diferentes grados de sus funciones de forma. Se utiliza un problema testigo con solución exacta para calcular los errores exactos de la aproximación numérica. Se utiliza además la técnica de mallas compuestas para obtener soluciones precisas. En este marco se muestran resultados para diversas mezclas de los elementos implementados. Se calculan los coeficientes para combinación de mallas a partir de la extrapolación de Richardson y también se realizó una búsqueda experimental de los coeficientes óptimos para cada combinación. Se analizan los resultados obtenidos y las conclusiones a las que se arriba frente a las posibilidades combinación de mallas de igual o de diferente orden de sus polinomios interpoladores.*

1 INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos es una técnica numérica muy utilizada en ingeniería. La solución numérica que brinda este método es una aproximación a la solución exacta. El error de aproximación depende del tipo de elemento y sus funciones de forma, y de la cantidad de nodos e incógnitas del modelo (figura 1). Así soluciones que tengan menores errores de discretización requieren una mayor cantidad de elementos finitos y nodos. Esto conlleva, para grandes problemas numéricos, mayores requerimientos de almacenamiento de variables y tiempo de procesamiento. El ingeniero debe lidiar con este compromiso entre precisión (menor error) y costo computacional.

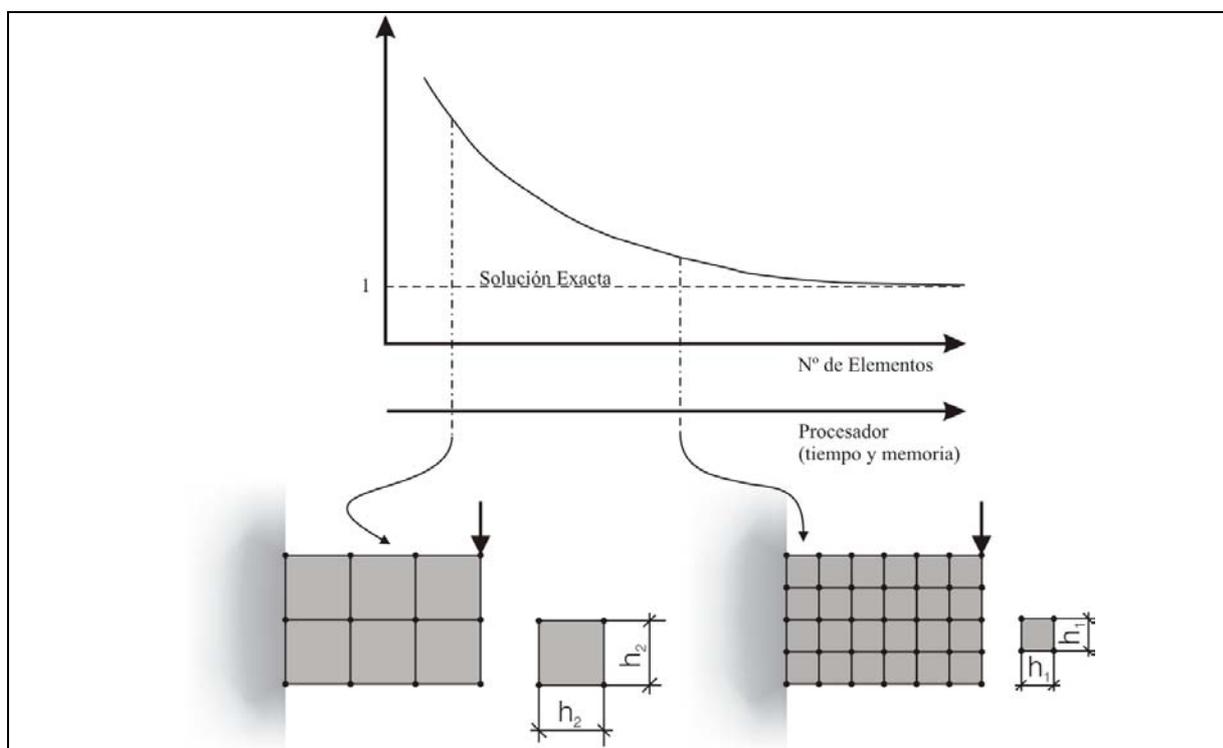


Figura 1. Error de discretización de la solución numérica.

Un problema a la hora de intentar conocer el error de la solución numérica es que la solución exacta no es conocida. En este sentido se han desarrollado métodos de estimación de errores, que busca de diversas formas obtener la magnitud del error de una determinada solución de un problema, y con la posibilidad de utilizarse para determinar, en forma aproximada, el tamaño de la malla necesaria para obtener una cierta magnitud de error. Así existen estimadores *a priori* y *a posteriori*. Los primeros tienen utilidad teórica al hacer un análisis de la convergencia de distintos algoritmos. Los segundos se utilizan en la práctica y se basan en utilizar una solución numérica calculada del problema.

Un avance en la obtención de soluciones precisas es realizar lo que se conoce como mallado adaptable. Allí, mediante los estimadores de error se ubican las posiciones donde se

producen los mayores errores para refinar la malla prioritariamente en esas zonas (por ejemplo, puntos singulares).

Otro camino para disminuir el error de aproximación es mejorar el elemento. Esto se puede a veces realizar aumentando el grado de los polinomios de interpolación de las funciones de forma o cambiándolas de alguna manera, como en los elementos compuestos.

En trabajos anteriores^{1,2} se ha introducido el concepto de malla compuesta, que utiliza mallas diferentes cada una con su error intrínseco de aproximación, que mezcladas convenientemente permiten obtener una solución muy precisa. En este trabajo se han implementado (en un programa de cálculo realizado en el Grupo GIMNI) algunos elementos finitos que resultan de combinación de distintos elementos, siguiendo el concepto de las mallas compuestas.

En lo que sigue del trabajo, se presenta el concepto de mallas compuestas y elementos compuestos.

2 MALLA COMPUESTA

En los elementos compuestos se hace la suposición de que, ocupando el mismo espacio, hay dos o más elementos superpuestos de distinto tipo (de diferentes errores intrínsecos de aproximación), ya sea por su tamaño o por la función interpolación, unidos en los nodos coincidentes. Cada elemento colabora en la matriz elemental multiplicada previamente por un factor de colaboración según el grado de libertad correspondiente de los nodos (posición en la matriz). Matricialmente se puede expresar de la siguiente forma:

$$(\alpha [A_1^e] + (1 - \alpha) [A_2^e]) [u_{1,2}^e] = \alpha [f_1^e] + (1 - \alpha) [f_2^e] \quad (1)$$

donde:

$[A_1^e]$ y $[A_2^e]$: Matrices elementales de los elementos que forman el elemento combinado.

$[u_{1,2}^e]$: Desplazamiento de los nodos del elemento combinado.

$[f_1^e]$ y $[f_2^e]$: Fuerzas nodales de los elementos que forman el elemento combinado.

α : Factor de participación.

En el caso de combinación de elementos con distinto número de nodos o de falta de coincidencia de algunos, las filas y columnas de las matrices elementales correspondientes a los grados de libertad de esos nodos se llenan con ceros, de tal forma que queden con el mismo número de filas y columnas que nodos y grados de libertad del elemento combinado.

Lo mismo se puede expresar en función de la matriz global, como si se discretizara la misma estructura con cada elemento que forma el elemento compuesto y después se superpusieran. Igual que antes acá también se debe llenar con ceros las zonas de la matriz global correspondientes a los nodos que tiene que tiene por exceso la estructura discretizada con el otro elemento.

$$(\alpha [A_1] + (1 - \alpha) [A_2]) [u_{1,2}] = \alpha [f_1] + (1 - \alpha) [f_2] \quad (2)$$

siendo:

$[A_1]$ y $[A_2]$: Matrices globales de la estructura discretizada con cada elemento individual.

$[u_{1,2}]$: Desplazamiento nodales de la estructura.

$[f_1]$ y $[f_2]$: Fuerzas exteriores nodales sobre la estructura.

α : Factor de participación.

La idea de los elementos compuestos se ha utilizado en el cálculo de estructuras constituidas por una mezcla de materiales de características distintas, como por ejemplo el suelo saturado, mezcla de suelo y agua, en donde se combina dos elementos, uno que representa el suelo y el otro el agua, multiplicados por un factor de participación proporcional al volumen de cada material en la mezcla.

Una forma de interpretar y analizar el elemento compuesto, sus resultados y calcular el factor de participación es analizando la técnica de extrapolación de Richardson para disminución del error.

3 EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

Este es un método desarrollado para el mejoramiento de resultados (disminución del error) a partir del cálculo de dos mallas y una extrapolación de los valores de las mismas. Consiste en calcular una estructura con dos mallas distintas de tal forma que la dimensión de los elementos resulte una proporción entera (por ejemplo uno la mitad del otro), por lo que se tendrá coincidencia espacial de algunos de los nodos de los dos mallados. A los resultados obtenidos (por ejemplo desplazamientos) en esos nodos se pueden extrapolar para obtener una mejor solución.

La solución numérica para dos mallas de distinto tamaño de elementos se expresa como:

$$\begin{aligned} [A_1][u_1] &= [f_1] \Rightarrow [u_1] = [A_1]^{-1} [f_1] \\ [A_2][u_2] &= [f_2] \Rightarrow [u_2] = [A_2]^{-1} [f_2] \end{aligned} \quad (3)$$

siendo:

$[A_1]$ y $[A_2]$: Matrices globales de la estructura con los dos tipos de mallados (mallas 1 y 2).

$[u_1]$ y $[u_2]$: Desplazamiento nodales de la estructura con los dos tipos de mallados.

$[f_1]$ y $[f_2]$: Fuerzas exteriores nodales sobre la estructura con los dos tipos de mallados.

Cada uno de las soluciones obtenidas tiene un error e distinto, menor según sea más fina la malla (convergencia monótona). La solución exacta a partir de la solución del M.E.F., bajo ciertas condiciones (por ejemplo de no singularidad), se puede expresar como un desarrollo de la serie de Taylor:

$$u_e = u + C h^{p+1} + O(h^q) \quad \wedge \quad q > p+1 \quad (4)$$

siendo:

u_e : Solución exacta.

u : Solución aproximada del M.E.F.

h : Tamaño de la malla, si el elemento es cuadrado, o valor representativo del tamaño en caso de mallas irregulares.

p : Grado del polinomio de interpolación del elemento.

C : Constante que depende del tipo de problema, de la geometría, de las cargas, de la forma del elemento, de la función de interpolación, entre otras. Es por lo tanto muy variable y difícil de calcularse, pero es posible obtenerla experimentalmente con cierta facilidad.

$O(h^q)$: Esto indica que el término faltante (resto) es del orden del tamaño de la malla elevado a un valor q mayor que $p+1$, por lo que el error de la discretización es el término $C h^{p+1}$ más otro término más pequeño.

Dados dos mallados distintos, donde hay coincidencia de algunos nodos, se puede hacer combinación lineal con las soluciones obtenidas en esos nodos (en igual posición del espacio se tiene la misma solución exacta).

$$\begin{aligned}
 u_e &= u_1 + C_1 h_1^{p_1+1} + O(h_1^{q_1}) \quad \times \alpha \\
 &+ \\
 u_e &= u_2 + C_2 h_2^{p_2+1} + O(h_2^{q_2}) \quad \times (1-\alpha) \\
 \hline
 u_e &= u_1 \alpha + u_2 (1-\alpha) + C_1 h_1^{p_1+1} \alpha + C_2 h_2^{p_2+1} (1-\alpha) + O(h_1^{q_1}) \alpha + O(h_2^{q_2}) (1-\alpha)
 \end{aligned} \tag{5}$$

La solución extrapolada o interpolada se establece como la siguiente:

$$u_{1,2}^R = u_1 \alpha + u_2 (1-\alpha) \tag{6}$$

Por lo tanto el error es:

$$e_{1,2}^R = C_1 h_1^{p_1+1} \alpha + C_2 h_2^{p_2+1} (1-\alpha) + O(h_1^{q_1}) \alpha + O(h_2^{q_2}) (1-\alpha) \tag{7}$$

Si los valores de α se determinan de tal forma que anulen los dos primeros términos del error (expresión 7) se tiene que el error que se obtiene de la solución interpolada es menor:

$$e_{1,2}^R = O(\max(h_1^{q_1}, h_2^{q_2})) \tag{8}$$

Por lo indicado el factor de participación α se obtiene como:

$$C_1 h_1^{p_1+1} \alpha + C_2 h_2^{p_2+1} (1-\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1 - \frac{C_1 h_1^{p_1+1}}{C_2 h_2^{p_2+1}}} \tag{9}$$

En el caso de la extrapolación de Richardson, donde se hace la combinación lineal de elementos con la misma función de interpolación, se tiene que $p_1 = p_2 = p$, $h_2 = d h_1$ y $C_1 = C_2$, esto último debido a que se trata del mismo punto en el espacio y el mismo grado de la función interpolación en los dos elementos. Se tiene entonces que:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{1}{d^{p+1}}} \quad (10)$$

En este trabajo se incorpora elementos compuestos que combinan elementos con polinomios de un grado de diferencia y dimensiones distintas, por lo que se determina el factor de participación también para cuando $p_2 = p_1 - 1 = p - 1$ y $h_2 = d h_1 = d h$:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{C_1 h}{C_2 d^p}} \quad (11)$$

Como se dijo anteriormente debido a la similitud de conceptos entre la extrapolación de Richardson y los elementos compuestos, se puede llegar a usar los valores de los factores de participación determinados para estos últimos, esto se verifica posteriormente y se ve la diferencia entre ellos. Permite también analizar de que depende el factor de participación, donde se ve que en el primer caso no depende del tamaño de la malla (representado por h) y en el segundo sí. En ambos casos, se debe entender que el valor p de la serie de Taylor no es siempre igual al grado de polinomio de aproximación, sino que varía de problema a problema y en el mismo problema, dependiendo de la posición del nodo. En el caso de puntos singulares, ya sea de cargas o geométrico, la variación es mucho más grande, y aumenta a medida que se acerca a él.

La ventaja que presenta los elementos compuestos sobre la extrapolación de Richardson es que en esta se debe resolver dos sistemas de ecuaciones globales, mientras que en los primeros solo una y, aunque se tenga que hacer varias operaciones previas adicionales, se ahorra en tiempo de cálculo. Otra es que en la extrapolación de Richardson, el mejoramiento de los resultados se realiza únicamente en los nodos coincidentes de los elementos que forman el elemento compuesto, mientras que en el compuesto se obtiene una mejora en todos los nodos, aunque en los nodos sin coincidencia esta es menor.

4 ELEMENTOS IMPLEMENTADOS

Se presentan los elementos que fueron incorporados al programa de cálculo de estructuras bidimensionales. En los elementos simples se indicará las funciones de forma. En los elementos compuestos se mostrará los elementos que lo forman y los factores de participación calculados por dos vías:

- i) obtenidos a partir de las fórmulas deducidas de la extrapolación de Richardson; y
- ii) minimizando el error.

Como representación del error se utilizó la norma de error L_2 de los valores obtenidos únicamente en los grados de libertad (gdl) del modelo numérico, es decir en las dos componentes de desplazamiento en cada nodo. La norma del error se obtiene como:

$$|e|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{NGDLT} (e)_i^2} \quad (12)$$

donde:

NGDLT: Número de grados de libertad total del modelo numérico.

$(e)_i$: Error de la solución obtenido en el grado de libertad i , $(e)_i = (u)_i - (u_e)_i$.

$(u)_i$: Solución numérica (aproximada) en el gdl i .

$(u_e)_i$: Solución exacta en el gdl i (obtenida por ejemplo con las ecuaciones de la figura 9).

El factor de participación, α_{L_2} , se obtiene, experimentalmente, calculando varias veces la estructura de referencia con distintos factores de participación y evaluando sus respectivas normas L_2 del error exacto, y adoptando el que produce el menor valor de la norma L_2 (recta tangente horizontal en la curva norma L_2 - factor de participación). En todos los elementos compuestos se calculó este factor de participación para dos refinamientos, de 4 y 36 elementos, para ver la variabilidad del mismo con el tamaño de la malla, cuestión denotada en las fórmulas de la interpolación de Richardson al depender de h .

A cada elemento por organización se le dio un nombre con el que se denomina dentro del programa del cálculo y de este informe. Este nombre se indica entre paréntesis al lado de la descripción del elemento. En las figuras 2 a 8 se muestran los elementos implementados.

En las figuras 2, 3 y 4 que siguen, i hace referencia a la numeración local de los nodos del elemento; en la figura 3 y 4, (ξ_i, η_i) son las coordenadas naturales del nodo i . Estas coordenadas varían entre -1 y 1, de manera que el nodo 1 tiene coordenadas $(\xi_1, \eta_1) = (-1, -1)$, y el nodo 3, $(\xi_3, \eta_3) = (1, 1)$. En la figura 2, L_i son las coordenadas de área del triángulo.

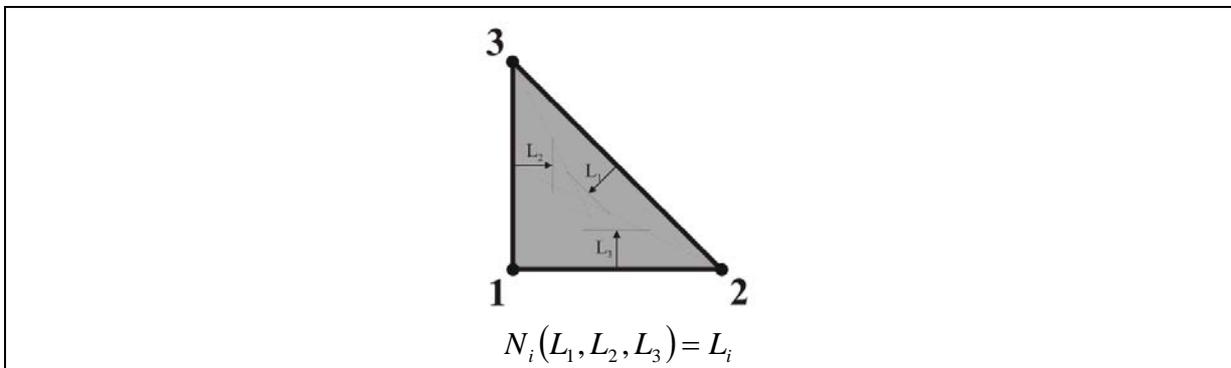


Figura 2. Triángulo lineal de 3 nodos (Elemento tipo 1)

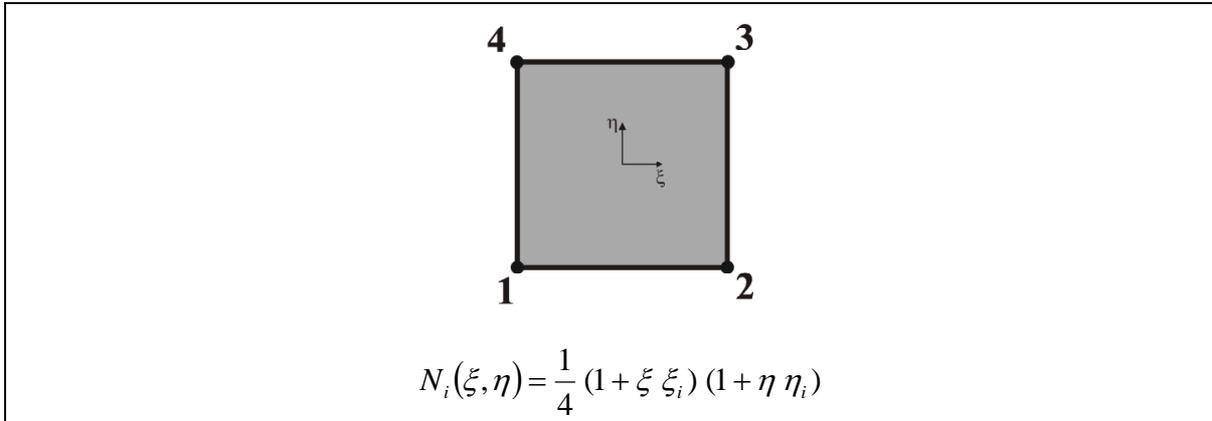


Figura 3. Cuadrángulo lagrangiano lineal de 4 nodos (Elemento tipo 9).

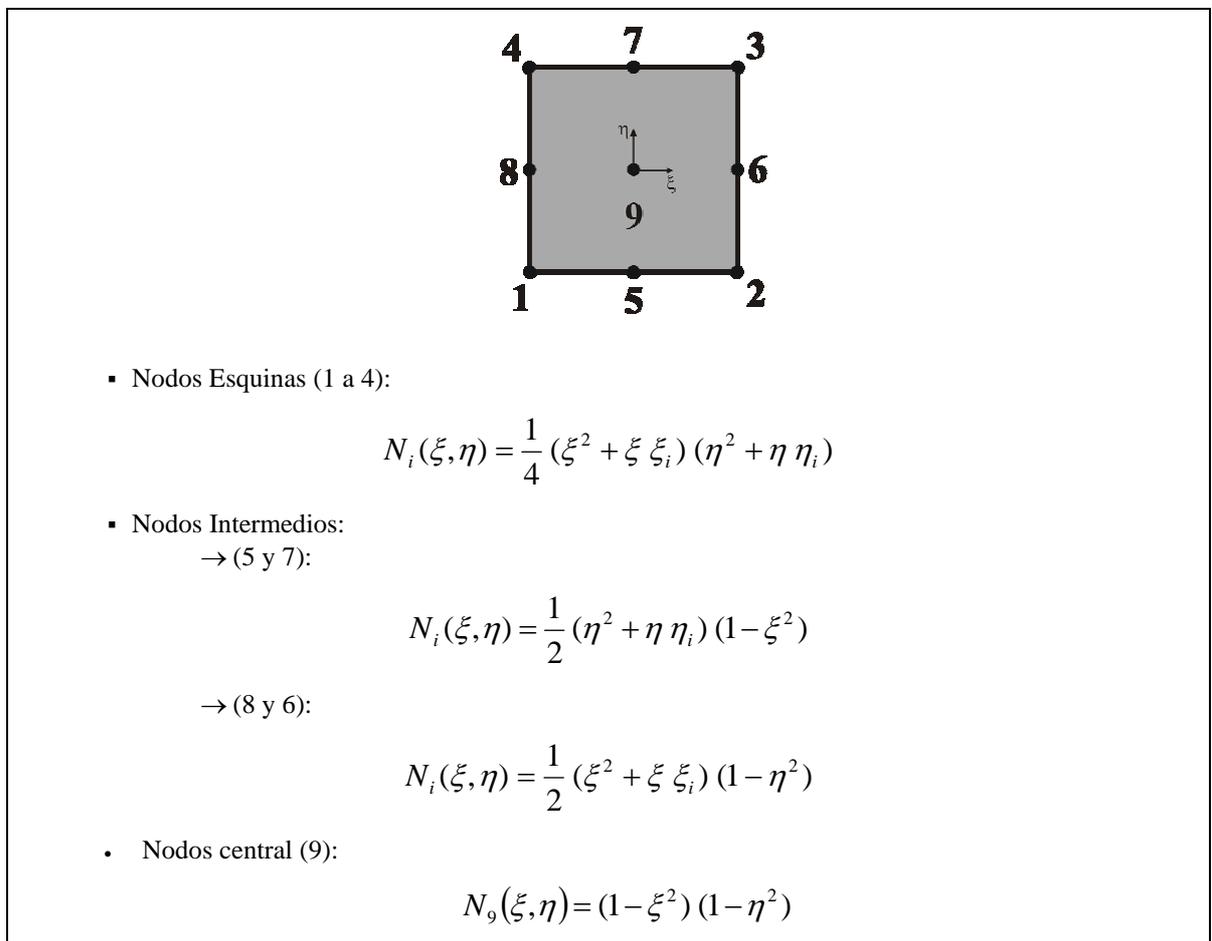


Figura 4. Cuadrángulo lagrangiano cuadrático de 9 nodos (Elemento tipo 10).

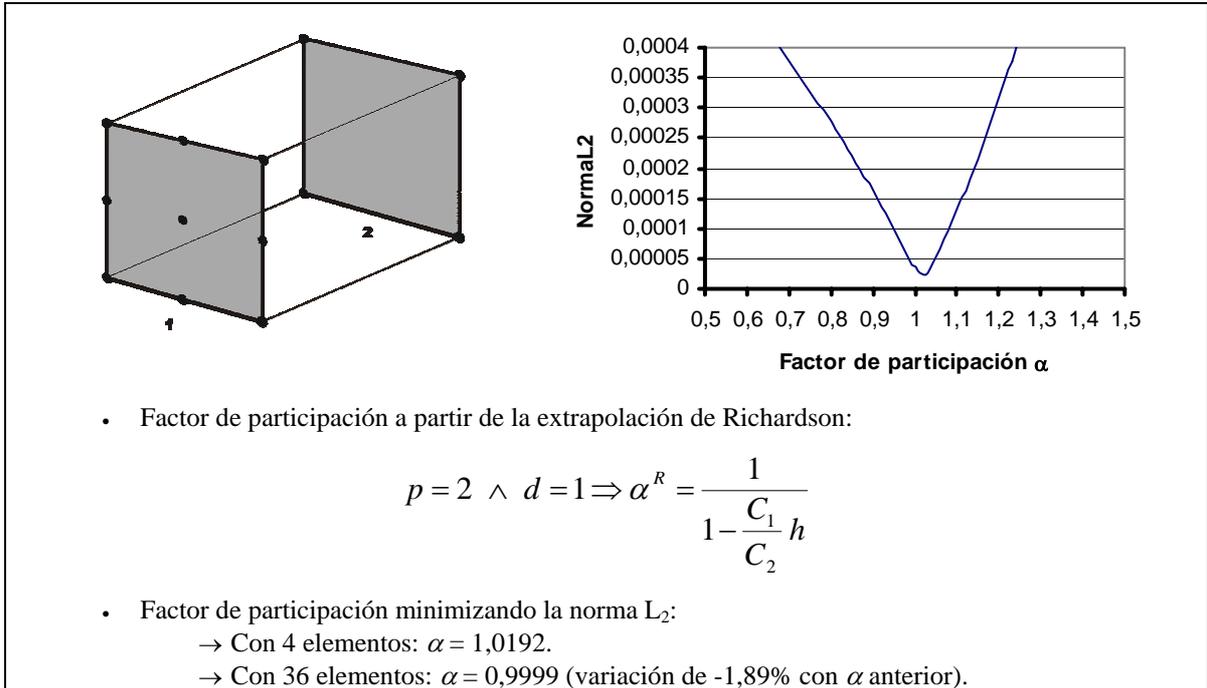


Figura 5. Cuadrángulo compuesto de 9 nodos, con un cuadrático y un lineal (Elemento tipo 11).

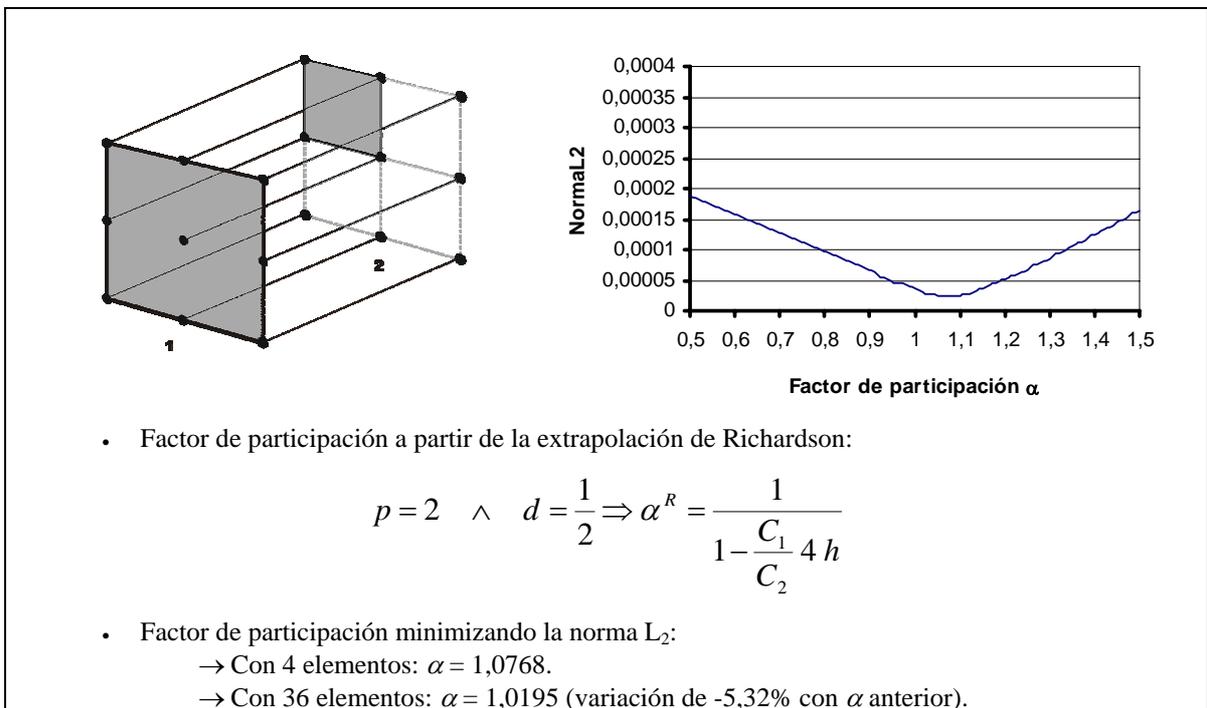


Figura 6. Cuadrángulo compuesto de 9 nodos, con un cuadrático y cuatro lineales (Elemento tipo 12).

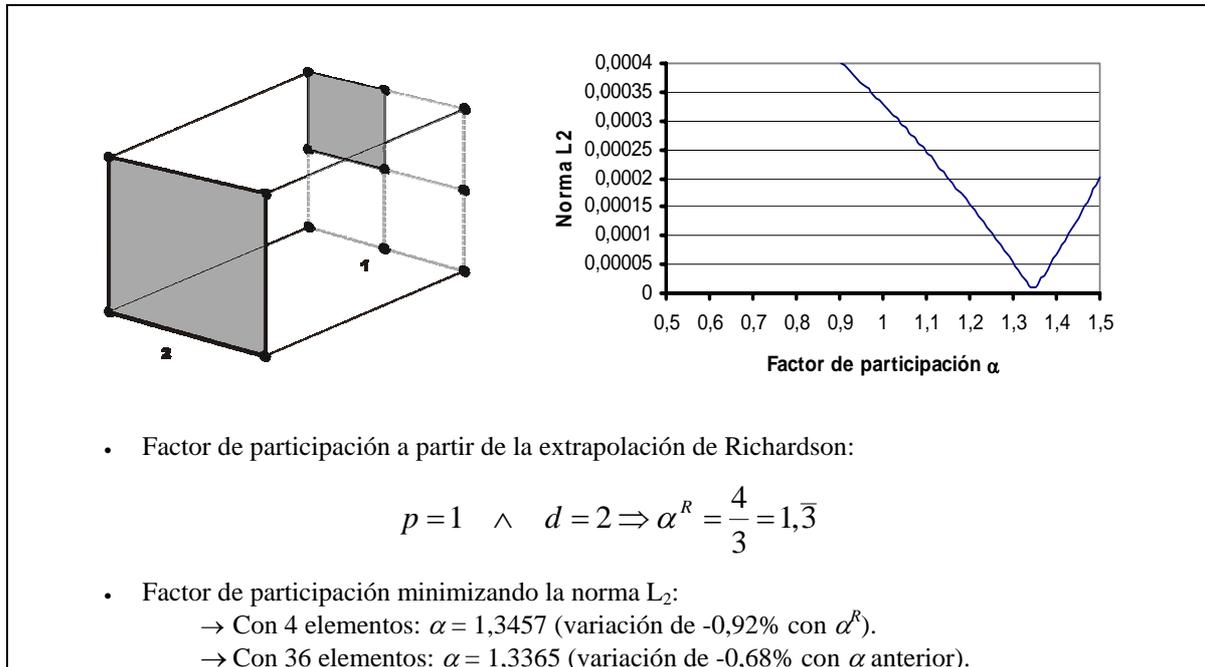


Figura 7. Cuadrángulo compuesto de 9 nodos, con un lineal y cuatro lineales (Elemento tipo 13).

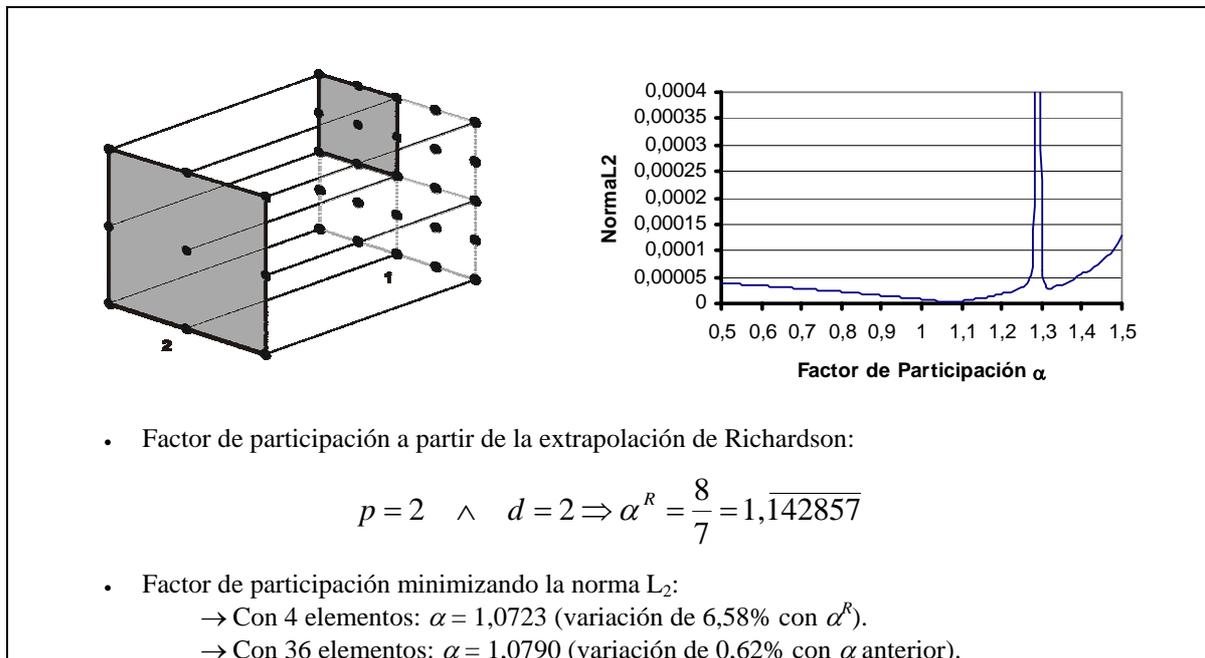


Figura 8. Cuadrángulo compuesto de 25 nodos, con un cuadrático y cuatro cuadráticos (Elemento tipo 14).

5 EJEMPLO

Para verificar que el programa de cálculo funcionaba correctamente se utilizó una estructura de la cual se conoce la solución exacta³, que consiste en una viga en voladizo apoyada en dos extremos de un lado, con cargas triangulares y parabólicas. Tener estos valores como referencia sirvió también, y como función más importante, para calcular un factor de participación práctico, es decir con los valores propios del elemento compuesto, y para realizar comparaciones entre los elementos implementados.

5.1 Solución exacta

En la figura 9 se presentan las ecuaciones de la solución exacta para establecer a partir de que problema se obtuvieron los factores de participación porque en el caso de la mezcla con elementos de distinto grado dependen del tipo de problema al hacerlo de las constantes C_1 y C_2 .

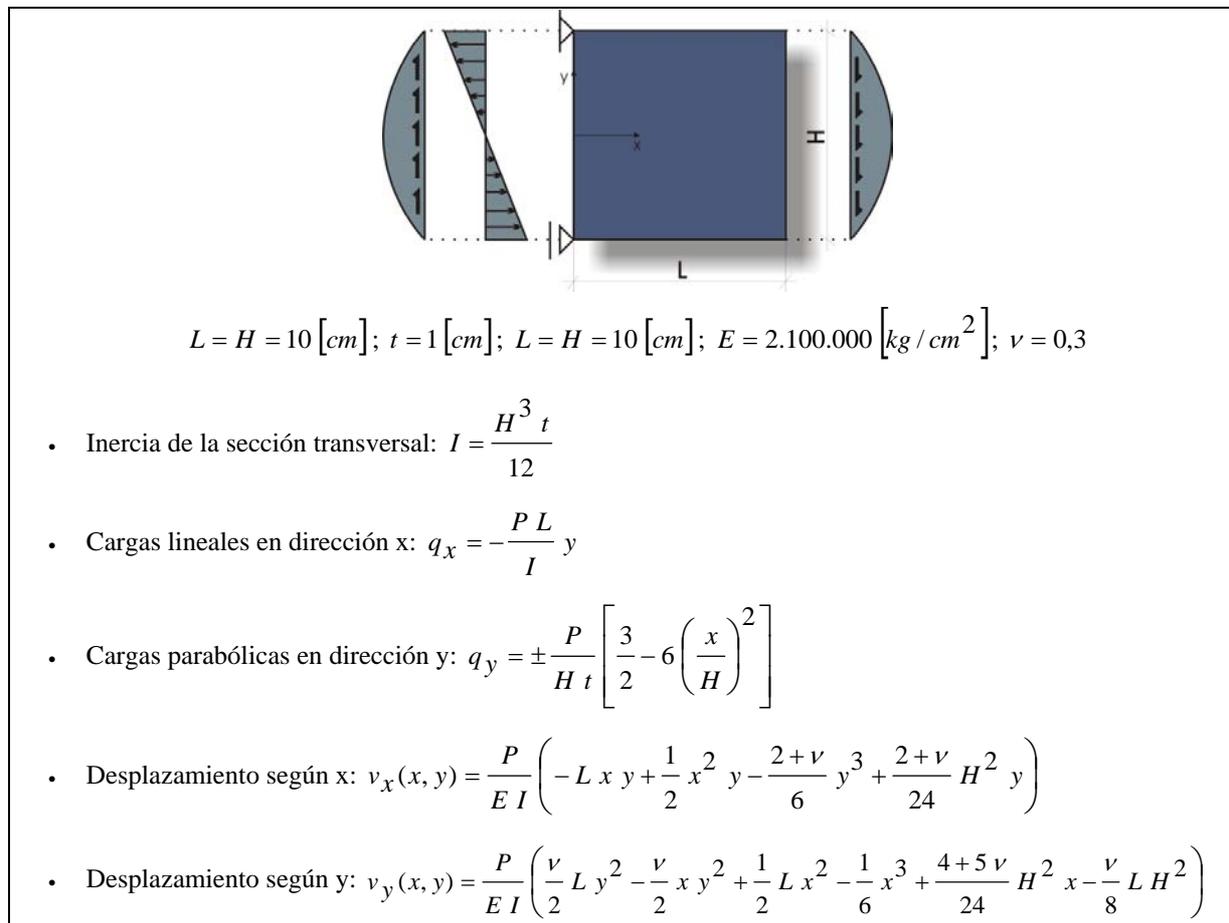


Figura 9. Problema modelo y solución exacta.

5.2 Resultados

Las gráficas siguientes muestran el comportamiento mecánico de la estructura de referencia utilizada. En las figuras 10, 11 y 12 se ve, respectivamente, la malla deformada, los vectores de desplazamientos nodales, y un mapa con valores nodales de desplazamiento según el eje y . En la figura 13 se muestra el mapa con los errores exactos del desplazamiento según el eje x , y en la figura 14, lo mismo para el desplazamiento según y .

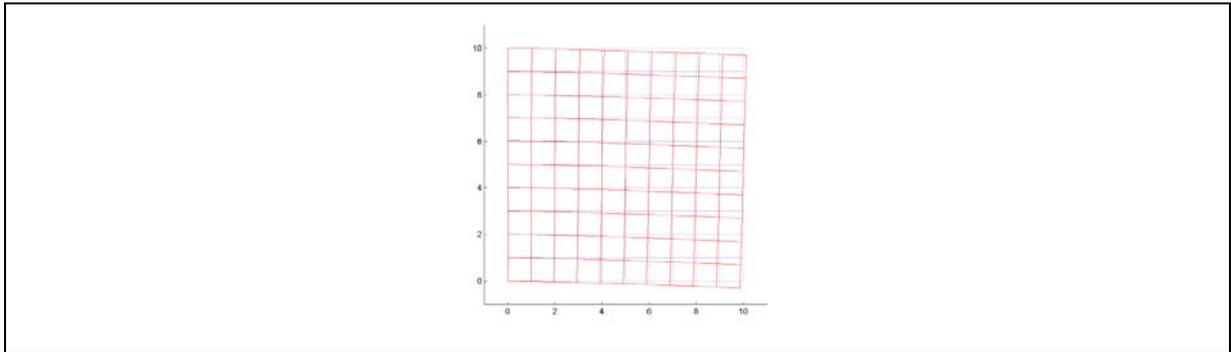


Figura 10. Estructura deformada con los elementos de la discretización.

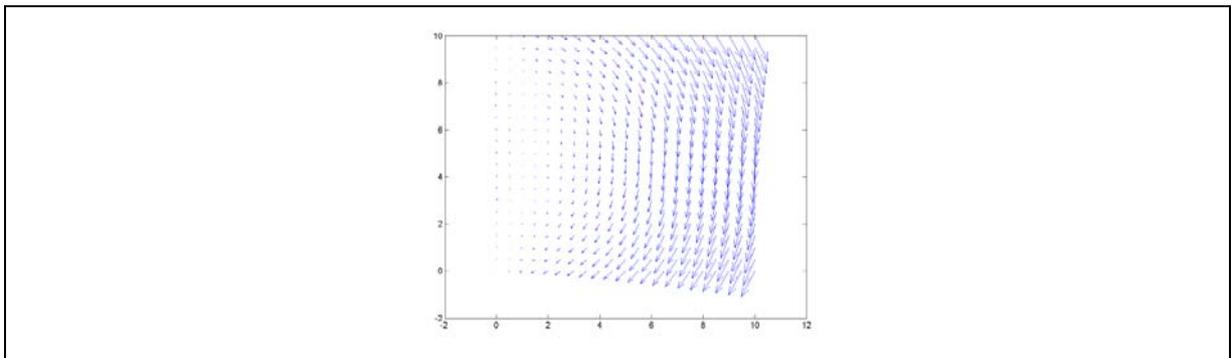


Figura 11. Vectores de desplazamientos totales en los nodos.

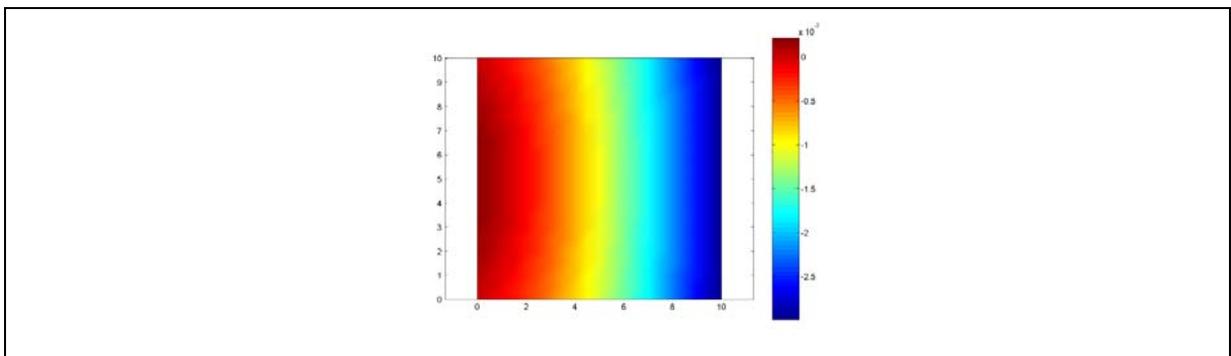


Figura 12. Mapa con valores de los desplazamientos nodales en dirección y .

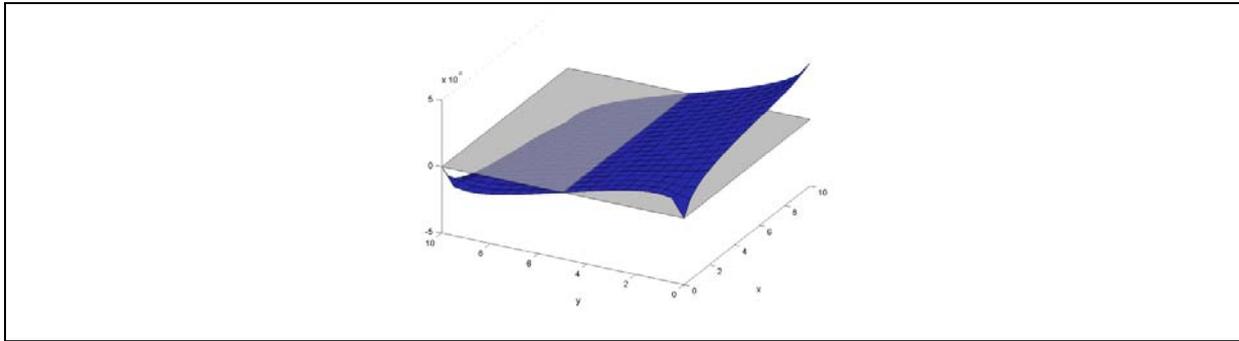


Figura 13. Error de los desplazamientos en dirección x (componente z del gráfico).

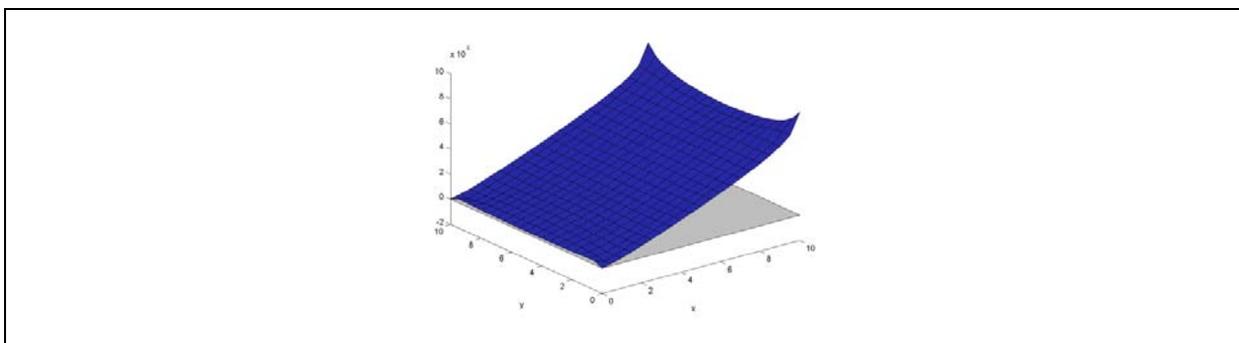


Figura 14. Error de los desplazamientos en dirección y (componente z del gráfico).

5.3 Análisis de los resultados

La figura 15 muestra el comportamiento de los distintos elementos implementados a medida que se aumenta el número de elementos con que se discretiza la estructura de referencia. En los elementos compuestos tipo 11 y 12 se utilizaron el factor de participación obtenido minimizando la norma L_2 , al no poderse calcularse un valor por medio de la extrapolación de Richardson, mientras que en el elemento tipo 13 se utilizó el obtenido de esa extrapolación. En el caso del elemento tipo 14, debido a la diferencia valores obtenidos del factor de participación, se prueba con los dos casos para observar como varía los errores. El valor del factor de participación utilizado se indica entre paréntesis junto al tipo de elemento. Ninguno de los mallados utilizado en la estructura de referencia tienen formas irregulares, sino que son mallas de cuadrados y triángulos rectángulos isósceles acoplados de a dos en la hipotenusa.

El eje coordenado vertical, en la figura 15, es la norma L_2 del error, calculado únicamente con los valores nodales, y el eje horizontal es el número total de nodos de la estructura. Se utiliza esta referencia, debido a que el número de nodos es directamente proporcional al tamaño de la matriz global, por lo que a medida que aumenta este número más tiempo de procesador y memoria se va necesitar para resolver el problema. El eje de nodos está en escala aritmética, mientras que el eje de la norma L_2 está en escala logarítmica, por lo que resulta dilatada a medida que disminuye el valor del error.

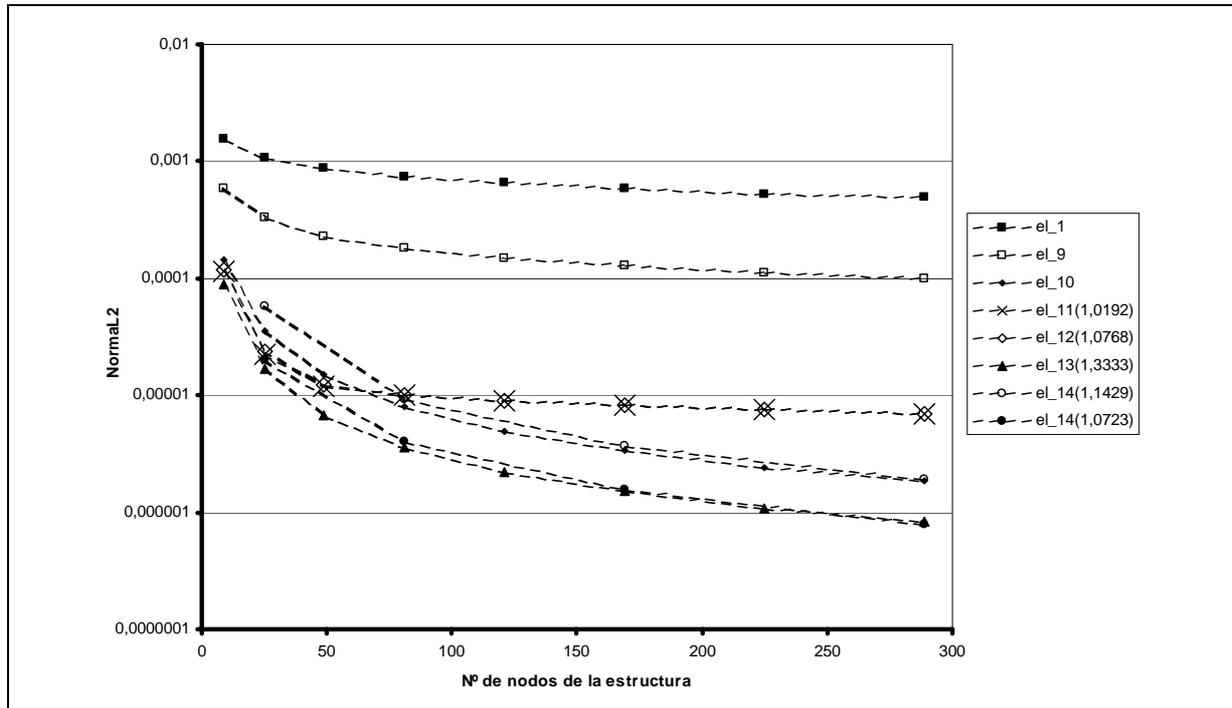


Figura 15. Error global en norma L2, para el ejemplo del voladizo, obtenidos con los diferentes elementos.

Si se compara los resultados obtenidos de los elementos simples, se observa la lógica situación de que al aumentar el grado de polinomio de interpolación del elemento finito, con la misma cantidad de nodos en la estructura, se mejora la solución. Los elementos tipo 1 y 9, que tienen polinomios completos del mismo grado, sin embargo para el elemento 9 (cuadrilátero) los errores son menores (2,6 a 4,9 veces más chico en el rango de nodos de la gráfica). La mejora se hace más ostensible para el elemento 10, de mayor grado que los anteriores, donde disminuye de 4,1 a 54,2 veces.

Utilizando el elemento tipo 13 se ve una gran mejoría de los resultados si se compara con el otro elemento con funciones de forma lineal, elemento tipo 9, de donde proviene el compuesto, y usando la misma cantidad de nodos en la estructura se disminuye el error de 6,7 a 120,8 veces en el rango de nodos de la gráfica. Se obtiene mejores resultados, aún respecto con el elemento 10, de un grado mayor, pero la diferencia es mucho menor.

Los elementos compuestos tipo 11 y 12 que son mezcla de elementos lineales y cuadráticos con diferente configuración, y por lo tanto distinto factor de participación, se obtiene resultados casi iguales y de comportamiento similar a medida que se refina la malla. Los resultados son levemente mejores al elemento tipo 10, cuadrático de donde proviene, pero como el factor de participación que se utilizó es el correspondiente a un mallado de 4 elementos (9 nodos) se ve que a medida que aumenta el número de nodos, y en correspondencia, el número de elementos, la solución empeora sobre la del elemento tipo 10. Esto concuerda con la ecuación obtenida a partir de la extrapolación de Richardson, donde el factor de participación óptimo depende de h (tamaño de la malla). Entonces el factor de

participación utilizado sirve para la zona cercana a los 9 nodos únicamente, donde fue obtenido.

El elemento tipo 14 en que se utilizó el factor de participación obtenido a partir de la extrapolación de Richardson no tiene tan buen resultado como en el que se usó el factor de participación minimizando la norma L_2 , en el cual las soluciones obtenidas son similares con las del elemento tipo 13. Esto muestra la diferencia que puede haber en calcular un problema con el factor de participación incorrecto y la influencia en el resultado, y que en algunos casos la extrapolación de Richardson da valores diferentes con la teoría de elementos compuestos. En elemento tipo 14 en comparación con el elemento tipo 10, de donde proviene, se obtiene una leve mejoría del resultado (1,8 a 2,3 veces), bastante menor con respecto con el 9 y 13.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se describe la implementación de elementos compuestos para elasticidad plana, los cuales están basados en la técnica de malla compuesta. Se muestra un ejemplo de aplicación para un problema con solución exacta conocida. Como conclusión final, se puede decir que los elementos compuestos en general mejoran el resultado de la solución. Que con pocos elementos se puede conseguir buenos resultados, aunque en el caso de los cuadráticos la mejoría es muy pequeña. Se podría llegar a probar con elementos con funciones de forma de exponente impares, como las cúbicas, aunque según la ecuación de la extrapolación de Richardson, si se realiza elementos compuestos con elementos de distinto grado, el factor de participación dependería en ese caso del tamaño de la malla y de la relación de las constantes C_1 y C_2 del desarrollo en serie de Taylor. Otro problema, que muestra la extrapolación de Richardson, que tendrían todos los tipos de elementos compuestos, es que el factor de participación varía apreciablemente donde hay puntos singulares, lo que puede perjudicar su generalización para el uso en cualquier tipo de problema.

7 REFERENCIAS

- [1]. V. E. Sonzogni, M. B. Bergallo y C. E. Neuman, "Uso de una malla compuesta para estimar errores de discretización y mejorar la solución en elementos finitos." *Proc. MECOM'96: V Congreso Argentino de Mecánica Computacional, 10-13 setiembre 1996*, Tucumán. Mecánica Computacional, Vol XVI, pp 123-132, (1996).
- [2]. M. B. Bergallo, C. E. Neuman y V. E. Sonzogni, "Composite mesh concept based FEM error estimation and solution improvement", *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*, Vol. 188, pp. 755-774, (2000).
- [3]. M. Heinz, A. Zanetta y V. Sonzogni, "Una biblioteca de casos de prueba para programas de elementos finitos.", *Informe Interno 98-3*, G.I.M.N.I., Santa Fe – Argentina, (1998).
- [4]. Eugenio Oñate, "Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis estático lineal.", C.I.M.N.E., Barcelona – España, (1995).
- [5]. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The finite element method*, McGraw Hill, Vol. I., (1991).