

## ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO DE LÁMINAS METÁLICAS CON GRANDES DEFORMACIONES USANDO UNA TEORÍA DE LÁMINAS EN TÉRMINOS DE ESFUERZOS RESULTANTES

Fernando G. Flores <sup>1</sup>

Departamento de Estructuras, F.C.E.F. y N.  
Universidad Nacional de Córdoba  
Casilla de Correos 916, 5000 Córdoba-Argentina

### RESUMEN

Se presenta una formulación elastoplástica para el análisis de láminas delgadas metálicas. La función de fluencia está definida en términos de esfuerzos integrados en el espesor y se consideran endurecimientos isótropo y cinemático. Con el objetivo de poder considerar grandes deformaciones se utilizan tensiones de Kirchhoff y deformaciones de Almansi. Se presentan algunos ejemplos numéricos en 2 y 3 dimensiones con el objeto de mostrar la calidad de los resultados obtenidos.

### ABSTRACT

An elasto-plastic formulation for the analysis of thin metallic sheet is presented. Yield surface is entirely defined in terms of stress resultants. Both isotropic and kinematic hardening are considered. In order to deal with large strains, Kirchhoff stress and Almansi strain tensors are used. Some examples in two and three dimensions are presented to show the improvements of the formulation.

### INTRODUCCIÓN

La utilización de elementos finitos basados en aproximaciones a teorías de láminas, en contraposición a los obtenidos usando la aproximación de "sólido degenerado"[1], resulta conveniente cuando se pretende analizar el comportamiento de láminas delgadas. Dicha conveniencia radica en que no es necesario integrar la relación constitutiva en el espesor de la lámina con el consiguiente ahorro computacional. En contrapartida no es accesible la utilización de modelos elastoplásticos generales. Esta restricción se ve aliviada en el caso de láminas metálicas delgadas donde resulta suficiente utilizar un modelo de plasticidad de von-Mises (con endurecimiento isótropo y cinemático) basada en un comportamiento hiperelástico de las componentes elásticas. Dentro del rango de deformaciones moderadas ( $E < 0.15$ ) es suficiente considerar una función de fluencia en términos de segundas tensiones de Piola-Kirchhoff. Para deformaciones mayores resulta necesario describir la energía en términos de las tensiones de Kirchhoff. Para ello se calculan las deformaciones elásticas predictoras de Green-Lagrange y partir de estas se evalúan las de Almansi vía push-forward. Las tensiones de Kirchhoff se evalúan a partir de las deformaciones de Almansi suponiendo una relación lineal entre ambos. Una vez satisfecha la condición de

<sup>1</sup>Inv. Asistente de CONICET y Prof. Adjunto Univ. Nacional de Córdoba.

fluencia (se usa el algoritmo de retorno radial) se recalculan los valores de tensiones de Piola-Kirchhoff via pull-back y las deformaciones plásticas de Green-Lagrange asociadas. En este trabajo se presentan aproximaciones en problemas 2-D y 3-D usando elementos basados en la teoría de láminas de Simo. Se adopta la hipótesis de aditividad de deformaciones elásticas y plásticas. Se presentan ejemplos de procesos de conformado de láminas delgadas metálicas, donde queda en evidencia la mejora introducida por la presente formulación.

### TEORÍA DE LÁMINAS UTILIZADA

La aproximación al comportamiento de láminas utilizada se inscribe dentro de las teorías de láminas (en contraste con la denominada aproximación de sólido degenerado [1]), en cuanto a que está formulada en términos de deformaciones generalizadas y esfuerzos. En los apartados siguientes se presenta un resumen de los conceptos esenciales de la formulación, para más detalles se recomienda consultar las referencias.[2-6]

#### Descripción cinemática de la lámina

Cualquier configuración de la lámina en  $\mathbf{R}^3$  queda definida en términos de:

- i) Superficie media de la lámina, definida por una transformación  $\varphi : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbf{R}^3$
- ii) El campo director, definido por la transformación  $\mathbf{d} : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbf{R}^3$ .

Dicho campo define en cada punto de la superficie media la dirección y longitud de la fibra que se mantiene recta independientemente de la deformación (la normal a la superficie media en las teorías de láminas clásicas). El campo director puede descomponerse en:

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{t} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{t}$  es un vector de longitud unitaria ( $\mathbf{t} \in \mathcal{S}^2$ ) y  $\lambda$  es la longitud o relación entre la longitud actual de la fibra y la longitud inicial de la misma.

El dominio  $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathbf{R}^2$  se supone compacto con contorno suave  $\partial\mathcal{A}$  y puntos caracterizados por  $(\xi^1, \xi^2) \in \bar{\mathcal{A}}$ . Llamaremos  $\partial_\varphi\mathcal{A} \subset \partial\mathcal{A}$  y  $\partial_{\mathbf{d}}\mathcal{A} \subset \partial\mathcal{A}$  las partes de  $\partial\mathcal{A}$  donde están prescritos  $\varphi$  y  $\mathbf{d}$  respectivamente.  $\mathcal{S}^2$  es la esfera de radio unitario. Si suponemos  $\lambda = 1$  en todo el proceso, ello implica la inextensibilidad del campo director.

Con esta notación, usando una hipótesis de Kirchhoff generalizada, toda configuración de la lámina se describe por

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 / \mathbf{x} = \varphi + \xi^3 \lambda \mathbf{t}, \quad \xi^3 \in [-h/2, +h/2]\} \quad (2)$$

donde  $[-h/2, +h/2]$  define el espesor de la lámina. Agregaremos un supraíndice '0' a las variables geométricas asociadas con la configuración de referencia  $\mathcal{S}^0$ .

Usando una base estandar  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  en  $\mathbf{R}^3$  podemos escribir

$$\varphi = \varphi^i \mathbf{e}_i; \quad \varphi_{,\alpha} = \varphi_{,\alpha}^i \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{t} = t^i \mathbf{e}_i \quad (3)$$

donde hemos introducido la notación  $(\ )_{,\alpha} = \frac{\partial(\ )}{\partial \xi^\alpha}$ .

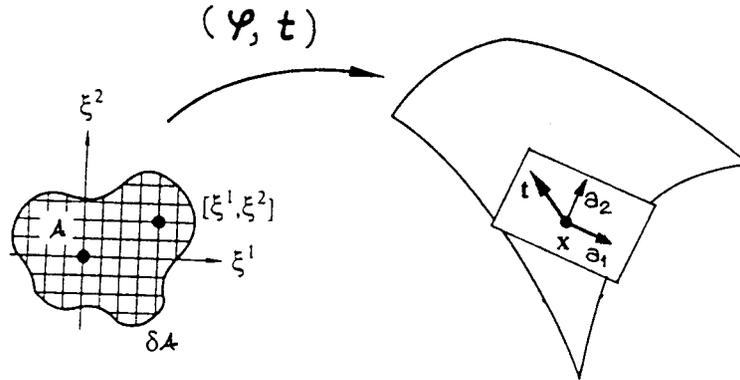


Figura 1: Ilustración de la geometría que define la cinemática del modelo de la lámina

Tanto en la superficie media deformada como la indeformada, es posible definir un sistema coordenado convectivo de la forma

$$\{\varphi_{i\alpha}, \mathbf{d}\} \equiv \{\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_3\} \quad \text{y} \quad \{\varphi_{i\alpha}^0, \mathbf{t}^0\} \equiv \{\mathbf{a}_\alpha^0, \mathbf{a}_3^0\}$$

El gradiente de deformación relativo  $\mathbf{F}$  resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= [\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \mathbf{x}_{i3}] [\mathbf{x}_{i1}^0, \mathbf{x}_{i2}^0, \mathbf{x}_{i3}^0]^{-1} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] [\mathbf{g}_1^0, \mathbf{g}_2^0, \mathbf{g}_3^0]^{-1} \\ &= [\varphi_{i1} + \xi^3 \mathbf{d}_{i1}, \varphi_{i2} + \xi^3 \mathbf{d}_{i2}, \mathbf{d}] [\varphi_{i1}^0 + \xi^3 \mathbf{d}_{i1}^0, \varphi_{i2}^0 + \xi^3 \mathbf{d}_{i2}^0, \mathbf{d}^0]^{-1} \\ &= [\mathbf{a}_1 + \xi^3 \mathbf{d}_{i1}, \mathbf{a}_2 + \xi^3 \mathbf{d}_{i2}, \mathbf{d}] [\mathbf{a}_1^0 + \xi^3 \mathbf{t}_{i1}^0, \mathbf{a}_2^0 + \xi^3 \mathbf{t}_{i2}^0, \mathbf{t}^0]^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange  $\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}]$  resulta como muy buena aproximación en el caso de láminas delgadas (despreciando términos asociados a  $(\xi^3)^2$ )

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} - a_{11}^0 & a_{12} - a_{12}^0 & \gamma_1 - \gamma_1^0 \\ a_{21} - a_{21}^0 & a_{22} - a_{22}^0 & \gamma_2 - \gamma_2^0 \\ \gamma_1 - \gamma_1^0 & \gamma_2 - \gamma_2^0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix} + \xi^3 \begin{bmatrix} b_{11} - b_{11}^0 & b_{12} - b_{12}^0 & 0 \\ b_{21} - b_{21}^0 & b_{22} - b_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \\ \gamma_\alpha &= \varphi_{i\alpha} \cdot \mathbf{d} \\ b_{\alpha\beta} &= \varphi_{i\alpha} \cdot \mathbf{d}_{i\beta} \\ \lambda^2 &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \end{aligned} \quad (6)$$

Notar que  $a_{\alpha\beta}$  es la primera forma fundamental de la superficie media y que  $b_{\alpha\beta}$  se convierte en la segunda forma fundamental si  $\mathbf{d}$  coincide con la normal unitaria (director inextensible) a la superficie media.

Las medidas de deformación generalizadas son entonces (suponiendo  $\lambda = 1$ ):

a) deformaciones membranales de la superficie media de la lámina

$$\varepsilon(\Phi) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} - a_{11}^0 \\ a_{22} - a_{22}^0 \\ 2(a_{12} - a_{12}^0) \end{bmatrix} \quad (7)$$

b) deformaciones de corte transversal

$$\delta(\Phi) = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \gamma_1^0 \\ \gamma_2 - \gamma_2^0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

c) cambios de curvatura de la superficie media

$$\chi(\Phi) = \begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2\chi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} - b_{11}^0 \\ b_{22} - b_{22}^0 \\ 2(b_{12} - b_{12}^0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Luego en forma tensorial

$$\mathbf{E} = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{a}^{0\alpha} \otimes \mathbf{a}^{0\beta} + \delta_\alpha (\mathbf{a}^{0\alpha} \otimes \mathbf{a}^{03} + \mathbf{a}^{03} \otimes \mathbf{a}^{0\alpha}) + \xi^3 \chi_{\alpha\beta} \mathbf{a}^{0\alpha} \otimes \mathbf{a}^{0\beta} \quad (10)$$

recordando la definición del tensor de Almansi  $\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1})$  resulta

$$\mathbf{e} = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + \delta_\alpha (\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^3 + \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{a}^\alpha) + \xi^3 \chi_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta \quad (11)$$

notar que sus componentes referidas a la base convectiva actual son las mismas que las de Green-Lagrange respecto a la base original

Las medidas de la superficie media en las configuraciones original y actual son respectivamente

$$d\mu^0 = \bar{j}^0 d\xi^1 d\xi^2 \quad d\mu = \bar{j} d\xi^1 d\xi^2 \quad (12)$$

con

$$\bar{j}^0 = (\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0) \cdot \mathbf{t}^0 = \det \nabla \mathbf{x} |_{\xi^3=0} \quad \bar{j} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{t} = \det \nabla \mathbf{x}^0 |_{\xi^3=0} \quad (13)$$

también definiremos

$$\bar{J} = \bar{j} / \bar{j}^0 = \det \mathbf{F} |_{\xi^3=0} = \det \bar{\mathbf{F}} \quad (14)$$

### Variaciones admisibles

Sea

$$\mathcal{C} := \{ \Phi := (\varphi, \mathbf{t}) : \mathcal{A} \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2 \} \quad (15)$$

el espacio de transformaciones y  $\Phi \in \mathcal{C}$  la configuración presente. Supongamos además que  $\varepsilon \rightarrow \Phi_\varepsilon \in \mathcal{C}$  sea la curva de configuraciones con origen en  $\Phi$ , esto es  $\Phi_\varepsilon |_{\varepsilon=0} = \Phi$ . Por definición el campo tangente a una curva de este tipo en  $\varepsilon = 0$  se denomina una variación admisible. Así

$$T_\Phi \mathcal{C} = \{ \delta \Phi := (\delta \varphi, \delta \mathbf{t}) : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbf{R}^3 \times T_t S^2 / \delta \varphi |_{\delta_\varphi \mathcal{A}} = 0 \text{ y } \delta \mathbf{t} |_{\delta_t \mathcal{A}} = 0 \} \quad (16)$$

donde

$$T_t S^2 := \{ \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3 / \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} = 0 \} \quad (17)$$

es el espacio tangente a  $S^2$ . Debido a esta última condición  $\delta \mathbf{t}$  puede escribirse como

$$\begin{matrix} \delta \mathbf{t} & = & \bar{\Lambda} & \delta \mathbf{T} \\ (3 \times 1) & & (3 \times 2) & (2 \times 1) \end{matrix} \quad (18)$$

Siendo  $\Lambda_{3 \times 3}$  la matriz ortogonal que transforma el vector  $\mathbf{e}_3$  del sistema coordenado global a la posición actual de  $\mathbf{t}$ , y  $\bar{\Lambda}_{3 \times 2}$  es las dos primeras columnas de  $\Lambda$ . Resulta de mucha utilidad definir

$$\delta \mathbf{t} = \delta \theta \times \mathbf{t} \quad (19)$$

cumplendose

$$\delta \theta \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (20)$$

### Definición de esfuerzos integrados en el espesor

A partir de la expresión de la potencia desarrollada por las tensiones en la teoría tridimensional en función del segundo tensor de Piola-Kirchhoff y de las deformaciones de Green-Lagrange, reemplazando la ec.(10), integrando en el espesor se pueden definir esfuerzos conjugados a las deformaciones definidas en (7,8 y 9) que cumplen las funciones del segundo tensor de P-K.

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &: = \int_{\mathcal{V}^0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \, d\mathcal{V}^0 \\ &= \int_{\mathcal{A}} \left[ \tilde{n}^{\beta\alpha} \frac{1}{2} \dot{a}_{\beta\alpha} + \tilde{q}^{\alpha} \dot{\gamma}_{\alpha} + \tilde{m}^{\alpha\beta} \dot{b}_{\beta\alpha} \right] d\mu \\ &= \int_{\mathcal{A}} \left[ \tilde{\mathbf{n}} : L_u \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\mathbf{q}} : L_u \boldsymbol{\delta} + \tilde{\mathbf{m}} : L_u \boldsymbol{\chi} \right] d\mu \end{aligned} \quad (21)$$

Definiendo una función de energía interna  $\psi$  y usando la desigualdad de Clausius-Duhem en la forma usual se obtiene

$$\tilde{n}^{\beta\alpha} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{\beta\alpha}} \quad \tilde{q}^{\alpha} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \delta_{\alpha}} \quad \tilde{m}^{\beta\alpha} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \chi_{\beta\alpha}} \quad (22)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \rho \, j \, d\xi \quad (23)$$

En forma similar a las deformaciones, los esfuerzos integrados en el espesor pueden escribirse en forma tensorial referidos a la geometría original (2do P-K)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}} &= \bar{J} \left( \tilde{n}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\alpha}^0 \otimes \mathbf{a}_{\beta}^0 + \tilde{q}^{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha}^0 \right) \\ \tilde{\mathbf{M}} &= \bar{J} \tilde{m}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\alpha}^0 \otimes \mathbf{a}_{\beta}^0 \end{aligned} \quad (24)$$

o referido a la configuración deformada (tensor de tensiones de Kirchhoff)

$$\begin{aligned} \bar{J} \tilde{\mathbf{n}} &= \bar{J} \left( \tilde{n}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\alpha} \otimes \mathbf{a}_{\beta} + \tilde{q}^{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} \right) = \bar{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{F}}^T \\ \bar{J} \tilde{\mathbf{m}} &= \bar{J} \tilde{m}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\alpha} \otimes \mathbf{a}_{\beta} = \bar{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{F}}^T \end{aligned} \quad (25)$$

## ECUACIONES CONSTITUTIVAS LOCALES

### Respuesta tensional hiperelástica

Por razones de simplicidad supondremos una respuesta hiperelástica lineal del material entre el tensor de tensiones de Kirchhoff y el tensor de deformaciones de Almansi, de tal forma que las ecuaciones constitutivas resultan

$$\bar{J} \bar{\mathbf{n}} = \bar{J} \begin{bmatrix} \bar{n}^{11} \\ \bar{n}^{22} \\ \bar{n}^{12} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11}^e \\ \bar{\epsilon}_{22}^e \\ 2\bar{\epsilon}_{12}^e \end{bmatrix} = \mathbf{C} \bar{\epsilon}^e$$

$$\bar{J} \bar{q}^e = G h \kappa (\delta_\alpha - \delta_\alpha^p) \quad (26)$$

$$\bar{J} \bar{\mathbf{m}} = \bar{J} \begin{bmatrix} \bar{m}^{11} \\ \bar{m}^{22} \\ \bar{m}^{12} \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{11}^e \\ \bar{\chi}_{22}^e \\ 2\bar{\chi}_{12}^e \end{bmatrix} = \frac{h^2}{12} \mathbf{C} \bar{\chi}^e$$

donde  $h$  es el espesor de la lámina,  $E$  y  $G$  son los módulos elásticos longitudinal y de corte respectivamente,  $\nu$  es la relación de Poisson, y  $\kappa = \frac{5}{6}$ . Las deformaciones y esfuerzos indicados con una barra corresponden a las componentes de los tensores de Almansi y Kirchhoff referidos a un sistema convectivo  $(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \mathbf{t})$  de métrica unitaria sobre la superficie media ( $\bar{a}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$  aquí  $\delta_{\alpha\beta}$  es el delta de Kronecker)

En (26) hemos supuesto descomposición aditiva del tensor de deformaciones en una parte elástica (que denotaremos con un índice  $e$ ) y una parte plástica (índice  $p$ ).

### Condición de fluencia, regla de flujo y ley de endurecimiento

Se utiliza el modelo de plasticidad propuesto en la Ref.[5] que esta expresado en términos de los esfuerzos resultantes  $\mathbf{r}$ . El modelo es equivalente al de von-Mises (basado en la energía de corte), admite endurecimiento isotrópico no lineal y cinemático lineal, y la ley de flujo es asociada. La superficie de fluencia está formada por dos superficies suaves definidas por:

$$\Phi_\mu(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = f_\mu(\mathbf{r} - \mathbf{p}) - \frac{\kappa^2 (e^p)}{\kappa_0^2} \leq 0 \quad \mu = 1, 2 \quad (27)$$

donde  $f_\mu$  es la energía de distorsión (por unidad de superficie de la lámina) normalizada respecto a  $\frac{2}{3} \kappa_0^2 h$  y puede escribirse como

$$f_\mu = (\mathbf{r} - \mathbf{p})^T \mathbf{A}_\mu (\mathbf{r} - \mathbf{p}) \quad (28)$$

siendo  $\kappa$  la tensión de fluencia uniaxial,  $e^p$  la deformación plástica efectiva,  $\mathbf{p}$  la tensión de retorno y

$$\mathbf{r} = \bar{J} [\bar{n}^{11}, \bar{n}^{22}, \bar{n}^{12}, \bar{m}^{11}, \bar{m}^{22}, \bar{m}^{12}, \bar{q}^1, \bar{q}^2] \quad (29)$$

$$\mathbf{A}_\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_0^2} \mathbf{P} & \frac{\text{sign}(\mu)}{2\sqrt{3}n_0 m_0} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \frac{\text{sign}(\mu)}{2\sqrt{3}n_0 m_0} \mathbf{P} & \frac{1}{m_0^2} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{q_0^2} \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

donde

$$\text{sign}(\mu) = \begin{cases} 1 & \mu = 1 \\ -1 & \mu = 2 \end{cases} \quad n_0 = \kappa_0 h \quad m_0 = \frac{\kappa_0 h^2}{4} \quad q_0 = \frac{\kappa_0 h}{\sqrt{3}} \quad (31)$$

Para la integración de la ecuación constitutiva se utiliza el algoritmo de retorno radial que en el caso más general conduce a un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que debe resolverse en forma iterativa. Los detalles del mismo pueden verse en la Ref.[5]. Una vez integrada la ecuación constitutiva se evalúan el 2do. tensor de P-K y la componente plástica del tensor de G-L.

## FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZADA

El modelo constitutivo indicado se ha implementado en elementos de lámina en dos y tres dimensiones. En el primer caso se usaron elementos de 2 y 3 nodos, y en el segundo, cuadriláteros de 4 nodos y triángulos de 6 nodos [7], ambos isoparamétricos. Para evitar el bloqueo por cortante se ha utilizado integración reducida para los elementos bidimensionales y un método de deformaciones impuestas basado en un funcional del tipo Hu-Washizu para los tridimensionales [8]. Se ha trabajado sobre un hidro-código (análisis dinámico con integración explícita de las ecuaciones de equilibrio) y un programa para análisis estático.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

En este apartado se presentan algunos resultados obtenidos con los elementos finitos descritos en los apartados anteriores.

### Estiramiento de una lámina plana con un punzón cilíndrico

Este ejemplo (ver Fig.2) fue propuesto por los Prof. Lee et al de Ohio State University [9] y ha sido utilizado por múltiples autores con el fin de comparar diferentes formulaciones.

Se han usado 14 elementos para la discretización de la mitad de la lámina según la disposición propuesta por los autores del problema. En la Fig. 3 se ha graficado la fuerza

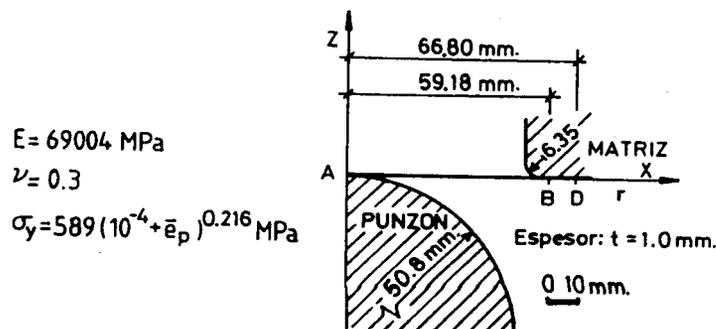


Figura 2: Test de Ohio State University. Geometría y propiedades del material

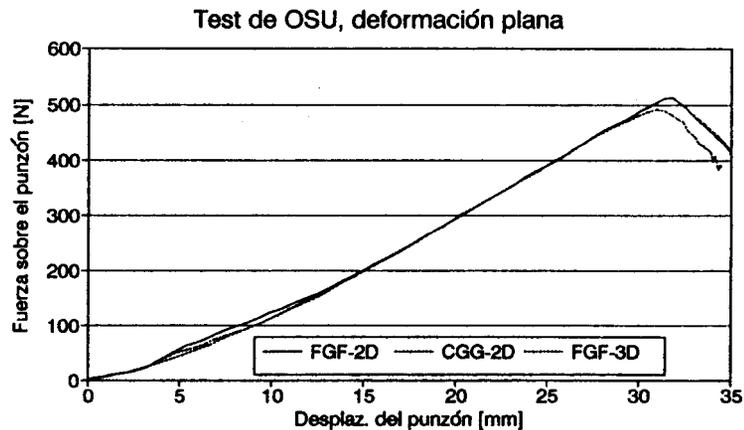


Figura 3: Estiramiento de una lámina plana con un punzón cilíndrico

total sobre el punzón en función del avance del mismo. Los resultados presentados corresponden a un elemento finito de sólido bidimensional [10] (cuadrilátero de cuatro nudos usado para comparación) y a la formulación aquí discutida implementada en un elemento en 2 dimensiones (elemento lineal de 2 nudos) y en 3 dimensiones (cuadrilátero de 4 nudos). La fuerza sobre el punzón presenta un pico más allá de los 30mm de desplazamiento del mismo que no sería posible detectar en caso de utilizar una relación lineal entre 2das. tensiones de Piola Kirchhoff y las componentes elásticas del tensor de Green-Lagrange. La correlación entre los resultados obtenidos con las formulaciones de sólidos y láminas es según puede verse, muy buena.

#### Estiramiento de una lámina circular con un punzón hemisférico

La geometría es la misma que en el caso anterior, sólo que aquí corresponde a un caso axilimétrico. La discretización por elementos finitos es también igual al caso anterior para las formulaciones en 2 dimensiones, para las láminas en 3 dimensiones se han utilizado 75 elementos cuadriláteros (4 nudos) sobre un cuarto de la geometría y también 25 elementos triangulares (6 nudos) sobre un octavo de la lámina. Se ha supuesto un coeficiente de fricción  $\mu = 0,15$  entre la lámina y los útiles.

En la Fig.4.a se muestra la fuerza sobre el punzón en función del desplazamiento del mismo. Como en el caso anterior aparece un pico (no tan marcado) en la resistencia de la lámina. Aquí se ha comparado además con resultados obtenidos con otra formulación de sólido [11].

En la Fig.4.b se presentan los perfiles de deformación plástica efectiva para dos valores de avance del punzón. Puede observarse una muy buena correlación entre los elementos de sólido y los de lámina tanto en 2D como en 3D.

Es importante notar que en el caso de usar una relación lineal entre 2das. tensiones de Piola Kirchhoff y deformaciones de Green Lagrange la resistencia de la lámina es

monotonamente creciente. Además en los perfiles de deformación plástica efectiva no aparece el importante desplazamiento de las máximas deformaciones plásticas hacia la periferia (efecto de la fricción).

### CONCLUSIONES

En el análisis elasto-plástico de láminas, para el caso de deformaciones plásticas moderadas es suficiente trabajar con 2das. tensiones de Piola-Kirchhoff como una función lineal de las deformaciones de Green-Lagrange. Para deformaciones grandes resulta necesario utilizar una relación (lineal) entre esfuerzos de Kirchhoff y las componentes elásticas del tensor de Almansi, para poder captar, por ej., fenómenos tales como la localización. En el caso de láminas tales tensores (para tener sentido físico claro) deben referirse a una base convectiva de métrica unitaria en la configuración deformada.

Los resultados obtenidos para los casos presentados de estiramiento con grandes deformaciones de láminas metálicas, muestran una muy buena comparación con elementos de sólidos confiables. De esta forma la formulación presentada parece ser adecuada para el tratamiento de embutición y estampado de láminas con deformaciones grandes.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado con subsidios otorgados por CONICET y CONICOR.

### REFERENCIAS

1. S.Ahmad, B.M.Irons y O.C.Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements". *Int. J. Num. Methods in Engng.* **2** (1970), 419-451.
2. J.C.Simo y D.D.Fox "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **72**(1989) 267-304.
3. J.C.Simo, D.D.Fox y M.S.Rifai, "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part III: Computational Aspects of The Nonlinear Theory", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **79**(1990) 21-70.
4. J.C.Simo, M.S.Rifai y D.D.Fox, "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part IV: Variable Thickness Shells with Through-the-Thickness Stretching", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **81**(1990) 91-126.
5. J.C.Simo y J.G.Kennedy, "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part V. Nonlinear Plasticity: formulation and integration algorithms", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **96**(1992) 133-171.
6. J.C.Simo y N.Tarnow. "A New Energy and Momentum Conserving Algorithm for the Non-linear Dynamics of Shells", *Int. J. Num. Meths. Engng.*, **37** 1994, 2527-49.
7. F.Flores, E.Oñate y F.Zárate, "New Assumed Strain Triangles for Non-linear Shell Analysis", *Computational Mechanics*, en prensa.
8. E.Oñate, O.C.Zienkiewicz, B.Suarez y R.L.Taylor, "A General Methodology for Deriving Shear-Constrained Reissner-Mindlin Plate Elements". *Int. J. Num. Methds. in Engng.* (1992).

9. J.K.Lee, R.Wagoner y E.Nakamachi, "A benchmark test for sheet metal forming analysis." Reporte Técnico, Ohio State University, 1990.
10. C.G.García Garino, *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto plásticos sometidos a grandes deformaciones*, Tesis de doctorado, Universidad Politécnica de Cataluña, 1993.
11. J.P.Phontot, *Metodologie Eulerien Lagrangienne et test par element finit pour l'etude de grandes deformations termomecaniques. Aplicacions au probléms de mis en forme*, Tesis de doctorado, LTAS, Universidad de Lieja, 1994.

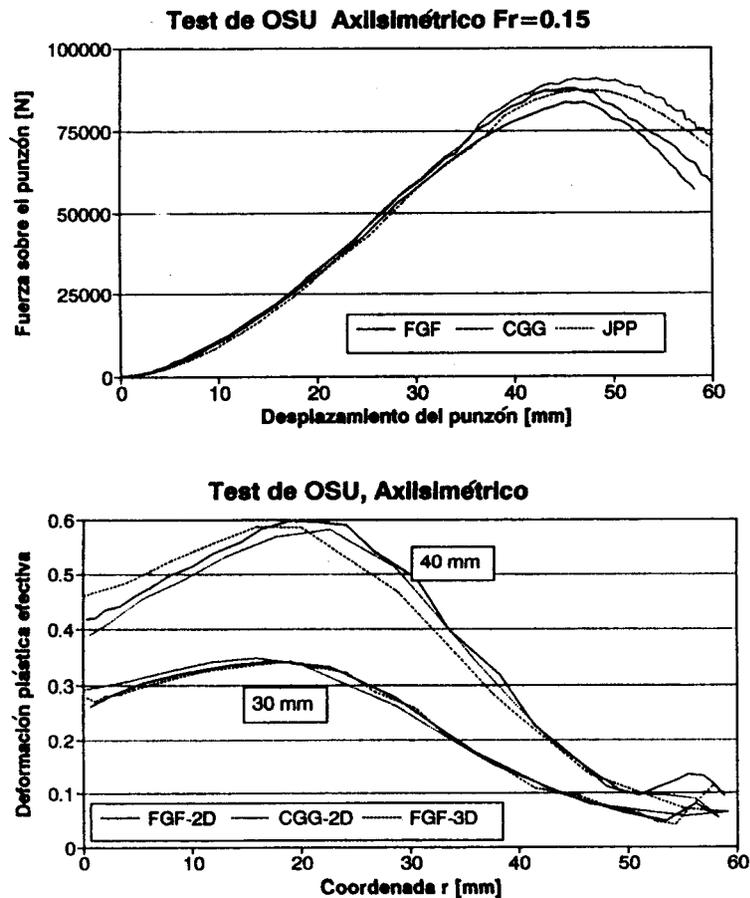


Figura 4: Estiramiento de una lámina circular con un punzón hemisférico