

**FMPIMP: UN CODIGO PARA DETERMINAR LA HIDRODINAMICA
EN MEDIOS PERMEABLES EN REGIMEN IMPERMANENTE**

Fabián A. Bombardelli, Angel N. Menéndez
Laboratorio de Hidráulica Aplicada, INCYTH, Secretaría de Recursos Naturales
y Ambiente Humano, Casilla de Correo 21, 1802 Aeropuerto Ezeiza, Argentina

RESUMEN

Se presenta un modelo matemático bidimensional en un plano vertical para la hidrodinámica en medios permeables en régimen impermanente, basado en el método de los elementos finitos. Se muestra la validación del modelo y se presenta una aplicación al estudio de la variación del nivel freático en las márgenes del río Uruguay, aguas abajo de la presa de Salto Grande, debido a la operación de la obra.

ABSTRACT

A two-dimensional mathematical model in a vertical plane, which solves the unsteady flow in a porous media based on the finite element method, is presented. The validation of the model is shown. An application to the study of the variation of the phreatic level in the riversides of Uruguay river, downstream of Salto Grande dam, due to the dam operation, is presented.

INTRODUCCION

Los escurrimientos en medios permeables, en especial los que tienen lugar en suelos, han sido objeto de numerosas investigaciones y desarrollos, entre otros, por los siguientes motivos:

- * la necesidad de evaluar las velocidades en el entorno de pozos de abastecimiento de agua potable,
- * el cálculo de las presiones neutras (presiones de poro) a las que están sometidas las laderas de un camino de montaña a fin de establecer su estabilidad,
- * la evaluación del límite de la intrusión salina en suelos costeros,
- * la determinación de las condiciones hidrodinámicas para analizar relaves en minas de cobre.

Los modelos matemáticos de menor complejidad existentes atacan el problema en forma unidimensional y en régimen permanente. Se obtienen así fórmulas simplificadas tales como la difundida expresión de Dupuit-Forchheimer [1]. Si bien estas aproximaciones son suficientes en una gran cantidad de situaciones prácticas, en particular las que buscan hallar el caudal de filtración por masas de suelo permeables, existen problemas que requieren de una representación más compleja, debiendo incorporarse la impermanencia del flujo y, al menos, un análisis bidimensional.

El programa FMPIMP, desarrollado en el INCYTH, es, precisamente, una aproximación bidimensional en régimen impermanente al flujo en medios porosos, especialmente apto para el escurrimiento en suelos que presentan acuíferos no confinados. A partir de una formulación variacional, el problema se discretiza usando el método de elementos finitos.

PLANTEO DEL PROBLEMA

El modelo FMPIMP fue concebido para responder básicamente a dos problemas: el primero, determinar la filtración que tiene lugar a través de presas de materiales sueltos; el segundo, contribuir a evaluar la estabilidad de márgenes sometidas a ascensos y descensos relativamente bruscos de los niveles de agua externos. En especial, fue materializado para resolver un caso concreto de erosión de márgenes del río Uruguay aguas abajo de la presa de Salto Grande, emprendimiento binacional entre Argentina y Uruguay.

La operación de las casas de máquinas (cuyo caudal de erogación responde a la demanda de energía) y del vertedero (estructura cuya misión consiste en controlar el paso de los picos de crecidas que tienen lugar en el río) acarrea variaciones intradiarias y diarias del nivel en el curso que, a priori y dada su magnitud, podrían ser parte de las causas que motivan las erosiones que son observadas en las márgenes del río Uruguay desde el emplazamiento de la obra hasta la localidad de Paso Hervidero, ubicada 42 km aguas abajo. Si los descensos del nivel del río son comparativamente bruscos y duraderos, se pueden originar fenómenos llamados de "desembalse rápido", en los que el nivel freático en la masa del suelo, cuya descarga está naturalmente limitada por la permeabilidad, no puede responder con la misma celeridad a las variaciones externas. Sin embargo, corrientemente esos descensos bruscos van acompañados por elevaciones igualmente bruscas de nivel.

Habitualmente, los cálculos de estabilidad de taludes para "desembalses rápidos" parten del análisis de la situación más desfavorable, consistente en el instante posterior a la caída de nivel. Se razona que las presiones de poro aún no han sido disipadas en esa configuración, ya que el agua no ha drenado. La sucesión de "embalses rápidos" a los descensos bruscos hace que el fenómeno de "desembalse rápido" no se manifieste aisladamente, puesto que con la misma celeridad con que el nivel externo desciende, asciende con posterioridad. Esto obliga a reformular el criterio de cálculo de la estabilidad, debiéndose analizar la evolución temporal del fenómeno para identificar el instante crítico respecto del coeficiente de seguridad del talud. Como las presiones de poro constituyen un insumo básico de los cálculos de estabilidad, se hace necesario contar con una descripción temporal del nivel freático y las cargas hidráulicas dentro de la masa de suelo.

Por lo tanto, el modelo FMPIMP fue utilizado para establecer cómo varían los niveles freáticos dentro del cuerpo del talud de márgenes cuando se alteran los niveles en el río con motivo de la operación de la presa (centrales más vertedero), de manera de contribuir a determinar su grado de estabilidad.

FORMULACION MATEMATICA

La ecuación que rige el escurrimiento del agua en medios permeables es la conocida expresión de Darcy [1]. En base a experiencias de laboratorio, H. Darcy estableció que el caudal que circula por una muestra de suelo saturado en una dirección "s" es proporcional a la diferencia de niveles de agua a ambos lados de la misma. Elaborando conceptualmente las magnitudes puestas en juego en las experiencias de Darcy, es posible expresar su ley en términos matemáticos del siguiente modo:

$$v_s = -k \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad (1)$$

donde v_s es la velocidad en un punto del suelo, en la dirección principal "s" de escurrimiento, φ el nivel piezométrico o "carga hidráulica" y k el coeficiente de permeabilidad, que no sólo depende de las características del suelo sino también de las propiedades del fluido percolante. En general, se

supone que el medio es isótropo [2, 3], es decir que k no depende de la dirección "s"; sin embargo es necesario admitir heterogeneidad espacial, es decir que k es una función de las variables espaciales.

La ley de Darcy provee tres ecuaciones (una para cada dimensión espacial), con cuatro incógnitas: la carga hidráulica y las tres componentes de la velocidad. Una cuarta relación se obtiene planteando el principio de conservación de la masa en un elemento diferencial de suelo, para un flujo incompresible:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2)$$

Dada la generalidad de su deducción, la Ecuación (2) resulta aplicable a los acuíferos tanto confinados (que son aquellos limitados por capas impermeables) como no confinados, con el único requisito que se conserve la incompresibilidad tanto del fluido como del suelo.

La ecuación anterior debe ser resuelta para condiciones de borde convenientes. En los problemas relativos a escurrimientos en presas y taludes, la condición de borde sobre contornos impermeables S_i es $v_n=0$, donde "n" es la dirección normal al contorno. En bordes lindantes con escurrimientos superficiales S_e (por ejemplo, márgenes), se impone la carga hidráulica $\varphi=h$, donde h es la altura piezométrica de dichos escurrimientos.

En los acuíferos no confinados, existe una zona de transición entre una situación de poros saturados a otra de poros libres de agua. En ella, el grado de humedad del suelo varía progresivamente desde 0 (poros vacíos) hasta 1 (poros completamente llenos). A través del concepto de "tabla de agua" ("water table") se asume que existe una superficie por sobre la cual hay aire en todos los poros y por debajo de la cual sólo hay agua. El concepto de "nivel freático" establece el lugar geométrico de los puntos con presión atmosférica. Los fenómenos capilares proveen una sobrelevación del nivel de agua dentro de los poros del suelo que determinan que la tabla de agua no coincida con el nivel freático. Las ideas que siguen llevan implícita la hipótesis según la cual los fenómenos capilares no son de significación, lo que resulta válido para suelos de mediana permeabilidad [1]. De este modo, el nivel freático y la tabla de agua coinciden. Por consiguiente, para la superficie libre S_f , a presión atmosférica, la condición de borde viene dada por $\varphi=z$, donde z es el nivel de esa superficie medido respecto del plano de referencia.

El inconveniente adicional que surge con los acuíferos no confinados reside en que no se conoce a priori la posición de la superficie libre y que, en un esquema en régimen impermanente, es variable en el tiempo. En consecuencia, la posición de la superficie libre forma parte de la solución del problema. Sobre ella puede plantearse la condición cinemática [1]:

$$\beta \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z - e - v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad \text{sobre } S_f \quad (3)$$

en la que $\zeta = \zeta(x, y, t)$ es la coordenada de la superficie libre según el eje vertical "z", β corresponde a la porosidad efectiva (o "specific yield") y e representa la evaporación (o la lluvia cuando $e < 0$).

Debe diferenciarse la porosidad de la porosidad efectiva. Mientras la primera alude al cociente entre el volumen poral y el volumen total de una masa de suelo, la segunda se define como el volumen de agua drenado por gravedad desde una muestra inicialmente saturada dividido por el volumen total de la muestra. La distinción tiene por objetivo eliminar de la consideración a los pequeños poros en los que el agua está queda sujeta por campos de fuerza de origen superficial que impiden la libre participación del fluido en las variaciones de la superficie libre [2].

RESOLUCION NUMERICA

Dada la relativa uniformidad longitudinal ($\partial/\partial y \approx 0$) en análisis de márgenes, el problema se consideró bidimensional.

Para el tratamiento de la superficie libre se planteó un procedimiento en dos pasos. Durante el primero se mantiene fija su posición y se impone la condición $\varphi = z$, determinándose la distribución espacial de las cargas hidráulicas mediante la resolución de la Ecuación (2). En el segundo paso, se actualiza la posición de la superficie libre mediante el uso de la Ecuación (3). Si el paso temporal es pequeño, el cálculo así planteado resulta suficientemente preciso. En caso contrario, deberían efectuarse iteraciones considerando también la posición actualizada de la superficie libre al calcular la distribución de las cargas hidráulicas.

Para la resolución numérica de la Ecuación (2) se utilizó el método de los elementos finitos. Por ello resultó conveniente partir de su formulación variacional. El funcional asociado es el siguiente:

$$V = \frac{1}{2} \iint_R \left[k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy \quad (4)$$

donde R es el dominio de cálculo. Su minimización ($\delta V = 0$), junto con las condiciones de borde fijas sobre los contornos S_a y S_b , conduce a la resolución del problema.

Se adoptaron elementos finitos triangulares. Discretizando la función φ en términos de sus valores nodales φ_k , la minimización del funcional conduce a las ecuaciones:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

donde m es la cantidad total de nodos. El sistema de ecuaciones algebraicas lineales resultante se resolvió por el método de Gauss-Seidel.

Por su parte, la discretización de la Ecuación (3) conduce a un sistema algebraico tridiagonal, resuelto por el método de doble barrido.

Este procedimiento de cálculo se implementó en el programa computacional FMPIMP.

Un aspecto particular de la implementación residió en la selección de la metodología de construcción de la red de cálculo. En efecto, puesto que la superficie libre va variando de posición a medida que transcurre el tiempo, la frontera superior de cálculo se va modificando, lo cual acarrea un cambio paso a paso del recinto de cálculo, debiéndose actualizar la red. En función de las aplicaciones que dieron origen al modelo, se decidió implementar un algoritmo simplificado, consistente en la disposición de nodos en las intersecciones de rayos cuasi horizontales equiespaciados y rayos cuasi-verticales, dispuestos con inclinaciones diversas, que parten de nodos en la base con posiciones variables y procuran reflejar taludes de presas o márgenes de ríos. Esta disposición en rayos hace posible una densificación simplificada de la malla de cálculo.

VERIFICACION DEL MODELO

Para validar el modelo, se ensayaron tres situaciones, a saber:

- 1) En primer lugar, se probó el conocido caso de una masa permeable homogénea, de paredes

verticales, con diferentes niveles de agua a cada lado de la misma, que descansa en un manto impermeable (ver Figura 1). Este problema en régimen permanente tiene solución analítica mediante el uso de transformaciones conformes [1].

Se utilizaron 1020 nodos para un total de 1900 elementos, lo que se consideró una discretización conveniente, compatible con las disponibilidades de RAM de la computadora personal donde se corrió el modelo y la representación adecuada del escurrimiento. El algoritmo de resolución para régimen impermanente fue utilizado como método de iteración. A medida que transcurre la iteración se mantiene el número de elementos y nodos pero varía la posición de estos últimos. En la Figura 2 se muestran los resultados para el nivel freático de acuerdo a la solución analítica (tomada de [3]) y al presente modelo. Se observa que el acuerdo es satisfactorio.

2) El segundo ensayo consistió en la simulación de un escurrimiento estacionario a través de una presa. En la Figura 3 se muestra la comparación entre los resultados de un modelo matemático bidimensional en régimen permanente (tomados de [1]) y del presente modelo. Para la aplicación del programa FMPIMP se emplearon 612 nodos y 1100 elementos. Nuevamente se observa que el acuerdo es satisfactorio.

3) La validación en régimen impermanente fue realizada en base al caso de una caída brusca del nivel en el exterior de la masa permeable homogénea de paredes verticales, ensayada previamente para condiciones estacionarias [4]. El nivel freático se supuso uniforme para toda la masa de suelo en $t=0$ (ver Figura 4). Las características del suelo utilizadas fueron las siguientes: $\beta=0.15$, $k=0.12$ m/día. Se empleó una red de 1020 nodos y 1900 elementos.

El principal limitante del paso temporal es la caída de la superficie libre. De la Ecuación (3) surge que:

$$\Delta t < \frac{\beta}{v_z} \Delta z \quad (6)$$

donde Δz indica la escala del paso de discretización vertical. Reemplazando v_z por la expresión de Darcy ($=k \partial\phi/\partial z$), y considerando que la distribución vertical de presiones no es significativamente distinta de la hidrostática ($\partial\phi/\partial z \approx 1$), se tiene que:

$$\Delta t < \frac{\beta}{k} \Delta z \quad (7)$$

Con $\Delta z \approx 0.2$ m, la Ecuación (7) arroja $\Delta t=6$ horas. Se efectuaron ensayos numéricos para distintos valores de Δt hasta reducir el error numérico por debajo de los 3 cm, lo cual se logró para $\Delta t=300$ segundos.

Se avanzó hasta la situación de equilibrio final, que se da alrededor del sexto día. En la Figura 5 se muestra la comparación entre los resultados del presente modelo y la solución obtenida a través de un modelo analógico (tomada de [4]), para distintos instantes de la simulación, expresados a través del parámetro adimensional:

$$\Gamma = \frac{\Delta t k}{\beta L} \quad (8)$$

Otra vez, se aprecia que el acuerdo resulta satisfactorio.

APLICACION AL RIO URUGUAY

Los márgenes del río Uruguay, aguas abajo de la presa de Salto Grande, se caracterizan por la existencia de zonas erosionadas alternadas con afloramientos rocosos. Analizando perfiles estratigráficos de las secciones de erosión, se advierten dos clases de columnas: las playas y las barrancas. Las playas muestran la predominancia de secuencias de arenas, arenas limosas y arenas arcillosas. Las barrancas presentan una capa de suelo vegetal, limos arcillosos y arcillas variadas [5].

En ocho secciones de erosión se montaron diez piezómetros, que registraron niveles freáticos entre marzo y mayo de 1993, una o dos veces al día [5]. Estas lecturas cubrieron un período tanto de aguas bajas y medias (marzo-abril) como de aguas altas (mayo). Para la misma fecha se dispuso de niveles en el río en las secciones de erosión, obtenidos de un modelo matemático hidrodinámico unidimensional previamente calibrado.

El primer tema a discernir consistió en determinar si los descensos del nivel en el río pueden catalogarse como "desembalses rápidos". Para ello se hizo uso del criterio establecido en [6], mediante modelación analógica y matemática, según el cual si el tiempo que demanda la caída del nivel es menor o igual a t_0 , puede considerarse instantáneo, siendo:

$$t_0 = 0.03 \beta \frac{L}{k} \quad (9)$$

Tomando una longitud transversal representativa de cambios significativos de nivel freáticos igual a 25 m, $k=0.1$ m/día (obtenida como valor medio de mediciones "in situ") y $\beta=0.15$, se tiene que $t_0=1.13$ días. En virtud de que las oscilaciones de nivel del río más importantes se dan entre 5 y 10 horas, se concluyó que los descensos corresponden a un caso de "desembalse rápido". Sin embargo, como esos descensos están inmediatamente seguidos por "embalses rápidos", es dable esperar que el sistema no llegue a responder a las oscilaciones sino a la variación de su nivel medio. Para simular el detalle de este proceso se utilizó el programa FMPIMP.

Se realizó una simulación de lo acontecido en la sección del Donovan Polo Club. En esta sección se instalaron dos piezómetros a diferente altura de barranca. La corrida fue realizada con los valores de los parámetros físicos y numéricos que se detallan a continuación: para el paso temporal, se tomaron 500 segundos; la red estuvo constituida por 765 nodos y 1400 elementos; β fue ubicado en 0.15, en base a una curva de porosidad efectiva medida en laboratorio extraída de [2] y el coeficiente de permeabilidad fue de 0.1 m/día. La no incorporación de fenómenos de capilaridad no va en desmedro de la calidad predictiva del modelo, puesto que su influencia se hace relativamente pequeña para columnas freáticas de más de 3 m.

En la Figura 6 se muestra la calibración del modelo matemático bidimensional para la sección del Donovan Polo Club. Los niveles se encuentran referidos al cero del Riachuelo (plano de comparación habitualmente usado) y corresponden al piezómetro de aguas bajas, el más cercano al río. En la figura se representaron también las alturas instantáneas del río. Se observa que el nivel freático calibrado se ajusta satisfactoriamente al medido. Al mismo tiempo, nótese que ese nivel responde sólo a las variaciones diarias y filtra las intradiarias.

Una vez calibrado, el modelo fue utilizado para determinar la evolución temporal de la estabilidad en los márgenes. En estas evaluaciones, la posición de la napa freática se constituye en un insumo básico para determinar el balance de fuerzas que permite calcular el coeficiente de seguridad. Por lo tanto, teniendo para diversos instantes las cargas hidráulicas y los niveles freáticos, se pudo conocer para esos momentos la injerencia de las fuerzas acarreadas por el agua poral.

De los cálculos de estabilidad surgió que las márgenes eran esencialmente estables frente a oscilaciones comparativamente bruscas de los niveles en el río, para todos los tiempos de la simulación.

CONCLUSIONES

El modelo desarrollado es apto para predecir la evolución temporal del flujo, dentro de una margen permeable, en una gama relativamente amplia de casos. La incorporación de una descripción bidimensional y no estacionaria en problemas habitualmente tratados en forma unidimensional y permanente le otorga mayor confiabilidad al resultado del modelo, a la vez que ofrece mayor información. En particular, el modelo se mostró útil para describir fenómenos de rápida oscilación del nivel externo.

El modelo fue empleado para cuantificar las variaciones del nivel freático en el interior de las márgenes del río Uruguay, aguas abajo de la presa de Salto Grande, inducidas por alteraciones rápidas de las alturas del río originadas por la operación de la presa. Se comprobó que el nivel freático no responde a las escalas reducidas de tiempo, mientras que acompaña las variaciones diarias del río. Asimismo, el modelo permitió determinar la evolución del coeficiente de seguridad de las márgenes para sucesiones de descensos y posteriores ascensos del nivel en el río, concluyéndose que los taludes son seguros frente a esta clase de fenómenos.

REFERENCIAS

- [1]Verruijt, A., *Theory of Groundwater Flow*, Macmillan and Co. Ltd, Great Britain, 1970.
- [2]De Wiest, Roger J. M. (Editor), *Flow Through Porous Media*, Academic Press, New York, 1969.
- [3]Polubarinova-Kochina, P. Ya., *Theory of Ground Water Movement*, Traducido del ruso por J. M. R. De Wiest, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.
- [4]Rushton, K. R., Redshaw, S. C., *Seepage and Groundwater Flow. Numerical Analysis by Analog and Digital Methods*, John Wiley & Sons, Great Britain, 1979.
- [5]Brea, J. D., Menéndez, A. N., Yañez, M. N., Bombardelli, F. A., Montalvo, J. L., Arduino, G., De los Santos, J., Sanguinetti, J., Pintos, M., Dias, R., Bianchi, G., Cielli, P., *Estudio de la evolución de márgenes aguas abajo de la presa de Salto Grande. Informe Final*, diciembre de 1993.
- [6]Mitchell, P. H., Hunt, B., *Unsteady groundwater drawdown in embankments*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 23, N° 3, 1985, págs. 241-254.

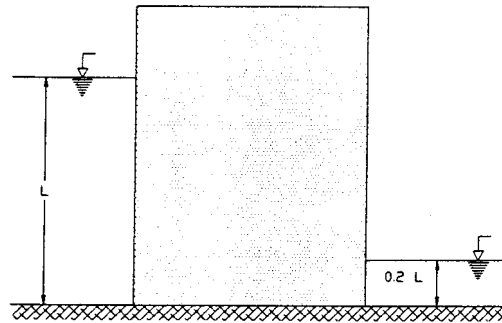


Figura 1: presa homogénea de paredes verticales. Primer ensayo de validación (régimen permanente)

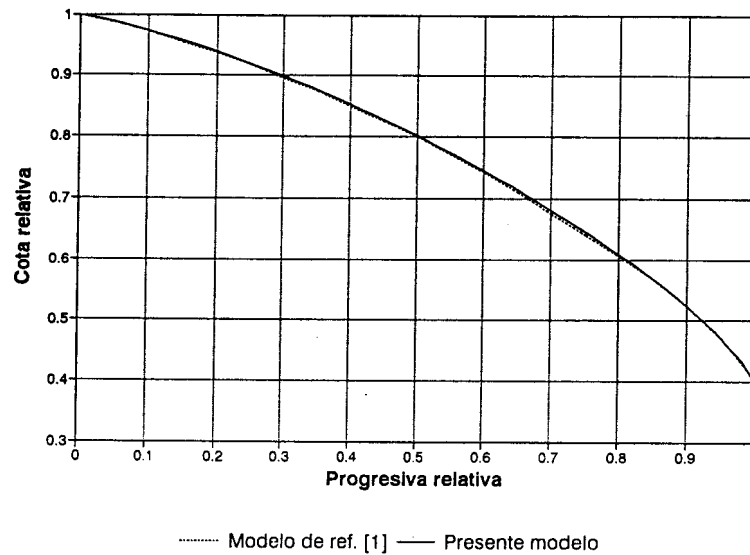


Figura 2: comparación de niveles freáticos para una presa homogénea de paredes verticales. Primer ensayo de validación (régimen permanente)

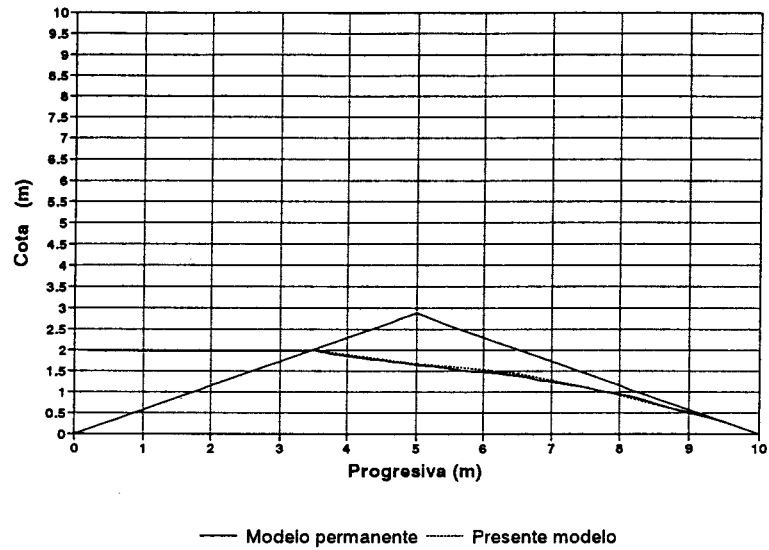


Figura 3: comparación de niveles freáticos para una presa homogénea triangular. Segundo ensayo de validación (régimen permanente)

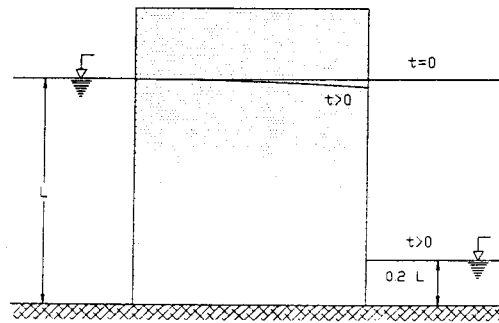


Figura 4: presa homogénea de paredes verticales en régimen impermanente. Tercer ensayo de validación

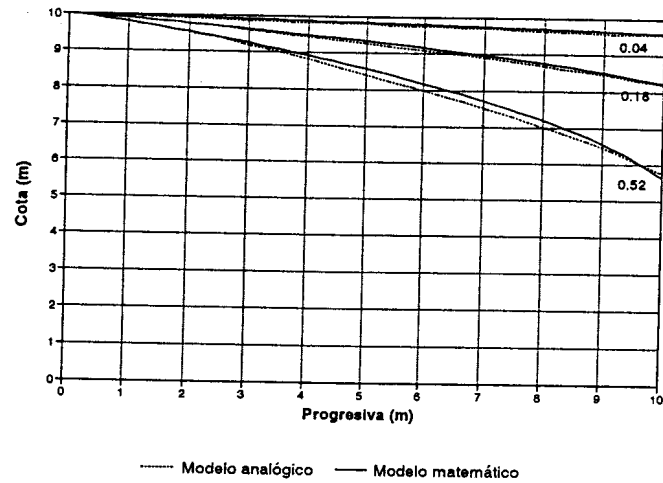


Figura 5: comparación temporal de niveles freáticos para una presa homogénea de paredes verticales en régimen impermanente. Tercer ensayo de validación

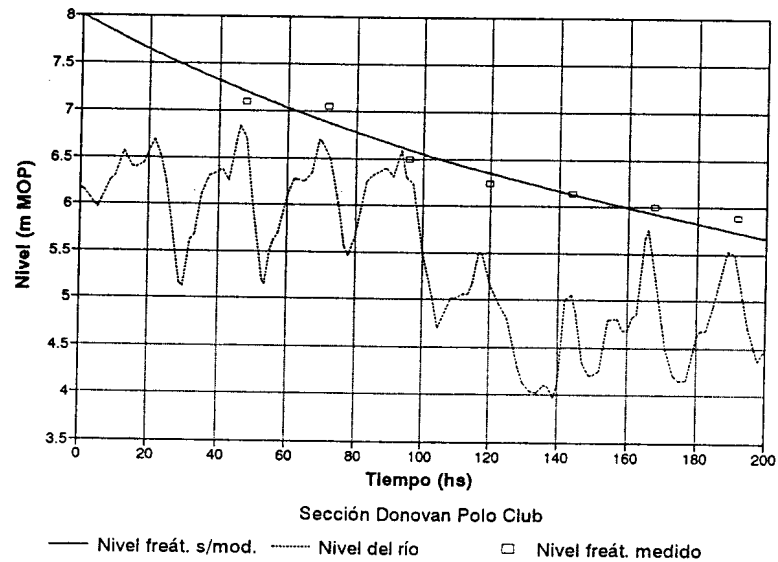


Figura 6: aplicación del modelo a las márgenes del río Uruguay. Calibración