

USO DE UMA FORMULAÇÃO LAGRANGEANA-EULERIANA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONFORMAÇÃO MECÂNICA TRI-DIMENSIONAL

Eduardo Bittencourt, Guillermo J. Creus

Centro de Mecânica Aplicada e Computacional, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, av. Osvaldo Aranha 99, 3º andar
90035-190, Porto Alegre, RS, Brasil

RESUMO

O presente trabalho apresenta um algoritmo capaz de evitar os problemas de distorção de malhas de elementos finitos (EF) que ocorrem normalmente quando se analisam problemas com grandes deformações empregando uma descrição Lagrangeana-Atualizada (LA) em grandes deformações, onde o movimento da malha está ligado ao movimento da matéria. Neste trabalho, o movimento de ambos é desacoplado através do uso de uma formulação Lagrangeana-Euleriana (LE). A contribuição deste trabalho consiste em apresentar uma extensão tri-dimensional (3D) desta formulação aplicada a um caso de conformação mecânica.

ABSTRACT

In the present work an algorithm to avoid mesh distortion in finite element (FE) analyses of large deformation problems is presented. These distortion problems usually occur when using Updated-Lagrangian (UL) formulations, where the mesh flows together with the material. In this work, mesh and material displacements are uncoupled by using a Lagrangian-Eulerian (LE) formulation. The presentation of a three-dimensional (3D) extension of this formulation applied to a metal-forming case is the new contribution in this work.

INTRODUÇÃO

O uso de elementos finitos para modelar problemas de conformação mecânica esbarra normalmente na dificuldade de controlar a deformação da malha. Isto ocorre porque neste tipo de problema são usualmente empregados formulações do tipo LA, onde a malha fica "colada" a matéria, acompanhando a deformação da mesma. O uso deste tipo de formulação é necessário para que a malha possa acompanhar o movimento dos contornos da peça, quando estes mudam ao longo do processo de conformação. Nestes casos é praticamente inviável o uso de uma formulação Euleriana pura, na qual a malha fica fixa no espaço. Para contornar o problema, há alguns anos começou a aplicar-se as formulações do tipo LE (ver por exemplo [1-3]), nas quais a descrição é LA nos contornos e Euleriana no interior da peça. Desta maneira desacopla-se os movimentos da malha e da matéria, amenizando-se a distorção da malha.

Neste trabalho será generalizada a formulação LE proposta por Ponthot (ver [3]), aplicada para casos 3D. Esta formulação é resumidamente descrita na próxima seção, enquanto que as particularidades da implementação computacional em 3D são relatadas nas seções seguintes. Na última seção do trabalho, um exemplo simples de conformação mecânica 3D empregando a formulação LE é apresentado e comparado com a clássica formulação LA.

FORMULAÇÃO LAGRANGEANA-EULERIANA DE PONTHOT

Na formulação LE proposta por Ponthot [3], os nós dos elementos finitos sofrem, numa dada iteração, deslocamentos (dv) que estão desacoplados do movimento da matéria (du), como pode-se ver na figura 1.

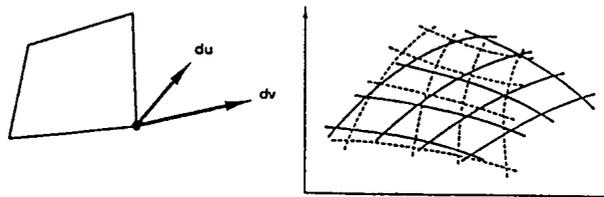


Figura 1: a) deslocamento du do material do nó e deslocamento dv da malha. b) Movimento desacoplado matéria/malha.

Assim se $dv = 0$, a malha está fixa no espaço, resultando uma formulação do tipo Euleriana pura. Já se $dv = du$, então a malha fica fixa na matéria recaindo-se numa formulação LA. Também é possível deixar a malha com um movimento totalmente independente da matéria. Neste caso porém, para uma dada iteração, as equações de equilíbrio obtidas pelo método dos resíduos ponderados possuirão duas vezes mais incógnitas (dv e du ou 6 incógnitas por nó) que equações (3 por nó), conforme indica a equação (1):

$$\mathbf{K}_1 du + \mathbf{K}_2 dv = r \quad (1)$$

onde, \mathbf{K}_1 é a matriz de rigidez tangente com relação ao movimento da matéria; \mathbf{K}_2 é a matriz de rigidez tangente com relação ao movimento da malha e r é o vetor residuo.

Para solucionar este problema, Ponthot elimina as incógnitas dv na equação (1), através de um controle da deformação da malha. Em outras palavras, dv passa a ter seu valor imposto para que a malha tenha sua distorção minimizada, deixando de ser uma incógnita em (1).

O operador LE expresso pela equação (1) é ainda particionado: primeiramente aplica-se um operador lagrangeano (atualizado), ficando a malha presa à matéria. Uma vez completada esta etapa, o passo LE é completado criando-se uma nova malha, diferente daquela obtida na etapa lagrangeana (determina-se então dv). Finalmente, os dados são transportados da malha antiga para a malha nova.

Esta forma de trabalhar (divisão do operador LE) facilita o cálculo da matriz tangente do problema, que é feita como na formulação LA, sem a necessidade da avaliação de termos convectivos ligados a velocidade relativa malha/matéria e ao gradiente de tensões.

O algoritmo é aplicado em cada passo de tempo do processo incremental de solução. O método pode ser visto também como uma aplicação automática, em cada passo de tempo, de um método de remalhamento do tipo "r", no qual existe uma realocação dos nós da malha, sem alteração do número de elementos ou das funções de interpolação dos mesmos.

Nas próximas seções indicamos como é definida a nova malha e como é feita a transferência de dados, já particularizando para o caso 3D.

DEFINIÇÃO DA NOVA MALHA EM 3D

Existem diversos tipos de algoritmos que permitem gerar automaticamente malhas de EF em domínios 2D. Estes algoritmos podem ser empregados no procedimento descrito acima para que se defina então uma malha nova e indeformada no interior do corpo.

Contudo, as possibilidades de geração automática são bem mais restritas em casos 3D. Para evitar processos de remalhamento complexos e de custos computacionais (tempo de processamento) elevados, no presente algoritmo os nós serão simplesmente realocados no centro de gravidade dos nós que rodeiam o mesmo. Este procedimento de remalhamento normalmente fornece bons resultados, conseguindo manter a malha com aspecto indeformado. Na figura (2) abaixo são classificados os nós que podem sofrer realocação:

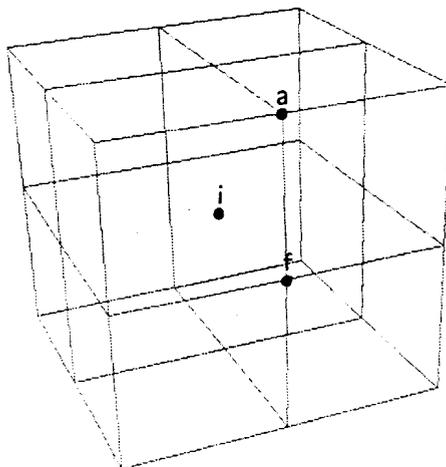


Figura 2: Definição de nós internos (i), de face (f) e de aresta (a).

Na figura acima, é apresentado um corpo gerado com EF hexaédricos lineares. Um nó pode ser então de aresta (a), de face (f) ou interno (i), conforme indica a figura. O vetor posição de um nó na nova malha (\mathbf{x}) será dada por:

$$\mathbf{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}^i}{n} \quad (2)$$

onde \mathbf{x}^i é o vetor posição de um dos nós que circunda o nó em questão. Para identificar o tipo de nó (interno, de face ou de aresta), o programa faz uso da informação sobre o número de elementos que compartilham este nó (8, 4 e 2 elementos, respectivamente). Se o nó é interno, todos os nós que fazem parte dos 8 elementos serão empregados na equação (2), sendo $n=26$. Se o nó é de face, apenas 8 nós dos 4 elementos serão empregados, ($n=8$). Finalmente se o nó é de aresta então somente 2 nós dos 2 elementos serão empregados na equação (2) ($n=2$).

No entanto, o uso direto deste processo de realocação nas superfícies livres do corpo pode levar a considerável perda de massa do corpo e conseqüente distorção dos resultados. Para evitar estes problemas o algoritmo assume automaticamente estas regiões como sendo LA puras, não sofrendo portanto realocação nodal ($dv = du$). Superfícies de contato também são assumidas como sendo LA. Isto é necessário para evitar que a realocação nodal mude o valor das forças de contato.

Este processo de realocação apresenta as seguintes vantagens:

- a) Não exige a prévia definição de regiões ou pólos por parte do usuário do programa. Assim nenhuma informação adicional precisa ser fornecida ao programa, além das necessárias a uma formulação clássica LA.
- b) Como a realocação é feita em cada passo de tempo, e o mesmo é usualmente pequeno em processos altamente não lineares como conformação mecânica, a nova malha estará sempre muito próxima da malha antiga. Este fato facilita a transferência de dados de uma malha à outra, como será visto na seção seguinte.
- c) Não são criados novos nós ou elementos, de forma que não existe alteração do tamanho do sistema com relação ao originalmente concebido.

A principal desvantagem do método é permitir a transformação em pentaedros dos elementos localizados em cantos da peça discretizada, conforme será visto no exemplo a seguir. Além disto, a aplicação do presente método está limitada a malhas onde os EF respeitam as condições descritas na definição do n na equação (2). Em outras palavras, se a geração é feita de forma não estruturada, por exemplo, não existe garantia que - para um nó de face - o número de elementos que o compartilham seja 4, nem que $n=8$. Porém esta limitação pode ser eliminada facilmente, tornando o método aplicável a malhas 3D quaisquer.

TRANSFERÊNCIA DE DADOS

Uma vez terminada a etapa LA, são conhecidas as tensões nos pontos de Gauss da malha ligada a matéria.

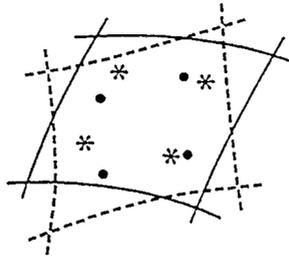


Figura 3: Pontos de Gauss na malha nova (*) e na malha antiga (•).

Para determinar o equilíbrio na nova malha (ver a figura 3), é também necessário conhecer as tensões nos pontos de Gauss nesta malha. Portanto, uma transferência de dados da malha LA para a malha nova deve ser realizada. Classicamente esta transferência tem duas etapas:

1. Obtenção das tensões nos nós da malha antiga através de um processo de suavização.
2. Interpolação para os pontos de Gauss da nova malha. Conforme ressaltado na seção precedente, a diferença de posição da malha LA para a nova malha são muito pequenas. Isto traz as seguintes consequências: primeiro, os pontos de Gauss da malha nova vão pertencer aos mesmos elementos a que pertenciam na malha antiga (portanto não é necessário pesquisar em qual elemento da malha antiga o ponto de Gauss está localizado, operação muito cara computacionalmente); segundo, como as distâncias entre malhas é pequena, a interpolação pode ser feita através de um desenvolvimento em série de Taylor das tensões, limitada à primeira ordem (ver Ponthot [3]). Este desenvolvimento em série pode ser escrito como:

$$\sigma^N = \sigma^A + \mathbf{d} \cdot \nabla \sigma \quad (3)$$

onde σ^N é uma componente de tensão no ponto de Gauss da malha nova; σ^A é a mesma componente no ponto de Gauss da malha antiga; \mathbf{d} é o vetor com origem no antigo ponto de Gauss e com extremidade no novo; $\nabla \sigma$ é o correspondente gradiente $(\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \sigma}{\partial z})$.

O gradiente têm componentes:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

onde,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \sum_{I=1}^8 \Phi_{I,\xi}^I \sigma^I \quad (5)$$

e $\Phi_{I,\xi}^I$ é a derivada das funções de interpolação do EF no nó I, com relação a uma coordenada do domínio reduzido (no caso ξ) e σ^I é a tensão no nó I, obtida no item 1.

Para o cálculo das demais grandezas da equação (4), deve-se inverter a matriz jacobiana (que relaciona o domínio real ou físico ao domínio reduzido), que é fornecida abaixo:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{I=1}^8 \Phi_{I,\xi}^I x^I \quad (7)$$

e x^I são as coordenadas do nó I do elemento.

Na próxima seção são descritos os passos básicos empregados pelo algoritmo.

ETAPAS DE CÁLCULO

O processo iterativo de cálculo pode ser resumido da seguinte forma:

Passo 1: Etapa LA pura, com determinação de \mathbf{K}_1 e \mathbf{d}_u .

Passo 2: Determinação das tensões nos nós da malha (suavização).

Passo 3: Definição da nova malha e conseqüente determinação de \mathbf{d}_v .

Passo 4: Verificação do equilíbrio na malha nova. Se equilíbrio é verificado, fim do passo incremental. Caso contrário, transferência de dados conforme equação (3).

Estas rotinas foram implementadas no código METAFOR [3].

RESULTADOS NUMÉRICOS

O objetivo desta seção é fazer uma comparação de resultados da formulação LE/3D aqui proposta, com a formulação clássica LA/3D, a nível de distorção da malha. O exemplo escolhido consiste na compressão, por duas matrizes rígidas, de uma barra de seção retangular (10x20 mm) e comprimento 60 mm. Estas matrizes reduzem o comprimento da barra para 34 mm (43 % de redução). Apenas uma quarta parte do corpo foi modelada, através do uso de elementos finitos hexaédricos lineares de 8 nós, conforme indica a figura 4,

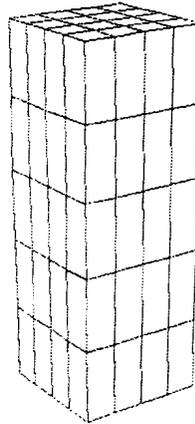


Figura 4: Malha de elementos finitos.

O material é aço, com as seguintes características:

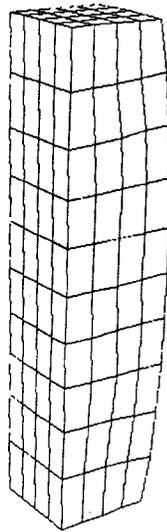
E (módulo de elasticidade) = 200 KN/mm²

σ_{esc} (tensão de escoamento) = 0.7 KN/mm²

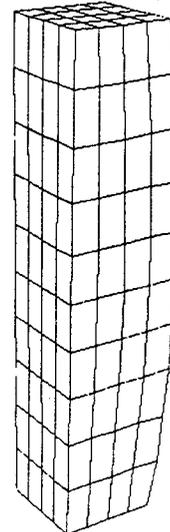
H (módulo de endurecimento linear) = 0.3 KN/mm²

Para levar em conta o contato e atrito das matrizes rígidas com o corpo, foi empregado o método da penalidade (para mais detalhes do algoritmo de contato empregado, ver [4]). Um coeficiente de atrito de 0.3 foi utilizado. Nas figuras 5 e 6 as deformadas e tensões de von Mises obtidas para os casos LA e LE são comparadas.

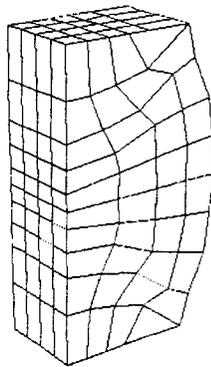
Pode-se observar que para mais altos níveis de deformação, os elementos do caso LE têm dimensões mais uniformes, impedindo a formação de elementos cuja distorção e deformação poderiam inviabilizar a análise de EF. Porém o método não impede a formação de elementos distorcidos (na verdade degenerados em pentaedros) que aparecem quando os nós da superfície lateral do corpo entram em contato com a matriz. O tipo de remalhamento escolhido não consegue evitar este problema.



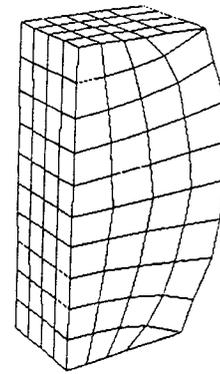
a)



b)

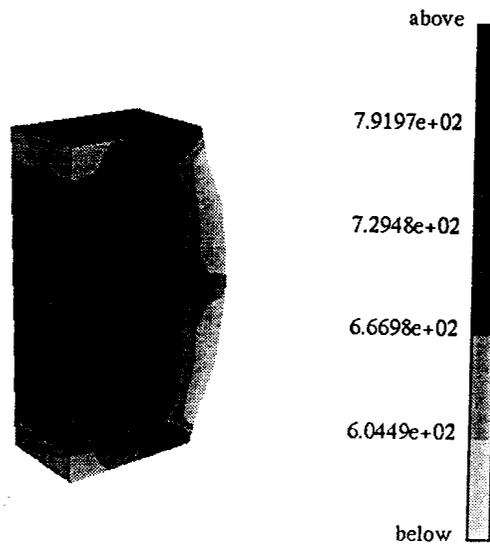


c)

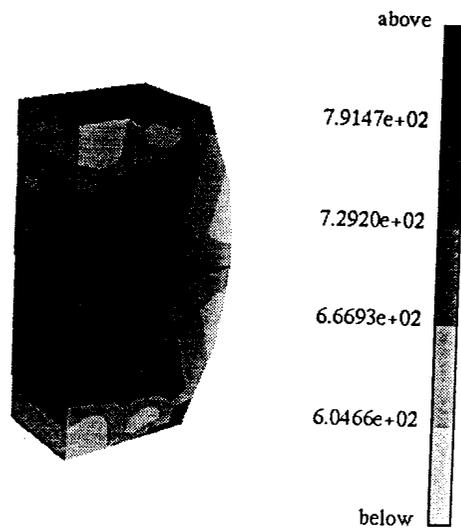


d)

Figura 5: a,b) deformação de 13%, casos LA e LE, respectivamente
c,d) deformação de 43%, casos LA e LE, respectivamente



a)



b)

Figura 6: a) Tensões de von Mises para o caso LA ($above = 8,5445 \times 10^2$);
b) Tensões de von Mises para o caso LE ($above = 8,5374 \times 10^2$)

CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentado uma formulação que permite reduzir os problemas causados pelo acoplamento do movimento da malha de EF/3D com o movimento da matéria, que ocorre em formulações do tipo LA. Este tipo de algoritmo tem fundamental importância para a realização de simulação de processos, tais como conformação mecânica, nos quais existem deformações significativas dos corpos em análise. O algoritmo é bastante simples, de fácil implementação computacional e de baixo custo em termos de tempo de computação (o aumento de tempo de computação em relação a solução LA é em torno de 15%). Além disto não requer do usuário do programa, informações adicionais com relação aquelas necessárias a uma solução do tipo LA. O algoritmo sofre de algumas limitações quanto ao tipo de malha 3D ao qual pode ser aplicado. Estas limitações podem ser contornadas, o que será abordado em publicações futuras. O tipo de remalhamento adotado (centro de gravidade) porém, não é capaz de evitar elementos degenerados em pentaedros em cantos onde existe contato.

REFERÊNCIAS

- [1] Schreurs, P. G. J., *Numerical simulation of forming processes. The use of the Arbitrary-Eulerian-Lagrangian method*. Tese de doutorado, Eindhoven University of Technology, Holanda, 1983.
- [2] Huetink, J., *On the simulation of thermo-mechanical forming processes. A mixed Eulerian-Lagrangian finite element method*. Tese de doutorado, Twente University of Technology, Holanda, 1986.
- [3] Ponthot, J-P., *Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis*. Tese de doutorado, Université de Liège, Bélgica, 1995.
- [4] Bittencourt, E., *Tratamento do problema de contato e impacto em grandes deformações pelo método dos elementos finitos*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil, 1994.