

O MÉTODO DO LAGRANGIANO AUMENTADO EM OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM RESTRIÇÕES DINÂMICAS

Paulo de Mattos Pimenta
Priscila Goldenberg
Reyolando M.L.R.F. Brasil
Marcelo Araujo da Silva

Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
C.P. 61548, CEP 05424-930, São Paulo, BRASIL

SUMÁRIO

O método do Lagrangiano aumentado utilizado na resolução de problemas de otimização estrutural é descrito. Este método resolve uma seqüência de problemas de minimização sem restrições definidos usando a função custo e as funções restrições. O método mostrou-se bastante eficiente em aplicações como, por exemplo, problemas com restrições dinâmicas. Será efetuado um resumo do método, sua aplicação em problemas de otimização com restrições dinâmicas e uma análise de sensibilidade em relação a parâmetros.

ABSTRACT

We present the method of the augmented lagrangian for structural optimization. This method solves a series of unconstrained minimization problems using the cost function and the restriction functions. The method is quite efficient in applications as, for example, in optimization problems with dynamic restrictions. In this paper we present the main points of the method, some applications to optimization problems with dynamic restrictions and a sensitivity analysis with respect to the parameters.

INTRODUÇÃO

O método do Lagrangiano aumentado, também conhecido como o método dos multiplicadores foi originalmente apresentado por Hestenes[1] e Powell[2] no contexto de programação matemática. Este método mostrou-se muito mais eficiente que os métodos de penalidades e dos multiplicadores de Lagrange conforme Fletcher[3] e Luenberger[4] e outros.

Recentemente, o método do Lagrangiano aumentado tem sido amplamente utilizado na resolução de problemas de otimização estrutural e, em particular, em problemas com restrições dinâmicas, de modo bastante satisfatório, conforme Chahande[5], Haug[6] e Morris[7]. O método utiliza o funcional Lagrangiano acrescido dos termos de penalidade e uma seqüência de minimizações sem restrições é efetuada. Os valores dos multiplicadores de Lagrange e das

penalidades são escolhidos no começo e o funcional é minimizado com relação à variável de projeto. No final da minimização os valores dos multiplicadores de Lagrange e das penalidades são atualizados e novamente a minimização do funcional em relação à variável de projeto é efetuada. O processo continua até atingir convergência Arora[8 - 11] e Pimenta[12].

Nossa atenção será voltada para problemas com restrições dinâmicas e, neste caso, o problema consiste em encontrar o vetor das variáveis de projeto que minimiza uma função custo sujeito às seguintes restrições: i) as restrições independentes do tempo como, por exemplo, limites explícitos nas variáveis de projeto; ii) restrições nas variáveis de estado que devem satisfazer um sistema de equações diferenciais de segunda ordem com condições iniciais.

No método do Lagrangiano aumentado, as respostas dinâmicas são integradas no intervalo de tempo e combinadas com a função custo para obter o funcional. A seguir o algoritmo se desenvolve como descrito acima.

No que segue será apresentado em linhas gerais o método do Lagrangiano aumentado em problemas com restrições dinâmicas e, finalmente uma série de exemplos de aplicações juntamente com uma análise de sensibilidade.

PROBLEMA COM RESTRIÇÕES DINÂMICAS

Descrição do problema

A formulação do problema de otimização com restrições dinâmicas aqui considerado, consiste em encontrar um vetor n -dimensional \mathbf{x} , denominado vetor das variáveis de projeto, que minimiza a função custo dada por $f = f(\mathbf{x})$ sujeito as restrições

$$g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, l \quad (1)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = l + 1, \dots, m \quad (2)$$

e para todo $t \in [t_0, t_f]$

$$g_i(\mathbf{x}, t) = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), t) = 0 \quad i = m + 1, \dots, l' \quad (3)$$

$$g_i(\mathbf{x}, t) = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), t) \leq 0 \quad i = l' + 1, \dots, m' \quad (4)$$

onde $\mathbf{z}(t)$ é o vetor das variáveis de estado que suporemos funções contínuas de t , os funcionais custo e restrições supostos convenientemente diferenciáveis e t_0 e t_f instantes iniciais e finais respectivamente. Na dinâmica linear, por exemplo, as variáveis de estado devem satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{z}(t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

com as condições iniciais $\dot{\mathbf{z}}(t_0) = \dot{\mathbf{z}}_0$ e $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, onde $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ é a matriz de massa, $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ é a matriz de amortecimento, $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ é a matriz de rigidez e $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ é o vetor das forças.

No método dos multiplicadores, as respostas dinâmicas são integradas no intervalo de tempo e combinadas com a função custo para obter o funcional Lagrangiano aumentado:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{r}) = & f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^l r_i (g_i(\mathbf{x}) + \theta_i)^2 + \sum_{i=l+1}^m r_i ((g_i(\mathbf{x}) + \theta_i)_+)^2 \right\} + \\ & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \sum_{i=m+1}^{l'} r_i (g_i(\mathbf{x}, t) + \theta_i(t))^2 + \sum_{i=l'+1}^{m'} r_i ((g_i(\mathbf{x}, t) + \theta_i(t))_+)^2 \right\} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

onde $(\cdot)_+ = \max\{\cdot, 0\}$. Aqui $r_i \theta_i = u_i$ para $i=1, \dots, m$ são os multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições $g_i(\mathbf{x}, t)$; $i=1, \dots, m$. Estes multiplicadores são constantes com relação ao tempo. Também $\theta_i \geq 0$ para $i=1, \dots, m$.

Além disto, $r_i \theta_i = u_i$, $i = m+1, \dots, m'$ são os multiplicadores de Lagrange correspondentes as restrições $g_i(\mathbf{x}, t)$; $i = m+1, \dots, m'$. Estes multiplicadores são funções contínuas no tempo. Também $\theta_i(t) \geq 0$ para $i = m'+1, \dots, m'$. Finalmente, $r_i (> 0)$ é o parâmetro penalidade.

Procedimento computacional

Para apresentar o algoritmo definiremos um parâmetro K_b por:

$$K_b = \max\left\{ \max_{1 \leq i \leq l} |g_i(\mathbf{x})|; \max_{l+1 \leq i \leq m} |\max g_i(\mathbf{x}), -\theta_i|; \right. \\ \left. \max_{m+1 \leq i \leq l'} (\max_t |g_i(\mathbf{x}^k, t)|); \max_{l'+1 \leq i \leq m'} (\max_t |\max(g_i(\mathbf{x}^k, t), -\theta_i^k(t))|) \right\}$$

PASSO 1. Coloque $k = 1$, $K = \infty$; estime os vetores \mathbf{x}^0 , θ^0 , \mathbf{r} e os escalares $\alpha > 1$, $\beta > 1$ e $\epsilon > 0$ (ϵ é um número pequeno utilizado no critério de parada).

PASSO 2. Minimize $\Phi(\mathbf{x}, \theta^k, \mathbf{r})$ com relação a \mathbf{x} . Seja \mathbf{x}^k o ponto de ótimo obtido neste passo.

PASSO 3. Calcule $g_i(\mathbf{x}^k)$; $i=1, \dots, m$ e $g_i(\mathbf{x}^k, t)$; $i = m+1, \dots, m'$ e $t \in [t_0, t_f]$. Calcule K_b e verifique o critério de parada, isto é, se $K_b < \epsilon$, pare. Caso contrário, estabeleça o seguinte conjunto de igualdades e desigualdades:

$$I_E = \{i : |g_i(\mathbf{x}^k)| \geq K/\alpha; i = 1, \dots, l\}$$

$$I_I = \{i : |\max(g_i(\mathbf{x}^k), -\theta_i)| \geq K/\alpha; i = l+1, \dots, m\}$$

$$I_{E'} = \{i : \max_t |g_i(\mathbf{x}^k, t)| \geq K/\alpha; i = m+1, \dots, l'\}$$

$$I_{I'} = \{i : \max_t |\max(g_i(\mathbf{x}^k, t), -\theta_i^k)| \geq K/\alpha; i = l'+1, \dots, m'\}$$

PASSO 4: Atualização dos parâmetros de penalidade e multiplicadores

- (a) Se $K_b \geq K$, coloque $r_i = \beta r_i$ e $\theta_i^{k+1} = \theta_i^k / \beta$ para todos $i \in I_E \cup I_I$; coloque $r_i = \beta r_i$ e $\theta_i^{k+1}(t) = \theta_i^k(t) / \beta$ para todos $i \in I_{E'} \cup I_{I'}$ e $t \in [t_0, t_f]$ isto é incremente os parâmetros de penalidades sem mudar os multiplicadores. Vá ao passo 5.
 (b) Se $K_b \leq K$, atualize θ_i^k colocando

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + g_i(\mathbf{x}^k); \quad i = 1, \dots, l$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \max\{g_i(\mathbf{x}^k), -\theta_i^k\}; \quad i = l+1, \dots, m$$

$$\theta_i^{k+1}(t) = \theta_i^k(t) + g_i(\mathbf{x}^k, t); \quad i = m+1, \dots, l', \quad t \in [t_0, t_f]$$

$$\theta_i^{k+1}(t) = \theta_i^k(t) + \max\{g_i(\mathbf{x}^k, t), -\theta_i^k(t)\}; \quad i = l'+1, \dots, m', \quad t \in [t_0, t_f]$$

e vá ao passo 5.

(c) Se $K_b \leq K/\alpha$, coloque $K = K_b$ e vá ao passo 5.

Caso contrário, coloque $r_i = \beta_i r_i$ e $\theta_i^{k+1} = \theta_i^k / \beta$ para todos $i \in I_E \cup I_I$;
coloque $r_i = \beta_i r_i$ e $\theta_i^{k+1}(t) = \theta_i^k(t) / \beta$ para todos $i \in I_{E'} \cup I_{I'}$ e $t \in [t_0, t_f]$.
Coloque $K = K_b$ e vá ao passo 5.

PASSO 5. Coloque $k = k + 1$ e vá ao passo 3.

Nos problemas de Engenharia, é necessário impor limites nas variáveis de projeto, para que elas não se tornem absurdamente grandes. Uma vez que a solução foi encontrada, os parâmetros θ e $\theta(t)$ e r são atualizados e o processo continua. A escolha dos parâmetros iniciais é muito importante. Usualmente o parâmetro θ_i é considerado nulo. Em pesquisas recentes Chahande[5] efetuando simulações exaustivas verificou que é conveniente considerarmos α entre 2 e 3, e β entre 6 e 10.

EXEMPLOS

Nos exemplos que se seguem foram utilizados diversos métodos numéricos. Relativamente à minimização sem restrições (passo 2) foi utilizado o método dos gradientes com busca unidimensional de Armijo. O cálculo do gradiente do Lagrangiano aumentado foi efetuado utilizando diferenças finitas (com passo 0.0001) uma vez que nem todas as variáveis aparecem explicitamente. Para se determinar as violações das restrições, utilizaram-se dois métodos: interpolação via splines cúbicos combinado com integração por quadratura de Gauss-Legendre e regra dos trapézios. A resolução dos sistemas lineares utilizou decomposição de Cholesky e, finalmente, para a resolução das equações do movimento utilizaram-se os seguintes métodos: Runge-Kutta de quarta e quinta ordem e Newmark. Foi efetuado um estudo comparativo entre os diferentes métodos.

EXEMPLO 1: Projeto Ótimo de um sistema de Suspensão de um Veículo com 5 Graus de Liberdade

Considere-se o sistema mecânico de figura 1. Este problema consiste em minimizar a máxima aceleração do assento do motorista, considerando-se o perfil do terreno. As variáveis de projeto são definidas por $\mathbf{x} = [k_1, k_2, k_3, c_1, c_2, c_3, x_7]^T$.

A equação do movimento

$$M\ddot{\mathbf{z}} + C\dot{\mathbf{z}} + K\mathbf{z} = \mathbf{f}(t), \quad t \in [0, 2.40]$$

deve ser satisfeita pelas variáveis de estado $\mathbf{z}(t)$. A função objetivo é $f(\mathbf{x}) = x_7$, sendo que x_7 maximiza a aceleração, ou seja

$$|\ddot{\mathbf{z}}| - x_7 \leq 0, \quad t \in [0, 2.40].$$

A força generalizada é dada por

$$\mathbf{f}(t) = [0, 0, 0, k_4 f_1(t) + c_4 \dot{f}_1(t), k_5 f_2(t) + c_5 \dot{f}_2(t)]^T$$

onde $f_1(t)$ é dada por $5[1 - \cos 1.25\pi t]$, se $0 \leq t \leq t_1$, $5[1 + \cos 3.125\pi(t - t_1)]$, se $t_1 \leq t \leq t_2$ e zero no restante do intervalo e $f_2 = f_1(t - t_0)$, $t \in [0, 2.40]$

São restringidos os deslocamentos entre o chassi e o assento do motorista, o chassi e a frente e traseira do veículo, e ainda restringe-se os deslocamentos entre a superfície de rodagem e a dianteira e traseira do veículo. Tem-se então:

$$|\dot{z}_1(t)| - b_1 \leq 0, \quad t \in [0, 2.40]$$

$$|z_2(t) + (L/12)z_3(t) - z_1(t)| - b_2 \leq 0, \quad t \in [0, 2.40]$$

$$|z_4(t) - z_2(t) - (L/3)z_3(t)| - b_3 \leq 0, \quad t \in [0, 2.40]$$

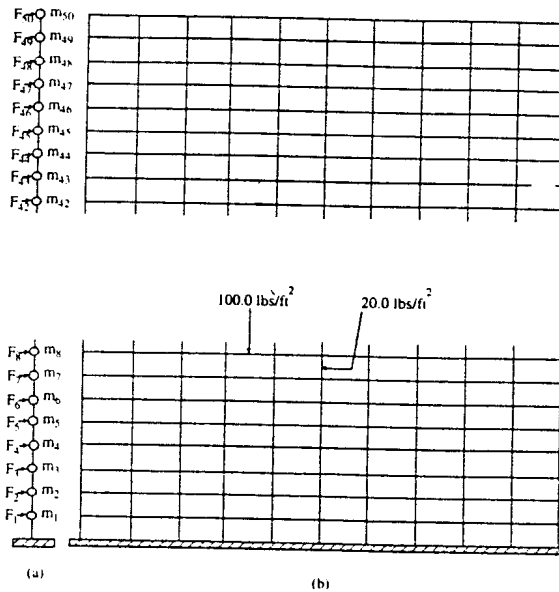


Fig.2

métodos de Newmark e Runge-Kutta de quarta e quinta ordem. Os resultados obtidos foram os seguintes

	NEWMARK	R.K. QUARTA	R.K. QUINTA
x_0	x_f	x_f	x_f
100.0	54.31	53.22	53.25
300.0	202.03	201.99	202.01
300.0	245.99	245.96	245.92
10.0	13.09	13.01	13.05
25.0	77.03	78.35	77.98
25.0	85.43	84.02	82.21
332.6	259.37	259.67	258.98
Num. Iteração	54	56	56

EXEMPLO 2([5]):

O exemplo seguinte é o projeto ótimo do edifício da fig.2. O pé direito é 10ft , e a distância entre as colunas mede 20ft . Os pesos dos pisos e paredes estão indicados na figura. Assume-se que as propriedades são uniformes ao longo do prédio. Todas as colunas do andar são supostas semelhantes (mesma área, momento de inércia, etc). Utiliza-se um modelo elástico linear representado pelo sistema de massas da fig.3b. A massa concentrada em cada grau de liberdade é igual à soma das massas do piso mais a massa das paredes, sendo no total de $816.8\text{lbs}^2/\text{in}$.

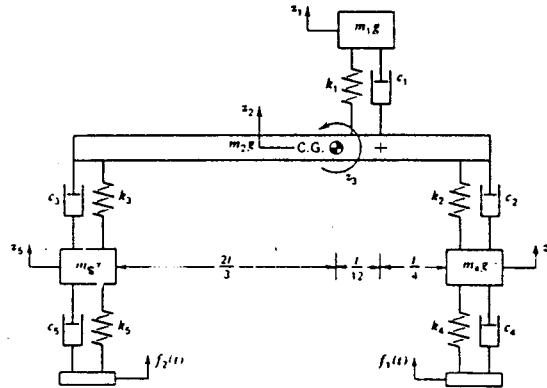


Fig.1

$$|z_5(t) - z_2(t) - (2L/3)z_4(t) - b_4| \leq 0, \quad t \in [0, 2.40]$$

$$|z_4(t) - f_1(t) - b_5| \leq 0, \quad t \in [0, 2.40]$$

$$|z_5(t) - f_2(t) - b_6| \leq 0, \quad t \in [0, 2.40].$$

Os limites inferior e superior para as variáveis de projeto são respectivamente $x_l = [50, 200, 200, 2.5, 5, 1]^T$ e $x_u = [500, 1000, 1000, 50, 8080, 500]^T$. Já as componentes do vetor b assumem os valores $b = [400, 2, 5, 5, 2, 2]^T$.

Outros dados numéricos adotados são: $m_1g = 290lb$, $m_2g = 4500lb$, $m_4g = m_5g = 96.6lb$, $I = 41000lb \text{ in}^2$, $L = 120in$, $k_4 = k_5 = 1500lb/in$, $c_4 = c_5 = 5lb \text{ s/in}$, $t_0 = 0.2667 \text{ s}$, $t_1 = 0.800 \text{ s}$, $t_2 = 1.120 \text{ s}$. O intervalo $[0, 2.40]$ foi subdividido em 200 subintervalos. Adotou-se condições iniciais nulas e utilizando Runge-Kutta de quarta ordem efetuou-se uma comparação entre splines cúbicos e regra do trapézio. Os resultados obtidos foram os seguintes

	SPLINES CÚBICOS	REGRA DO TRAPÉZIO
x_0	x_f	x_f
100.0	52.31	53.22
300.0	199.22	201.99
300.0	243.85	245.96
10.0	12.53	13.01
25.0	76.60	78.35
25.0	82.23	84.02
332.6	257.21	259.67
Num. Iteração	52	56

Observa-se que os resultados com Splines Cúbicos apresenta um menor valor para x_7 , apesar de consumir um tempo computacional maior. Além disto, efetuou-se uma comparação entre os

A rigidez de um andar é tomada como a soma da rigidez de todos os pilares. A constante de força restauradora de uma coluna do i -ésimo andar é $k_i = 12EI_i/h_i^3$, onde E é o módulo de elasticidade, I_i o momento de inércia, e h_i o comprimento do pilar. A equação do movimento é dada de forma explícita e pode ser resolvida facilmente. A função objetivo é o peso da estrutura e as variáveis de projeto são as rigidez de cada andar, ou seja, a soma da rigidez de todas as colunas do andar, divididas pelo fator de escala 570000. Dois tipos de restrições dinâmicas são consideradas, sobre deslocamento e tensões, sendo que o máximo deslocamento relativo permitido entre dois pisos adjacentes é 0.333333in e a máxima tensão nos pilares 14400psi. Os valores máximo e mínimo para as variáveis de projeto são respectivamente 100.0 e 0.0001 lb/in. A densidade do aço é dada por 0.28lb/in³. A área da seção transversal e o módulo de resistência à flexão dos pilares podem ser obtidos por $A_i = 0.465I_i^{1/2}$ e $S_i = 0.544I_i^{3/4}$. Estas relações são utilizadas pelo AISC para seções de aço e independem do sistema de unidades utilizado. A rigidez do i -ésimo andar é (11 colunas) $K_i = 11k_i$. As tensões atuantes nos pilares são $\sigma_1 = K_1 z_1/11$ e $\sigma_i = K_i(z_i - z_{i-1})/11$, $i = 2, \dots, 50$. Os valores iniciais são $X_i = 1.0$ $i = 1, 50$. A equação do movimento elástico é $M\ddot{z}(t) + Kz(t) = p(t)$, $t \in [0, 3.5]$ com condições iniciais nulas. O intervalo de tempo foi dividido em 50 subintervalos. Para resolver a equação do movimento utilizou-se o método de Newmark, enquanto que para calcular a integral das violações de restrições utilizou-se a regra do traézio. O vetor força generalizado é definido por $f_i(t) = 20000(1 - t/0.1)$, $t \in [0, 0.1]$ $i = 46, 50$, e nulo no resto. Os resultados obtidos em 57 iterações foram os seguintes:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
1.983	1.851	1.724	1.799	1.799	1.438	1.302	0.982	0.758	0.926

X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}
0.914	0.897	0.905	0.896	0.852	0.775	0.783	0.736	0.754	0.731

X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	X_{29}	X_{30}
0.723	0.831	0.752	0.715	0.709	0.804	0.755	0.829	0.796	0.803

X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}	X_{37}	X_{38}	X_{39}	X_{40}
0.737	0.786	0.746	0.773	0.751	0.738	0.784	0.709	0.713	0.726

X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	X_{45}	X_{46}	X_{47}	X_{48}	X_{49}	X_{50}
0.742	0.739	0.769	0.747	0.738	0.802	0.753	0.701	0.692	0.607

CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se, em linhas gerais, o método do Lagrangiano aumentado aplicado a problemas de otimização estrutural. Uma análise cuidadosa do algoritmo apresentado e dos exemplos elaborados levou ao estudo de diferentes questões computacionais que ainda serão mais discutidos em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- [1] Hestenes M.R. Multiplier and gradient methods. *J.Optimiz. Theory Applic.* 4,1969, 303-320.
- [2] Powell M.J.D. A method for nonlinear constraints in minimization problems. In *Optimization* (Edited by Fletcher). 1969, Academic Press, New York.
- [3] Fletcher R. *Practical methods of optimization*, 2 volumes, 1980, John Wiley - Sons.
- [4] Luenberger D.G. *Linear and nonlinear programming*, 2.ed, 1984, Addison-Wesley Publishing Company.
- [5] Chahande A. I. and Arora J. S. Optimization of large structures subjected to dynamic loads with the multiplier method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 37,1994, 413-430.
- [6] Haug E. J. and Arora J.S. *Applied Optimal Design*, 1979, Wiley-Interscience, New York.
- [7] Morris A.J. *Fundation of structural optimization : a unified approach* ,1982, John Wiley - Sons.
- [8] Arora J. S. and Haug E.J. Methods of design sensitivity analysis in structural optimization,1979, AIAA,17,970-973.
- [9] Arora J. S. and Belegundu A.D. Potential of transformation methods in optimal design, AIAA,19,1981,1372-1374.
- [10] Arora J. S. and Belegundu A.D. A study of mathematical programming methods for structural optimization. Part I : Theory, Part II Numerical aspects, *Int. j. numer. methods eng.*,21,1985, 1583-1624.
- [11] Arora J. S., Chahande A. I. Paeng J. K. Multiplier methods for engineering optimization, *int. j. numer. methods eng.* 32,1991,1485-1525.
- [12] Pimenta P.M.,Goldenberg P.,Brasil R.M.L.R.F. Aplicações do Lagrangiano Aumentado em Otimização Estrutural, *Boletim Técnico EPUSP,BT/PEF-9513*,1995.