

ANÁLISIS NUMÉRICO DE FLUJO CINEMÁTICO EN CUENCAS FLUVIALES

Walter E. Legnani

Instituto de Cálculo - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad Nacional de Buenos Aires  
Ciudad Universitaria Pab. II 2do. Piso (1428) - Buenos Aires, Argentina  
email: walter@ulises.ic.fcen.uba.ar

RESUMEN

En este trabajo se aplicó el modelo de ruteo cinemático para simular numéricamente el escurrimiento impermanente unidimensional en cuencas fluviales o tramos de canales con estructura arborescente.

En base a los esquemas en diferencias finitas de Muskingum y de Godunov, se resolvió numéricamente la ecuación, en forma de ley de conservación no lineal, que representa el sistema. La red hídrica adoptada para la calibración del modelo se constituyó en el Arroyo Ludueña en la cuenca hídrica del Gran Rosario, con el canal Ibarlucea como afluente.

Además se estudió el rango de estabilidad del esquema de Muskingum para el parámetro de ponderación espacial, dado que se usó una fórmula no lineal en la cual la velocidad de la onda depende en forma precisa del caudal.

ABSTRACT

In this work the kinematic routing model was applied to simulate the one-dimensional unsteady flow in fluvial basins or channel reaches with an arborescent structure. Using the Muskingum and Godunov finite difference schemes the equation that governs the system, written as nonlinear conservation law, was numerically solved. The model was calibrated for the network consisting in the Ludueña brook, in the Great Rosario basins, and the Ibarlucea channel as a tributary. Moreover, the region of stability for the spatial ponderation of the Muskingum scheme parameter was studied, because a nonlinear formula relating wave velocity and the discharge was applied.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la evolución del movimiento de fluidos aguas abajo en canales abiertos encuentra numerosas aplicaciones tecnológicas inmediatas; la descripción cuantitativa y cualitativa de este tipo de movimiento de fluidos es imprescindible para: predecir inundaciones en zonas ribereñas, elegir las características y sitio de la construcción de un dique, diseñar canales de riego, describir el comportamiento del canal ante perturbaciones conocidas aguas arriba, tales como la actividad secundaria de represas, lluvias, o deshielos sobre ríos de montaña.

El tema cuenta con formulaciones, a veces basadas en criterios empíricos, hechas por ingenieros hidráulicos, que proporcionan una herramienta para resolver este tipo de problemas. Otro de los caminos para trabajar con esta temática se encuentra en la resolución computacional de las

ecuaciones que representan el sistema en análisis y que se utilizan para realizar una modelización del comportamiento del mismo. Este segundo camino es el adoptado en el presente trabajo. Las ecuaciones diferenciales que describen en forma aproximada la evolución del movimiento de aguas en canales abiertos con superficie libre son las llamadas ecuaciones de Saint Venant, a saber:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial (Q/S)}{\partial t} + \frac{1}{2g} \frac{\partial (Q^2/S^2)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = (S_i - S_f) \quad (1)$$

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

donde  $g$  denota la aceleración de la gravedad,  $Q=Q(x,t)$  es el caudal,  $h=h(x,t)$  es la cota de la superficie libre de escurrimiento respecto de un plano de referencia,  $S=S(h(x,t),x)$  es el área mojada de la sección transversal al escurrimiento,  $B=B(h(x,t),x)$  es el ancho de la superficie libre,  $S_i$  es la pendiente del lecho del canal, y  $S_f$  es la pendiente de fricción del lecho.

La variable espacial  $x$  se toma a lo largo del eje longitudinal del canal, y estará comprendida entre los puntos de referencia inicial y final de cada tramo de los canales a modelar y la variable  $t$  (tiempo) poseerá valores entre el comienzo y finalización del evento considerado.

Las ecuaciones (1) y (2) son las que describen el escurrimiento impermanente unidimensional de un fluido con superficie libre a lo largo de un canal o cauce fluvial no prismático de sección transversal arbitraria y sobre fondo fijo. Para fijar ideas se indican los parámetros en la figura número 1.

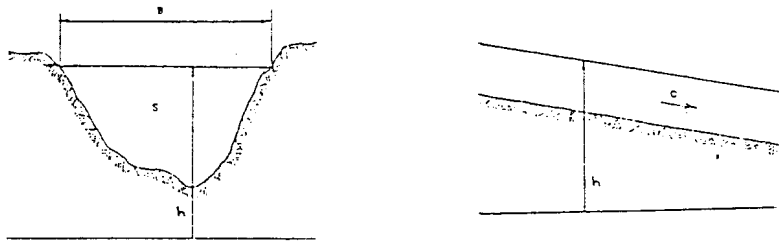


Figura 1: Identificación de los parámetros de las ecuaciones (1) y (2)

El sistema de ecuaciones (1) y (2) se emplea con éxito en la descripción del movimiento de fluidos en canales unidimensionales desde hace varias décadas.

En 1955 M. J. Lighthill y G. B. Whitham [1] proponen fijar la atención en una clase particular de movimiento de ondas que poseen una característica muy identificatoria que las diferencia de los movimientos de ondas en sistemas dinámicos en general. Estas ondas se encuentran en sistemas cuyos flujos pueden ser descritos con buena aproximación por un modelo unidimensional, es decir, por ejemplo, ríos largos en los cuales su longitud es muy superior a su ancho.

La suposición más fuerte que caracteriza a este tipo especial de ondas estudiado por Lighthill y Whitham es que existe una relación funcional precisa entre el caudal ( $Q$ ) y la sección transversal al escurrimiento ( $S$ ) en la posición ( $x$ ).

En caso de canales de ancho de la sección transversal constante la relación se simplifica y se tiene que  $Q=Q(h(x,t))$ ; es decir, si el canal tiene ancho constante,  $Q$  es solo función de la altura del fluido medida respecto a una cota fija de referencia.

Este tipo particular de movimiento lo definieron como 'ONDA CINEMÁTICA' dado que para su descripción solo es necesaria la ecuación (2) de conservación del caudal líquido.

Henderson [2] da un tratamiento que demuestra teóricamente que la existencia de este tipo de ondas se encuentra en la realidad.

Reservaremos para los movimientos de ondas de fluido en general el nombre de ondas dinámicas ya que para su modelización son necesarias ambas ecuaciones (1) y (2).

Evidentemente ambos tipos de ondas estarán presentes en el movimiento ondulatorio de un fluido estableciéndose una competencia entre ambas. La forma sistemática de determinar si en el problema en cuestión se deben emplear para describir las ondas ecuaciones como la (1) y la (2) o solo la (2), es variada y todos los métodos son coincidentes. En el presente trabajo se aplicó el método de analizar el rango del número de Froude ( $Fr$ ).

Para tal fin se calcula el número (adimensional) de Froude como sigue:

$$Fr = \frac{V_0}{\sqrt{g H_0}} \quad (3)$$

donde  $V_0$  es la velocidad del fluido en el estado estacionario,  $H_0$  es la altura de una onda tipo escalón en el canal, y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

Para números de Froude menores que 2, se encuentra experimentalmente que el modelo cinemático describe con notable exactitud la evolución del movimiento del fluido, como lo indican K. Mahmood y V. Yevjevich [3], en donde además se pueden encontrar otros dos interesantes criterios.

La ecuación (2) de Saint Venant (o también llamada de aguas poco profundas) coincide en su forma matemática con una ley de conservación general, que es precisamente la ley de conservación de masa líquida del sistema modelado (para más detalles sobre este particular ver [4]).

Una de las consecuencias más importantes del modelo de onda cinemática es que las ondas poseen una sola velocidad de propagación en cada punto (en sentido progresivo al de la propagación de la onda) mientras que las otras ondas (dinámicas) poseen los dos es decir uno progresivo y otro

(si  $Fr < 1$ ) regresivo relativos al medio. Este hecho hace que la onda cinemática posea un solo conjunto de características (el correspondiente al del sentido progresivo).

Si suponemos canales de ancho constante ( $B$ ) entonces  $S = h * B$  y se puede reescribir la ecuación (2) de Saint Venant de la siguiente manera:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

en la cual estaremos suponiendo que  $Q = Q(S,x)$ .

El ánimo del presente trabajo es entonces el de aplicar la teoría de onda cinemática para modelizar el movimiento de ondas en canales unidimensionales con superficie libre y que presenten una estructura ramificada o arborescente como se muestra en la figura número 2.

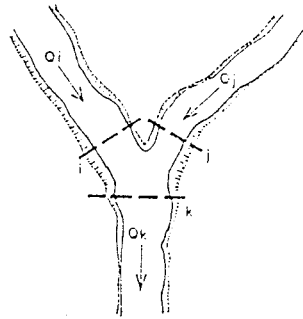


Figura 2. Esquema de redes arborescentes

La generalización de la ecuación (2) a redes fluviales con estructura arborescente se puede hacer mediante las ecuaciones que reflejan la confluencia de dos tramos fluviales. Stoker [5] para tal fin modelizó la confluencia de dos tramos en un punto a partir del cual continúa uno sólo, dividiendo dicha confluencia en tres secciones transversales, dos aguas arriba y una aguas abajo.

Así, las ecuaciones de compatibilidad de Stoker son:

$$Q_i + Q_j = Q_k \quad (5)$$

donde  $Q_i$  y  $Q_j$  son los caudales de los tramos aguas arriba y  $Q_k$  es el caudal aguas abajo.

Un esquema de esto se encuentra en la figura 2.

Los puntos i,j,k representan los extremos aguas abajo de los tramos que finalizan en la confluencia y el extremo aguas arriba del tramo resultante, respectivamente. El mismo análisis vale para una bifurcación cambiando el signo de los caudales.

Para un tratamiento completo del modelo arborescente debe agregarse la ecuación que relaciona las cotas de las secciones transversales, que en primera aproximación, notando con Z a la cota, se puede expresar como:

$$Z_i = Z_j = Z_k \quad (6)$$

Para un análisis más detallado sobre este ítem ver Jacovkis [6].

### Métodos Numéricos

Para resolver numéricamente la ecuación (2) que representa matemáticamente el modelo de onda cinemática se hizo uso del método de diferencias finitas en base a dos esquemas muy conocidos: el método de Muskingum y el método de Godunov.

a) Método de Godunov:

En 1959 S. K. Godunov propone una forma de usar la teoría de las características para resolver problemas conservativos y su aplicación en la resolución del problema de Riemann.

Aplicado este esquema a la ecuación (2) resulta:

$$S_{i,n+1} = S_{i,n} - \frac{(K * M)}{H} * [(S_{i+1,n})^{3/2} - (S_{i,n})^{3/2}] \quad (7)$$

donde: K es el intervalo finito sobre la variable temporal ( $\Delta t$ ), H es el intervalo finito sobre la variable espacial ( $\Delta x$ ),  $M = \frac{Q}{S^{3/2}}$  que en función de los parámetros físicos de los sistema hídricos

se puede escribir como:  $M = \sqrt{\frac{g * i}{P * f}}$  en donde i es la pendiente del lecho del canal. P es el perímetro mojado, y f es el coeficiente de fricción.

Este método es especialmente adecuado para estudiar ondas de choque.

#### b) Método de Muskingum:

Este esquema, muy popular entre los ingenieros hidráulicos, fue desarrollado por el Cuerpo de Ingenieros de los Estados Unidos de Norteamérica y por M. C. Carty entre 1934 y 1935, para el esquema de control de caudales del río Muskingum en Ohio.

Básicamente el resultado de aplicar este esquema en diferencias finitas a la ecuación que gobierna el modelo puede resumirse como sigue:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\chi (Q_{i,n+1} - Q_{i,n}) + (1 - \chi) (Q_{i+1,n+1} - Q_{i+1,n})}{\Delta t} \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{\lambda (Q_{i+1,n+1} - Q_{i,n+1}) + (1 - \lambda) (Q_{i+1,n} - Q_{i,n})}{\Delta x} \quad (9)$$

donde  $\chi$  y  $\lambda$  son los parámetros de ponderación temporal y espacial respectivamente.

Agrupando estas dos últimas expresiones para formar la ecuación de interés pero ahora escrita en diferencias finitas resulta:

$$Q_{i+1,n+1} = \frac{\left(\kappa \chi + \frac{\Delta t}{2}\right) * Q_{i,n} + \left(\frac{\Delta t}{2} - \kappa \chi\right) * Q_{i,n+1} + \left(\kappa (1 - \chi) - \frac{\Delta t}{2}\right) * Q_{i+1,n}}{\beta} \quad (10)$$

donde:  $\beta = \kappa (1 - \chi) + \frac{\Delta t}{2}$  y  $\kappa = \frac{\Delta t}{C}$ , siendo C la velocidad de propagación de la onda.

### Experimentos Numéricos

Al trabajar con canales reales, se hace imprescindible conocer con precisión los valores de los parámetros físicos de los mismos. Con tal fin se recurrió como fuente para tomar estos datos a Henderson [2] y a los informes del Ingeniero Gerardo Riccardi [7] de la Universidad Nacional de Rosario, quien con un grupo de ingenieros hidráulicos ha trabajado desde hace algún tiempo en la cuenca del Gran Rosario, en donde se encuentra el Arroyo Ludueña con un pequeño canal afluente, que es el canal Ibarlucea.

El arroyo Ludueña es un curso de agua del sureste de la provincia de Santa Fe, que fluye en la dirección noroeste y desemboca en el río Paraná luego de atravesar el casco urbano de la ciudad de Rosario (figura 3). Su cauce permanente mide aproximadamente 20 Km. de longitud. El caudal de base, o sea el caudal promedio esperable ante la ausencia de grandes perturbaciones aguas arriba, es de 0,5 a 0,8  $m^3/s$ . En crecidas ordinarias los caudales oscilan entre los 100 y 200  $m^3/s$ , y para crecidas extraordinarias (por ejemplo con probabilidad 1 en 100) el caudal pico esperable es de alrededor de 300  $m^3/s$ , refiriéndose con esto al valor del caudal máximo de la onda de crecida.

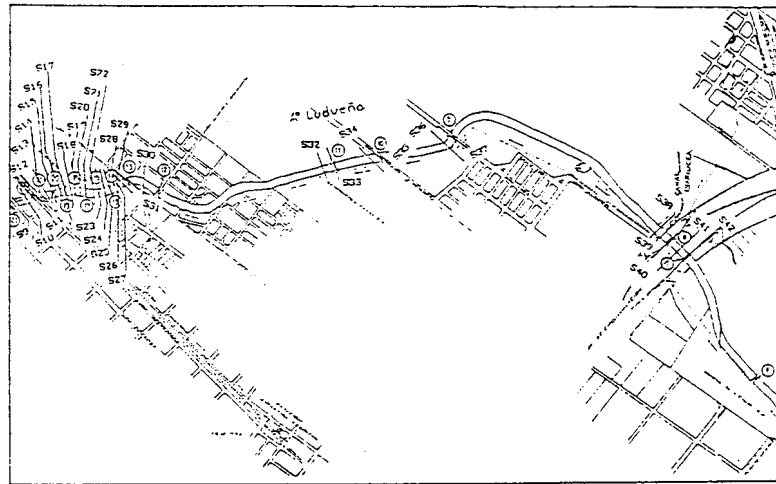


Figura 3: Arroyo Ludueña

La zona donde se encuentra el tramo a modelar pertenece al bloque deprimido de la cuenca, y esta contenido dentro de la zona de aporte permanente de la misma.

El tramo de interés es el comprendido entre el lugar del futuro emplazamiento de la presa de retención de crecidas a construirse sobre el Arroyo Ludueña, sita aproximadamente en la intersección de una línea imaginaria que une las localidades de Pérez y Funes y el Arroyo (al suroeste de Rosario), y el puente de la Avenida Circunvalación de Rosario.

Este tramo mide aproximadamente 9,2 Km, su pendiente media es de 0,001 m/m., y la alineación cardinal es noroeste en los primeros kilómetros para cambiar luego a dirección este.

La configuración del Arroyo en el tramo en estudio está constituida por un cauce principal cuya profundidad (desde el fondo del cauce al desborde) oscila entre los 3 y 5,5 m. y tal que para la altura de desborde el ancho superficial es de 20 a 30 m.

De su afluente, el Canal Ibarlucea, se poseen datos que lamentablemente son estimaciones hechas sobre modelos anteriores.

La disposición simplificada del Arroyo Ludueña y del Canal Ibarlucea se puede visualizar en la siguiente figura:

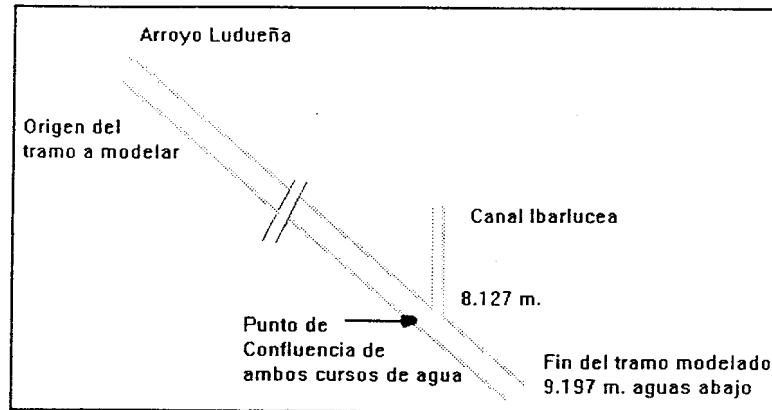


Figura 4: Esquema de la red hídrica modelada

Se modelizó una tormenta, que se representó aguas arriba por medio de un hidrograma de entrada denominado OCINE, desarrollado por el Ingeniero Zimmerman de la Universidad Nacional de Rosario (ver [6]) que se esquematiza en la figura número 5.

El tramo modelado del Arroyo Ludueña tiene una extensión de 9197 m. con un caudal de base de  $0.8 \text{ m}^3/\text{s}$ ; el aporte del canal Ibarlucea a 8 km. del comienzo del tramo del arroyo a modelar posee un caudal también determinado por el modelo OCINE.

El punto de confluencia entre el canal 'A' Arroyo Ludueña aguas arriba, y el canal 'B' Canal Ibarlucea, se encuentra a 8127 m. del origen del tramo a modelar.

El hidrograma de entrada en la sección aguas arriba tiene como valores característicos:

Para el Arroyo Ludueña:

Perímetro mojado: 58.5 m

Caudal máximo del pico de crecida:  $220 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Tiempo de la crecida para el caudal máximo: 16 horas.

Para el Canal Ibarlucea:

Perímetro mojado: 10 m. (aproximadamente)

Caudal máximo del pico de crecida:  $52 \text{ m}^3/\text{s}$ .  
 Tiempo de la crecida para el caudal máximo: 16 horas.  
 Coeficiente de Manning para ambos 0.042

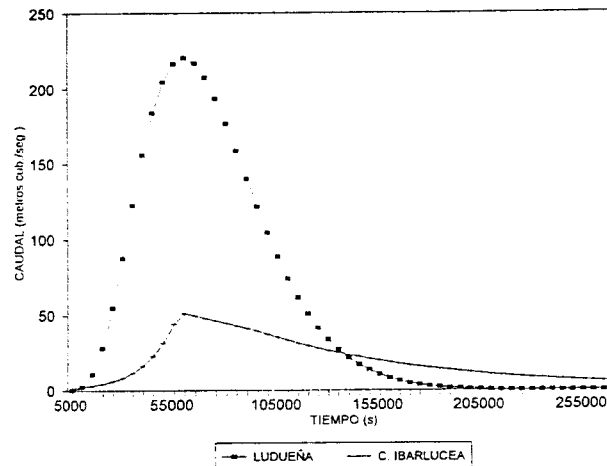


Figura 5: Hidrograma de entrada OCINE

El resultado de aplicar el modelo al sistema antes descrito se muestra en la figura número 6, en la cual las cruces corresponden a valores aforados o medidos del caudal sobre los cauces reales.

El hidrograma que aparece en la figura 6 corresponde a los valores del caudal aguas abajo en la sección final del tramo modelado. El tiempo de retardo entre el hidrograma de los valores calculados y el de los medidos coincide plenamente y es igual a 10 horas.

La atenuación del pico de crecida es para el presente modelo es de un 36 % del valor máximo, mientras que para los valores medidos se registra una disminución del 27 %.

En todas las corridas numéricas realizadas para calibrar el modelo se comprobó que el mismo respeta fielmente la forma de las ondas de crecida.

Como la base del modelo es la ecuación (2) de Saint Venant, que no es más que la ley de conservación de masa de fluido, se calibró el código numérico para que la cantidad de fluido entrante aguas arriba o en la confluencia fuera igual a la que sale aguas abajo del tramo modelado.

Con tal motivo se ajustó el tamaño de la malla espacial hasta fijarlo en  $\Delta x = 1250 \text{ m}$ . para el paso de la red espacial y para la temporal resultó ser  $\Delta t = 500 \text{ seg}$ .

Con estos tamaños de red ambos esquemas numéricos (Muskingum y Godunov) perdían sólo un 0.5 % de la masa total de fluido que ingresaba al sistema aguas arriba y de la que salía aguas abajo.

Además ambos esquemas en diferencias finitas dieron resultados ampliamente coincidentes al aplicarse con los tamaños de malla antes detallados, a tal punto que en lo que sigue no se hará mención a cual de ellos se utilizó al momento de exhibir un resultado.



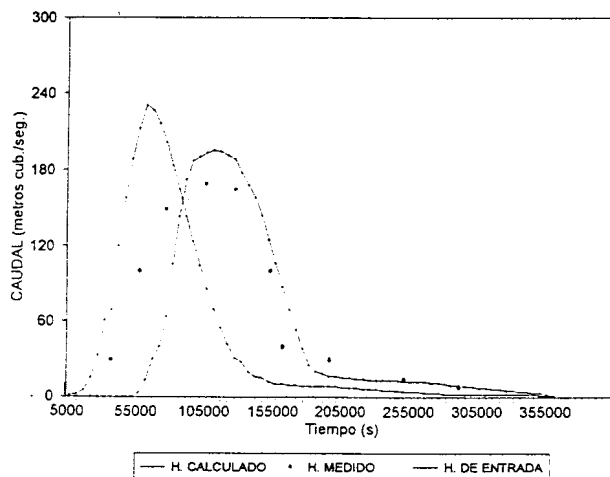


Figura 6: Comparación de los resultados del modelo con mediciones sobre los canales

Se observó que para que la ecuación en diferencias representara la ley de conservación de masa debían disminuir ambos tamaños de la malla de discretización, es decir sobre la variable espacial y sobre la variable temporal simultáneamente, ya que si lo hacía una sola por vez el código se alejaba de la conservación de la masa en mayor medida que en el otro caso.

Las diferencias entre el modelo propuesto y los valores medidos se pueden explicar por medio de algunos de los siguientes hechos:

- \* Errores en los hidrogramas de entrada al modelo.
- \* Secciones variables de los canales.
- \* Simplificación de un modelo bidimensional.
- \* Coeficiente de Manning variable con la altura del líquido.
- \* Características físicas del canal.

#### Estudio del parámetro de ponderación espacial en el método de Muskingum

La experiencia acumulada nos enseña que las pendientes de los ríos que se pueden modelar con éxito por medio del esquema de Muskingum están en un rango que va de los  $8 \cdot 10^{-4}$  a  $2 \cdot 10^{-3}$  m/m.

Otro factor a tener en cuenta para aplicar este esquema se halla relacionado con el parámetro  $\chi$  que tradicionalmente y según lo indica Cunge [8] deber ser menor que 0.5 para que el esquema resulte estable. En el presente trabajo se introdujeron modificaciones que hicieron que los valores del anterior parámetro sufran correcciones.

Con tal motivo es que primero se detalla la modificación introducida, que básicamente se refiere a la forma en la que se expresa el parámetro  $\kappa$ , al cual se le fijó una dependencia funcional bien precisada con el caudal, como sigue:

$$\kappa = \frac{2}{3} \frac{\Delta x}{(M^{2/3} Q^{1/3})} \quad (11)$$

Con esta modificación se encuentra experimentalmente que el valor del coeficiente de peso para el cual el esquema no presenta inestabilidades numéricas, esta en un rango que abarca desde 0.14 a 0.22. Este resultado experimental coincide totalmente con lo obtenido por Gatti [9].

### Conclusiones

Dado el reducido costo computacional del modelo de 'Onda Cinemática' el resultado hallado en el presente trabajo motiva la aplicación del mismo a cursos de agua como el tratado aquí, dada su fácil calibración y sus muy aceptables resultados.

Por otro lado para los tamaños de malla de discretización utilizados los esquemas en diferencias finitas empleados se mostraron muy versátiles como herramientas en el tratamiento numérico de leyes de conservación escalares.

La modificación introducida en el método de Muskingum mejora los resultados obtenidos con este esquema, pero lamentablemente un tratamiento teórico sobre este particular aun no está disponible.

Siendo el presente un modelo sobresimplificado de redes hídricas reales, teniendo en cuenta la relación costo de modelización versus resultados, es un camino viable para una aproximación muy razonable a modelos mas complejos.

### Agradecimientos

El autor agradece el apoyo económico de la Universidad de Buenos Aires y de su Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, y al Dr. Pablo M. Jacovkis por sus valiosos comentarios.

### Bibliografía:

1. Lighthill M. and Whitham G., On Kinematic waves. 1 Flood movement in long rivers. Proceedings of The Royal Society A 229 - 1955.
2. Henderson, F. M., Open Channel Flow, McMillan, New York, 1966
3. Mahmood, K. and Yevjevich ,V., Unsteady Flow in Open Channels, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado 1975
4. LE VEQUE, R., Numerical Methods for Conservation Laws. Birkäuser Verlag, Berlin, 1990
5. Stoker, J., Water Waves, New York, 1959
6. Jacovkis, P. M., One-dimensional hydrodynamic flow in complex networks and some generalizations SIAM J. Appl. Math. 51 (1991) . pags. 948-966
7. Riccardi, Gerardo A., Modelización Matemática Unidimensional Compleja y Bidimensional de Flujos a Superficie Libre. Informe anual 1990 - Dpto. de Hidráulica e Ing. Sanitaria de la U.N.R., 1991
8. Cunge, J., On the Subject of a Flood Propagation Computational Method (Muskingum Method) Journal of Hydraulic Research, pags. 205-230, 1969
9. Gatti, L., Los Aprovechamientos Hidráulicos, E.U.D.E.B.A., 1961