

CONVECCION FORZADA COMPUTACIONAL EN UN TUBO CIRCULAR CON INYECCION
SUSTRACCION DE FLUIDO A TRAVES DE PARED POROSA

Valeri I. Bubnovich, Nelson O. Moraga, César Rosas y *Guillermo Sánchez
Departamento de Ingeniería Mecánica
*Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación
Universidad de Santiago de Chile
Casilla 10233, Correo 2, Santiago, Chile

RESUMEN

Se presenta una solución en diferencias finitas del problema conjugado de convección forzada y conducción de calor en el interior de tubos circulares con inyección o sustracción del fluido a través de la pared porosa del tubo. El objetivo del trabajo es determinar como influye el ángulo de ingreso del fluido a través de la pared sobre el transporte de energía y las tensiones de corte en la superficie interfacial sólido-líquido. Adicionalmente se hace un análisis de la manera más eficiente de incorporar en el algoritmo numérico diferentes tipos de condiciones de borde en términos de la vorticidad y de la función de corriente.

ABSTRACT

This paper presents a finite difference solution to the heat conduction-forced convection conjugate problem inside circular pipes with radial injection or suction through the porous pipe walls. The main objective of this work is to calculate the effect of the fluid inlet angle through the permeable wall on the energy transport and on the wall shear stresses in the liquid-solid interface. Additionally, an analysis to find an efficient way to incorporate in the numerical algorithm different types of boundary conditions in terms of the stream function and on the vorticity is developed.

INTRODUCCION

La inyección o la sustracción del fluido a través de una pared porosa se usa con frecuencia en varios dispositivos energéticos con el propósito de organizar e intensificar diferentes procesos de transporte de energía y de masa. Por ejemplo, la inyección del fluido se aplica con eficiencia para estabilizar las llamas dentro de las cámaras de un motor de aviación, para proteger las paredes y estabilizar el arco eléctrico de un plasmotron, para resguardar las paredes de un ducto de la influencia destructiva de los flujos térmica o químicamente agresivos [1]. Adicionalmente, es el mecanismo inherente de la transferencia del calor latente dentro de un tubo de calor [2]. La inyección o la sustracción del fluido a través de la pared porosa hace muy particular la parte hidrodinámica del problema: la estructura del flujo cambia continuamente a lo largo del canal; por consiguiente, en el sistema no habrá ningún flujo hidrodinámicamente estabilizado. Raithby [3] estudió numericamente el efecto del número de Reynolds radial sobre los números de Nusselt en la superficie interfacial para dos casos, temperaturas o flujos de calor impuestos en la superficie exterior del tubo. Faghri [4] generalizó el modelo matemático propuesto por Raithby incorporando los términos responsables de conductividad térmica axial en la pared y examinó numericamente el efecto de la conductividad térmica y del espesor de las paredes del ducto en los números de Nusselt y en las temperaturas a lo largo de la superficie interfacial sólido-líquido tanto para el caso de la inyección como para la sustracción del fluido a través de la pared en la dirección normal. Moraga et al. [5] tuvieron por objetivo el estudio del mismo problema (Faghri et al [4]) pero analizando el efecto de diferentes ángulos de ingreso del fluido a través de la pared porosa en los números de Nusselt con la temperatura uniforme y permanente impuesta sobre la superficie exterior del tubo.

En el presente trabajo se analizan diferentes ángulos de ingreso o de sustracción del fluido a través de la pared porosa y su influencia sobre la transferencia local de calor y las tensiones de corte en la superficie interfacial sólido-líquido con un flujo constante de calor distribuido uniformemente en la superficie exterior del tubo; también se estudia el efecto del número de Peclet en los números de Nusselt locales para diferentes perfiles de velocidad de ingreso del fluido.

MODELO MATEMATICO

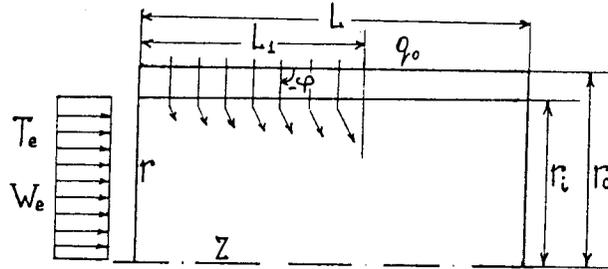


Figura 1: Esquema del modelo físico para la transferencia de calor en la sección longitudinal de un ducto con inyección del fluido.

La geometría del ducto se presenta en la figura 1. La superficie exterior del canal está expuesta a un flujo permanente y uniforme de calor q_0 . El fluido ingresa al ducto teniendo un perfil uniforme de velocidad W_e , y de temperatura T_e . El ingreso radial del fluido a través de la pared porosa se realiza en la superficie interior de la pared con velocidad $V_i \text{ sen } \phi$. El modelo matemático que gobierna el problema en estudio en la forma adimensional es el siguiente:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) + u \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega) \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] \quad (1)$$

$$\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) ; \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} , \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + v \frac{\partial T_f}{\partial r} + u \frac{\partial T_f}{\partial z} = \frac{1}{Pe} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{a}{Pe} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right] \quad (4)$$

Ψ y ω son las funciones de corriente y de vorticidad respectivamente, T_f y T_s son las temperaturas dentro del fluido y del sólido.

Las condiciones iniciales : $\omega = T_f = T_s = \psi = 0$ (5)

Las condiciones de borde:

$$z=0, 0 \leq r \leq 0,5 : u=1, v=0, T_f=0, \omega=0, \psi=r^2/2$$

$$z = 0, 0.5 \leq r \leq 0.5 + \Delta : \partial T_s / \partial z = 0;$$

$$z = L, 0 \leq r \leq 0.5 : v = \partial \psi / \partial z = \partial \omega / \partial z = \partial T_f / \partial z = 0;$$

$$z = L, 0.5 \leq z \leq 0.5 + \Delta : \partial T_s / \partial z = 0; \quad (6)$$

$$r = 0, 0 \leq z \leq L : v = \partial u / \partial r = \partial T_f / \partial r = \psi = \omega = \partial^3 \psi / \partial r^3 = 0;$$

$$r = 0,5, 0 \leq z \leq L_1 : u = V_i \cos \varphi, v = V_i \operatorname{sen} \varphi, \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0,5 \cdot u$$

$$T_s = T_f, \frac{\partial T_f}{\partial r} = \frac{\partial T_s}{\partial r} \cdot K$$

$$\psi = 0,125 - 0,5 \cdot z \cdot v;$$

$$z = 0,5 + \Delta, 0 < z \leq L : \partial T_s / \partial r = 2/K$$

El sistema fue adimensionado en base a las transformaciones siguientes:

$$r^* = \frac{r}{2r_i}, z^* = \frac{z}{2r_i}, u^* = \frac{u}{w_e}, v^* = \frac{v}{w_e}, t^* = \frac{t \cdot w_e}{2r_i}, T^* = \frac{T - T_e}{(T_o r_i / k_f)} \quad (7)$$

La solución del problema depende del siguiente conjunto de los parámetros adimensionales:

la longitud de la superficie de ingreso del fluido ($L_i/2r_i$); la termodifusividad térmica de la pared $a = a_s/a_f$;

la longitud total del canal ($L/2r_i$); el espesor adimensional de la pared porosa $\Delta = (r_o - r_i) / 2r_i$;

el número de Reynolds $Re = (2 \cdot w_e \cdot r_i) / \nu$; ; el número de Peclet

$Pe = Re \cdot Pr$, $Pr = \nu / a_f$; la conductividad térmica adimensional de la pared $K = k_s / k_f$;

el número de Reynolds radial $Re_i = v_i \cdot r_i / \nu$ donde la velocidad de ingreso del fluido

$v_i = \frac{2Re_i}{Re}$, el ángulo φ es con que el fluido ingresa al canal y se mide respecto a la dirección

horizontal y en contra de la marcha de las manecillas del reloj encontrándose en el intervalo

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

En este trabajo se consideran $Re=100$, $\Delta = 0,1$, $k = a = 10$, $L_1=5$, $L=20$, $Re_i = 2$ y se concentra la atención en el estudio de los efectos que tienen el ángulo ϕ de ingreso del fluido y el número de Peclet en los números de Nusselt

$$Nu(Z) = \frac{(\partial T / \partial r)_{r=0,5}}{T_i - T_b} \quad (8)$$

y en las tensiones de corte $\tau(z) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=0,5}$ sobre la superficie interfacial, donde $T_i(Z)$ es la temperatura interfacial y $T_b = T_{bulk}$

ALGORITMO NUMERICO

En el trabajo presente el espacio geométrico presentado en la figura 1 se discretiza con la malla variable siguiente:

$$r_{j+1} = r_j + \Delta r_j, \quad j=1, 2, \dots, M; \quad Z_i = \frac{L(i-1)}{[1, 1-0.05(i-1)]^{160}}, \quad i=1, 2, \dots, K,$$

donde $\Delta r_j = 0.05, j=1, 2, 3, 4; \Delta r_j = 0.04, j=5, 6, 7; \Delta r_j = 0.027, j=8, 9, 10,$

$$\Delta r_j = 0.018, j=12, 13, 14, 15; \Delta r_j = 0.033, j=16, 17, 18;$$

que es no uniforme tanto en la dirección axial como en la dirección radial. El tiempo también se discretiza:

$$t_n = (n-1) \cdot \Delta t, \quad n=1, 2, \dots, N$$

El valor de cualquiera función discreta del modelo se designa en la forma $f(\phi_i, r_j, t_n) \equiv f_{ij}^n$.

Introduciendo en el modelo el tiempo ficticio τ , la ecuación de Poisson(2) del sistema se reduce a la del tipo parabólico siguiente:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \omega$$

De esta manera las cuatro ecuaciones del modelo ahora son del mismo tipo, parabólico y por consiguiente se les puede aplicar a sus soluciones el mismo método y algoritmo de cálculo. En este trabajo se usa el esquema implícito basado en el método de direcciones alternadas (ADI)[6] cuya interpretación particular al problema considerado aquí se comenta en [7].

El tiempo ficticio τ óptimo respecto del tiempo adimensional en el trabajo fue encontrado experimentado numéricamente y resultó ser $(\Delta r_{15}/20)$. Del planteamiento del problema se ve que en las condiciones de borde falta la información respecto a la función de vorticidad en las paredes. Por otro lado, en las mismas fronteras se da la información de lo necesario respecto a la función de corriente. Por consiguiente, en cada pared la función de vorticidad se encuentra para cada instante de tiempo en la forma aproximada en base a las ecuaciones (1) y (2) incorporando además en el algoritmo

un ciclo iterativo interno respecto al tiempo. Los cálculos en este caso para un instante de tiempo se construyen de la manera siguiente. Inicialmente por el método ADI se resuelve la ecuación (1) con las condiciones de borde de primera clase para la función de vorticidad (sus valores para la iteración actual se toman de la iteración anterior). Después iterativamente se resuelve con el mismo método de ADI la ecuación (2) encontrando como el resultado el campo de la función de corriente. El proceso iterativo se detiene cuando se cumple el criterio siguiente:

$$\sum |\psi_{ij}^{s+1} - \psi_{ij}^s| / \sum |\psi_{ij}^{s+1}| < 10^{-4} \quad (9)$$

donde s es el número de iteración. El número de iteraciones necesarias para construir el campo de la función de corriente para cada instante de tiempo disminuye rápidamente de 25 a 30 para los primeros instantes de tiempo hasta 2-4 para la mayoría de los pasos posteriores en el tiempo. En cada instante de tiempo el campo de la función de corriente construido se corrige después en todos los nodos que se encuentran a un paso de las fronteras superior e inferior del dominio en la dirección radial para cumplir con la condición de inyección del fluido en las paredes y con las condiciones de simetría para $r=0$. Esto se puede hacer, por ejemplo, en base a las fórmulas siguientes:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=0.5} = \frac{3\psi_{i16} - 4\psi_{i15} + \psi_{i14}}{2 \cdot \Delta r_{15}} + 0 (\Delta r_{15}^2) \quad \left. \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \right|_{r=0} = \frac{-15\psi_{i2} + 6\psi_{i3} - \psi_{i4}}{2 \cdot \Delta r_1} + 0 (\Delta r_1^2)$$

Como resultado, en los mismos nodos ya no se cumple la ecuación (2); por consiguiente, es preciso redefinir ahí los valores de vorticidad a través de la ecuación de Poisson. En la etapa final de este ciclo iterativo se determina la función de vorticidad en las paredes. Sus valores se despejan de la ecuación (1) escrita en diferencias finitas para los mismos nodos mencionados arriba. Los valores

finales de vorticidad en las paredes son los siguientes: $\omega_{ij}^{p+1} = \omega_{ji}^{p+1} \cdot \alpha + \omega_{ij}^p (1 - \alpha)$, donde $i=1,2,\dots,K, j=M$; α es un parámetro de relajación que influye considerablemente sobre la velocidad de convergencia del proceso iterativo y en este trabajo tenía un valor igual a 0,5. Además, el ciclo iterativo "p" es el exterior para el ciclo iterativo "s". Los cálculos de la función de vorticidad se terminan también al cumplir con la ecuación semejante a (9). Después de encontrar los campos de vorticidad y de la función de corriente, se calculan las velocidades u y v derivando numéricamente la función de corriente; para esto se usan las diferencias finitas centrales. El siguiente paso es encontrar el campo de temperaturas resolviendo en base al mismo método ADI las ecuaciones (3) y (4) del modelo. Todos los cálculos en el programa se terminaban después de cumplir las condiciones

$$|(\varphi^{n+1} - \varphi^n) / \varphi^n| \leq 10^{-4}, \text{ donde } n \text{ es el número del instante de tiempo y } \varphi = (\psi, \omega, T, w).$$

En este algoritmo se usa la notación de los términos convectivos "en contra del flujo" del fluido [7] lo que junto con la forma implícita del esquema asegura la estabilidad numérica incondicional de la misma y la convergencia de su solución. Sin embargo, antes de empezar a resolver el modelo para algunas combinaciones de los parámetros que gobiernan el problema es preciso estudiar la convergencia del esquema para las mallas con diferentes números de nodos con el objetivo de encontrar una malla que permita encontrar la solución del problema en diferencias finitas con un mínimo número de nodos pero con la precisión requerida.

Con este objetivo se ha realizado una serie de ensayos en base a los cuales se escogió la malla no uniforme 21×19 para los flujos que cumplen las condiciones $Re \leq 10^3$, $\Delta \leq 0,1$, $L \leq 20$, $0,01 \leq Pr \leq 10$, $-5 \leq Re_i \leq 2$.

Para determinar el rango de confianza del algoritmo numérico construido se han realizado además varios test de control para comparar las soluciones numéricas con las analíticas conocidas en la literatura para algunos casos especiales más simples y también con los resultados experimentales y numéricos de otros autores. Por ejemplo, comparando nuestros resultados numéricos con los resultados analíticos y experimentales clásicos [8] que proporcionan la información respecto al perfil parabólico de velocidad dentro de un tubo circular y los números de Nusselt en el caso de la temperatura o del flujo de calor impuestos en la pared se encontró la desviación máxima entre los resultados del orden de 3%. Reproducimos además los números de Nusselt y los perfiles de temperatura interfacial construidos por Faghri et al. [4] para los casos de inyección o sustracción de fluido en los rangos siguientes de parámetros:

$1 \leq K \leq 5000$; $0.01 \leq \Delta \leq 0.1$; $-3 \leq Re_i \leq 1$; la desviación máxima encontrada fue del orden de 6%.

Por consiguiente, se puede concluir que nuestro algoritmo, construido en los intervalos mencionados de los parámetros adimensionales que gobiernan el problema y con la geometría presentada en la figura 1, da resultados comparables por su precisión con los experimentales y con los analíticos encontrados en la literatura.

Es preciso destacar que la longitud del canal en el trabajo fue elegida como $L > L_1$ para poder escribir las condiciones de borde en la sección de salida del tubo en donde se suponen que los perfiles de velocidad y de temperatura son desarrollados.

RESULTADOS

La originalidad de este trabajo se basa en la incorporación en el modelo matemático (Faghri et al[4]) del ángulo φ que da la posibilidad de estudiar el transporte local de energía térmica en la superficie interfacial sólido-líquido con diferentes ángulos de ingreso o salida del fluido a través de la pared porosa. Con este objetivo el ángulo φ varía en el trabajo en el intervalo $45^\circ \leq \varphi \leq 315^\circ$ y el número de Peclet se encuentra en el intervalo $10 \leq Pe \leq 1000$. Los resultados obtenidos se presentan en las figuras 2 y 3.

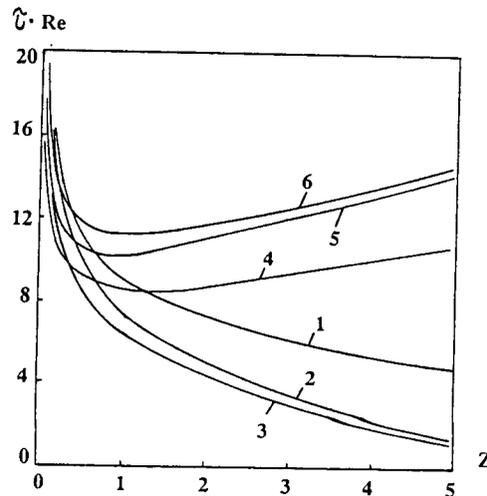


Figura 2. Efecto del ángulo de ingreso del fluido en las tensiones de corte locales, $Re = 100$, $Re_i = 2$:
1- $\varphi = 45^\circ$, 2-90, 3-135, 4-225, 5-270, 6-315.

La figura 2 manifiesta que el caso de inyección de fluido (curvas 4-6) es notoriamente diferente del caso de sustracción del fluido (curvas 1-3) según las tensiones locales de corte. Particularmente, se ve que para la sustracción del fluido a través de la pared porosa, $0 < \varphi < 180^\circ$ con los ángulos φ mayores se produce en el sistema la disminución paulatina de las tensiones de corte en toda la superficie interfacial. Por ejemplo, al aumentar φ desde 45° a 135° se observa que τ disminuye aproximadamente tres veces en la sección $Z=5,0$. También es característico que independientemente del valor del ángulo de sustracción φ las tensiones de corte decrecen paulatinamente en la dirección Z . Por el contrario, en el caso de inyección de fluido, $180^\circ < \varphi < 360^\circ$, al mayor ángulo φ le corresponden siempre mayores valores de las tensiones de corte en la misma superficie. Además, en este último caso las tres curvas tienen sus valores mínimos cerca de la sección ubicada en $Z=1,0$.

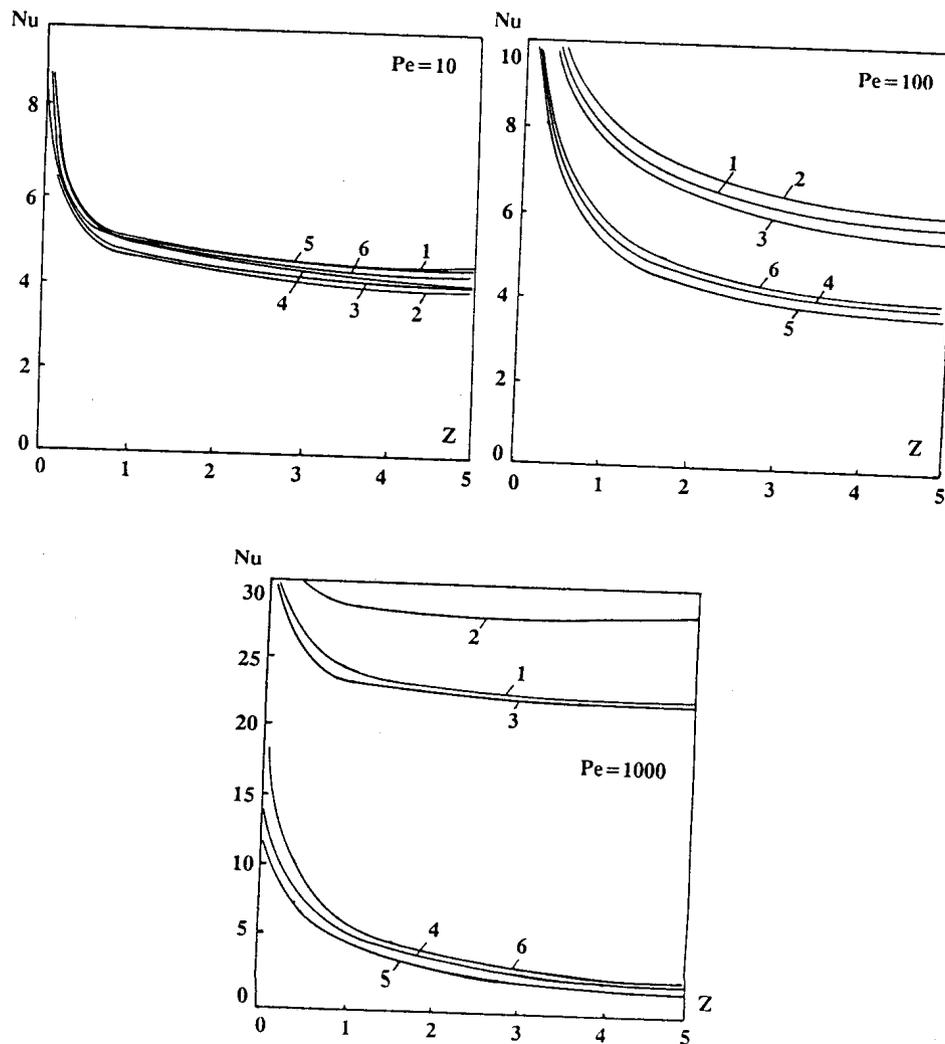


Figura 3. Efecto del ángulo de ingreso del fluido en los números de Nusselt locales para diferentes números de Peclet: 1- $\varphi=45^\circ$, 2- 90° , 3- 135° , 4- 225° , 5- 270° , 6- 315° .

Según la figura 3 el efecto del ángulo de ingreso o de sustracción del fluido a través de la pared depende notoriamente del número de Peclet, el cual en estos casos fue considerado igual 10, 100 y 1000 lo que da los números de Prandtl en este estudio iguales a 0, 1, 1,0 y 10. Particularmente, mientras el número de Peclet es mayor se observan mayores diferencias en los números de Nusselt entre el caso de sustracción de fluido ($0^\circ < \varphi < 180^\circ$, curvas 1-3) y el de inyección del mismo ($180^\circ < \varphi < 360^\circ$, curvas 4-6). Además, se nota que mayores desplazamientos en la dirección del eje Nu sufren las curvas que corresponden a la sustracción del fluido (curvas 1-3). Mientras mayor es el número de Peclet más altas son las posiciones de las curvas. En el caso de inyección de fluido con el crecimiento del número de Peclet los números de Nusselt bajan en toda la superficie pero no en la forma tan fuerte como en el caso de sustracción del fluido.

Por consiguiente, se concluye que tanto el número de Peclet como la filtración del fluido a través de la pared porosa pueden alterar considerablemente los números de Nusselt en la superficie interfacial lo que puede usarse en la práctica para acelerar, detener u organizar de la manera requerida el transporte local de energía térmica en la misma superficie. Este efecto puede ser de mucho interés práctico en el caso de tubos de calor, donde se producen simultáneamente los fenómenos de inyección y de succión en las regiones del evaporador y del condensador del dispositivo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido de CONICYT, proyecto FONDECYT 194-0202 y de DICYT de la Universidad de Santiago de Chile,

REFERENCIAS

- [1] SHUKIN V.K., *Termotransferencia e hidrodinámica de los flujos interiores en el campo de las fuerzas gravitacionales*, Editorial Energía, Moscú, 1980.
- [2] DUNN, P., REAY, D.A., *Heat Pipes*, Pergamon Press, Third edition, 1982.
- [3] RAYTHBY, G. *Laminar heat transfer in the thermal entrance region of circular tubes and two-dimensional ducts with wall suction and injection*. Int.J. Heat Mass Transfer, 14, 1971, págs.223-243.
- [4] FAGHRI A., CHEN, M., MAHEFKY, E.T., *Simultaneous axial conduction in the fluid and the pipe wall for forced convective laminar flow with blowing and suction at the wall*, Int. J. Heat Mass Transfer, V. 32, N2, 1989, págs. 281-288.
- [5] MORAGA, N., BUBNOVICH, V., ROSAS, C., *Un estudio de efecto de inyección del fluido sobre la transferencia de calor dentro de un tubo de calor*, XIII Jornadas de Transferencia de Calor y Materia, Antofagasta, Chile, 1995, págs. 139-144.
- [6] PEYRES, R., TAYLER, T.D., *Computational methods for fluid flow*, Springer-Verlag New-York Inc, 1983.
- [7] KOLESNIKOV, P.M., BUBNOVICH, V.I., *Non-stationary conjugate free-convective heat transfer in horizontal cylindrical coaxial channels*, Int. J. Heat Mass Transfer, V. 31, N6, 1988, págs. 1149-1156.
- [8] ECKERT E.R.G., *Heat and Mass Transfer*, Mc Graw-Hill, 2d. Edition, 1959.