

MEJORAMIENTO DE TECNICAS ESPECTRALES PARA LA
SEPARACION DE ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS
REGIONALES Y RESIDUALES

Beatriz Introcaso, Fernando Guspí

Instituto de Física de Rosario (CONICET), Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería
y Agrim. Universidad Nacional de Rosario. Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario,
Argentina

RESUMEN

En este trabajo buscamos separar anomalías gravimétricas regionales y residuales a partir del espectro de potencia del campo observado. Para ello ajustamos los coeficientes de una combinación lineal de exponenciales que representa el espectro calculado, a fin de obtener las magnitudes de las masas y profundidades de fuentes equivalentes causantes. La idea es encontrar un método que conduzca a resultados representativos independientemente del intérprete de los datos.

Los valores de masas y profundidades correspondientes a una aproximación inicial fueron obtenidos utilizando el método de Prony. Subsiguientemente realizamos un ajuste no lineal de la gráfica del logaritmo.

Aplicamos el método propuesto a perfiles de anomalías gravimétricas observadas en las zonas de la cuenca Bengali (India) y la cuenca del Salado (en la provincia de Buenos Aires). Los resultados obtenidos resultan consistentes con los modelos geológicos propuestos para dichas zonas.

ABSTRACT

The aim of this work is to separate regional and residual observed gravity anomalies from their power spectrum. In this way, we fit the coefficients in a linear combination of exponentials representing the calculated spectrum in order to obtain an estimate of the causative masses and depths. We are attempting to find out an analytic method where results, apart from reliable, do not depend on the interpreter bias, and so the values for an initial approximation were obtained using Prony's method. After this, we have fitted the spectrum logarithmic curve by applying an inversion algorithm.

We have tested the proposed method with Bouguer gravity anomaly profiles across the Bengal basin (India) and the Salado basin (Buenos Aires). Results are consistent with the geological models proposed for these areas.

INTRODUCCIÓN

En el estudio e interpretación de anomalías, frecuentemente son necesarios métodos de separación. La separación de anomalías de gravedad se define como la descomposición de los efectos de gravedad en suma de los que provienen de fuentes geológicas profundas y superficiales. Se suelen usar los términos *regional* y *residual* para denotar los campos de gravedad observada que producen fuentes profundas y superficiales respectivamente. Las primeras en general se caracterizan por longitudes de onda largas, mientras que las segundas por longitudes de onda cortas.

En nuestro caso intentamos una separación a partir del espectro de potencia, teniendo en cuenta el hecho de que la potencia espectral de una fuente geológica dada se atenúa más rápidamente en frecuencias espaciales altas que en frecuencias espaciales bajas, a medida que la profundidad de la fuente crece.

El *espectro de potencia* de un campo gravimétrico $g(x)$ se define como el cuadrado del módulo de su transformada de Fourier.

Si $g(x)$ es el efecto gravimétrico de una masa puntual m en dos dimensiones, el espectro de potencia viene dado por:

$$P(\alpha) = 4\pi^2 G^2 m^2 e^{-4\pi b z}$$

donde G es la constante de gravitación universal y z es la profundidad a la que se encuentra la masa.

Si el efecto gravimétrico es debido a dos masas m_0 y m_1 ubicadas a distancias x_0 y x_1 respectivamente de un punto de referencia, y a profundidades z_0 y z_1 , el espectro de potencia será el cuadrado del módulo de la suma [1]:

$$P(\alpha) = 4\pi^2 G^2 m_0^2 e^{-4\pi b z_0} + 8\pi^2 G^2 m_0 m_1 \cos(2\pi\alpha(x_0 - x_1)) e^{-2\pi b z_0} e^{-2\pi b z_1} + 4\pi^2 G^2 m_1^2 e^{-4\pi b z_1}$$

Si consideramos que los efectos gravimétricos originados por cada una de las masas son funciones no correlacionadas, se acepta estadísticamente que los espectros generados por ellas se pueden sumar [2], y se obtiene:

$$P(\alpha) = 4\pi^2 G^2 (m_0^2 e^{-4\pi b z_0} + m_1^2 e^{-4\pi b z_1})$$

que podemos expresar, en forma genérica, como la suma de dos exponenciales:

$$P(\alpha) = C_1 e^{\alpha \beta_1} + C_2 e^{\alpha \beta_2}$$

(nótese que al ser P una función par, basta considerar los valores $\alpha \geq 0$ y luego obtener el resto por simetría).

Lo que buscamos, entonces, es una forma de ajustar las constantes C_1 , C_2 , β_1 y β_2 para obtener los valores de masas y profundidades de las fuentes equivalentes que causarían el efecto observado.

MÉTODO DE PRONY

Este método [3] permite ajustar las constantes buscadas, basándonos en la propiedad de que si f es una combinación lineal de exponenciales, existen constantes A_i de manera que se puede escribir:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m A_i f(x + i s)$$

con $s \in \mathbb{R}^+$.

En nuestro caso particular, supongamos dados los valores del espectro de potencia del campo gravimétrico observado para los $n+1$ puntos: $P(0), P(1), \dots, P(n)$.

Si consideramos $s = 1$, la propiedad anterior asegura que existen A_1 y A_2 tales que:

$$\begin{aligned} P(0) &= A_1 P(1) + A_2 P(2) \\ P(1) &= A_1 P(2) + A_2 P(3) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ P(n-2) &= A_1 P(n-1) + A_2 P(n) \end{aligned}$$

que en general es un sistema con más ecuaciones que incógnitas ($n > 3$) que podemos resolver por el método de mínimos cuadrados.

ALGORITMO PARA DETERMINAR LAS PROFUNDIDADES

i) Conocidos los valores del espectro de un campo de gravedad observado:

$$P = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n-2) \end{pmatrix}$$

construimos la matriz de los coeficientes:

$$Q = \begin{pmatrix} P(1) & P(2) \\ P(2) & P(3) \\ \vdots & \vdots \\ P(n-1) & P(n-2) \end{pmatrix}$$

Y si $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ tendremos:

$$QA = P$$

Premultiplicando ambos miembros de la igualdad por Q^T y despejando:

$$A = (Q^T Q)^{-1} Q^T P$$

ii) Notemos que se verifica:

$$A_1 B_1 + A_2 B_1^2 = 1$$

$$A_1 B_2 + A_2 B_2^2 = 1$$

Es decir que para hallar B_1 y B_2 basta obtener las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$A_1 Z + A_2 Z^2 = 1$$

iii) Recordemos que $B_1 = e^{\beta_1}$ y $B_2 = e^{\beta_2}$. Luego:

$$\beta_1 = \log B_1$$

$$\beta_2 = \log B_2$$

iv) Finalmente, volviendo a la ecuación original:

$$z_0 = \beta_1 / (-4\pi)$$

$$z_1 = \beta_2 / (-4\pi)$$

de donde obtenemos las profundidades de las masas equivalentes que originan el espectro de potencia dado.

OTRO MÉTODO PARA CALCULAR LAS PROFUNDIDADES

Teniendo en cuenta el hecho de que la suma de exponenciales es la solución de una ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes, podríamos considerar a $P(\alpha)$ solución de :

$$u_1 P'(\alpha) + u_2 P''(\alpha) = P(\alpha)$$

Como en nuestro caso disponemos de valores discretos para $P(\alpha)$:

$$P(0), P(1), \dots, P(n)$$

necesitamos una aproximación de $P'(\alpha)$ y $P''(\alpha)$. En [4] se aproxima la derivada de una función f para valores discretos mediante

$$f'(k) \sim f(k+1) - f(k-1)$$

Y por lo tanto $f''(k)$ se aproximará por $f'(k+1) - f'(k-1) = f(k+2) - 2f(k) + f(k-2)$. Observemos que si tenemos $n+1$ puntos: $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sólo podremos aproximar f'' para los $n-3$ puntos: $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}$. Preferimos la aproximación:

$$P'(k) \approx P_1(k) = (P(k+1) - P(k))/\Delta \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$P''(k) \approx P_2(k) = (P_1(k+1) - P_1(k))/\Delta \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

donde $\Delta = f / n$, siendo f la frecuencia de Nyquist, o máxima frecuencia que se puede determinar en el espectro: $f = 1/(2s)$ con s : separación del campo gravimétrico medido). En

este caso la aproximación de P'' sólo se limita a $n-1$ puntos.

Así:

$$u_1 P_1(0) + u_2 P_2(0) = P(0)$$

$$u_1 P_1(1) + u_2 P_2(1) = P(1)$$

.

.

$$u_1 P_1(n-2) + u_2 P_2(n-2) = P(n-2)$$

sistema que resolvemos nuevamente por mínimos cuadrados.

Notemos que ahora β_1 y β_2 se obtienen directamente como las raíces del polinomio característico

$$u_1 Z + u_2 Z^2 = 1$$

Finalmente, las profundidades se obtienen en forma análoga a lo visto con el método de Prony.

Debemos hacer notar que comparando ambos métodos encontramos que el de Prony arroja mejores resultados, si bien la forma de obtener las profundidades con el mismo es indirecta, debido a que las aproximaciones de las derivadas, principalmente de las segundas derivadas, muchas veces no constituyen valores confiables.

AJUSTE DE LAS MAGNITUDES DE LAS MASAS

Una vez que aproximamos los valores de las profundidades a las cuales se encuentran las fuentes que producen el espectro de potencia a partir de los datos de gravedad observados, volvemos a la ecuación original. Recordemos que:

$$P(\alpha) = 4\pi^2 G^2 m_0^2 e^{-\pi|\alpha|z_0} + 4\pi^2 G^2 m_1^2 e^{-\pi|\alpha|z_1}$$

Definamos:

$$a_{\alpha 1} = e^{-\pi|\alpha|z_0}, \quad a_{\alpha 2} = e^{-\pi|\alpha|z_1}$$

$$c_1 = 4\pi^2 G^2 m_0^2, \quad c_2 = 4\pi^2 G^2 m_1^2$$

Luego, para $n + 1$ puntos espectrales:

$$P(0) = a_{0_1} C_1 + a_{0_2} C_2$$

$$P(1) = a_{1_1} C_1 + a_{1_2} C_2$$

.

.

.

$$P(n) = a_{n_1} C_1 + a_{n_2} C_2$$

Conocidos z_0 y z_1 podemos definir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{0_1} & a_{0_2} \\ a_{1_1} & a_{1_2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n_1} & a_{n_2} \end{pmatrix}$$

y considerando: $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ resulta: $AC = P$.

Con idéntico razonamiento al utilizado anteriormente, despejamos:

$$C = (A^T A)^{-1} A^T P$$

y finalmente:

$$m_0 = \sqrt{C_1} / (2\pi G)$$

$$m_1 = \sqrt{C_2} / (2\pi G)$$

Puede ocurrir que el espectro de potencia observado sea muy inestable, o difiera sustancialmente del resultado de una combinación lineal de exponenciales calculada a partir de los datos obtenidos. Esto se debe a que el método de Prony es un procedimiento que ajusta los parámetros de un modelo esponencial de amplitud, fase y frecuencia variables que disminuye hasta adecuarse a los datos [5].

En dicho caso consideramos el resultado obtenido como una aproximación inicial, a partir de la cual aplicamos un ajuste no lineal por aproximaciones sucesivas (por ejemplo [6]) para encontrar una suma de exponenciales que ajuste el espectro observado, o en términos geofísicos, se trata de estimar valores de los parámetros empleando el método inverso.

MÉTODO INVERSO

La esencia de la inversión de datos geofísicos es proveer un modelo adecuado a partir de un conjunto de observaciones dado. En este caso se trata de encontrar valores de masas y profundidades que permitan calcular una suma de exponenciales que coincida "razonablemente" (o en promedio) con el espectro observado. Llamamos espectro observado al obtenido a partir de los datos de anomalías de gravedad observada. Esta última conlleva errores de medición (ruido). Es decir que no podemos pretender un ajuste perfecto entre ambos. Un método posible para realizar esto involucra inversión de mínimos cuadrados no lineal [7]. Buscamos entonces valores de masas m_1 y m_2 y profundidades z_1 y z_2 para los cuales:

$$\sum_0^n (p_i - (c_{1_i} e^{\beta_{1_i}} + c_{2_i} e^{\beta_{2_i}}))^2$$

sea mínimo.

Sin embargo, dada la enorme disparidad, de varios órdenes de magnitud, entre los primeros y los últimos elementos del espectro, un ajuste directo daría demasiado peso a los primeros elementos. Por tal motivo es más adecuado aproximar el logaritmo del espectro, es decir encontrar el mínimo de:

$$\sum_0^n (\ln p_i - \ln (c_{1_i} e^{\beta_{1_i}} + c_{2_i} e^{\beta_{2_i}}))^2$$

El ajuste se realiza en varios pasos mediante aproximaciones sucesivas.

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

(a) Linealizar el sistema

Los valores de las masas y profundidades encontradas con el método de Prony constituyen la aproximación inicial.

El sistema lineal que permite calcular una nueva aproximación se puede expresar matricialmente como:

$$JX = P$$

donde J es la matriz Jacobiana de $(\ln p_0^*, \ln p_1^*, \dots, \ln p_n^*)$ respecto de las incógnitas, X es el vector columna cuyos elementos son los incrementos que queremos encontrar y P es también un vector columna, en este caso formado por las diferencias $\ln p_i - \ln p_i^*$ ($i=0,1,\dots,n$).

(b) Resolver por mínimos cuadrados

$$X = (J^T J)^{-1} J^T P$$

(c) Agregar a la aproximación anterior los incrementos obtenidos

Las iteraciones finalizan cuando los incrementos resultan despreciables. Para garantizar la convergencia del proceso, utilizamos el algoritmo de Marquardt [8].

UNA VARIANTE AGREGANDO UN TÉRMINO DE FASE

Si bien trabajamos hasta ahora aceptando que el espectro generado por dos masas podía considerarse como la suma de dos exponenciales, no debemos olvidar que la ecuación original involucra un término más que tiene que ver con la distancia entre las masas. Así, teníamos:

$$P(\alpha) = 4\pi^2 G^2 m_0^2 e^{-\pi \alpha |z_0|} + 8\pi^2 G^2 m_0 m_1 \cos(2\pi \alpha (x_0 - x_1)) e^{-2\pi \alpha |z_0 + z_1|} + 4\pi^2 G^2 m_1^2 e^{-\pi \alpha |z_1|}$$

Con idéntico razonamiento al utilizado para la suma de dos exponenciales, utilizamos el método inverso para realizar un ajuste no lineal.

Como antes, linealizamos el sistema el sistema. Para ello utilizamos los valores de masas y profundidades encontradas con el método de Prony, más un valor arbitrario para la diferencia $(x_0 - x_1)$ en una aproximación inicial.

Resolver el sistema lineal resultante por mínimos cuadrados y agregamos en cada iteración los incrementos obtenidos en la aproximación anterior. También aquí, garantizamos la convergencia utilizando el algoritmo de Marquardt [8].

En vista de que los resultados con este método no difieren demasiado de los antes obtenidos, en general trabajamos simplemente con la suma de dos exponenciales.

ALGUNOS EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

a) Consideramos el perfil gravimétrico de una sección de la cuenca Bengali (India) tomado del trabajo de Khan y Agarwal [10] quienes realizaron una separación de anomalías mediante otras técnicas.

Calculamos el logaritmo del espectro de potencias del perfil (fig. 1a) y aplicamos el algoritmo antes descrito, obteniendo:

Masa 1 de magnitud 1.05 a profundidad 14.62 km
Masa 2 de magnitud 7.04 a profundidad 44.34 km

El espectro calculado con estos datos ajusta razonablemente la gráfica logarítmica del espectro observado (fig. 1b).

Así mismo, los autores de [10] ubican tres masas a profundidades 29.30 km, 13.90 km y 3.5 km respectivamente. Vemos que hay aceptable coherencia en el valor de la masa más profunda, y mejor aún en la comparación con la masa intermedia. La masa más pequeña fue absorbida seguramente en nuestro caso como "ruido".

b) Este ejemplo trata con un perfil gravimétrico sobre una sección de la cuenca del Salado [11] (fig. 2a). Operamos en forma similar, obteniendo en este caso:

Masa 1 de magnitud 0.42 a profundidad 12.94 km
Masa 2 de magnitud 2.90 a profundidad 43.48 km

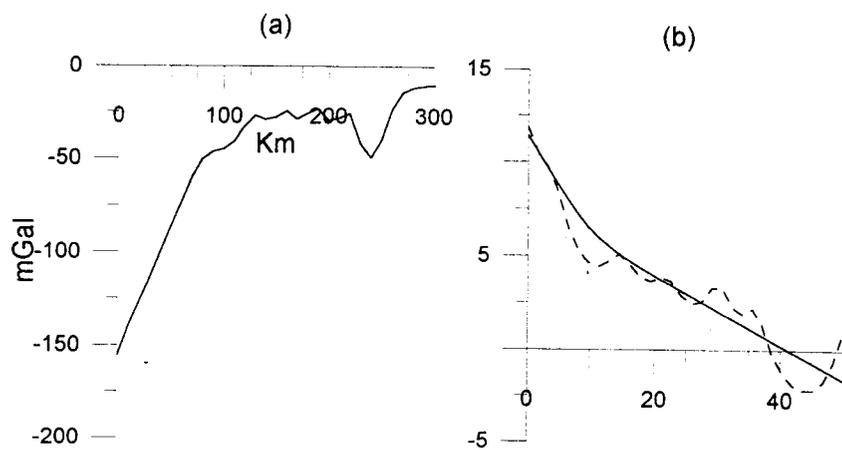


Fig. 1: (a) Perfil gravimétrico de una sección de la cuenca Bengali, tomado de [10]
 (b) Logaritmo del espectro de potencia observado (línea de trazos) y calculado a partir de los resultados obtenidos (línea continua)

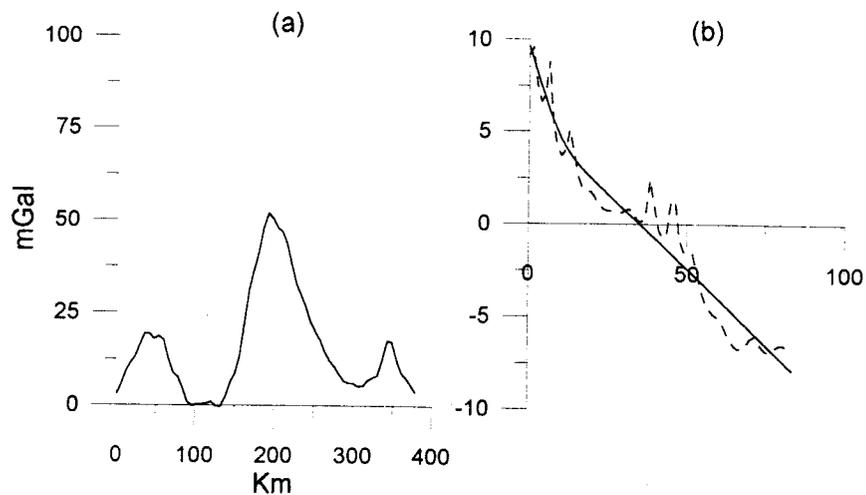


Fig. 2 (a) Perfil gravimétrico de una sección de la cuenca del Salado (tomado de [11])
 (b) Logaritmo del espectro de potencia de (a) observado (línea de trazos) y calculado a partir de los resultados obtenidos (línea continua)

El ajuste entre las gráficas logarítmicas del espectro observado y el calculado con estos valores es aceptable (fig. 2b). En [11] se propone para la citada cuenca un modelo en el que se observa una masa anómala positiva situada por debajo de los 6 km de profundidad con un espesor de 10 km, que podríamos considerar como el equivalente de nuestra masa 1, concentrada aproximadamente en el centro. También en dicho modelo se considera la existencia de una antirraíz (de mucho mayor magnitud) a una profundidad de unos 35 km, que podría paralelizarse con nuestra masa 2 encontrada. Vemos así que los resultados obtenidos son consistentes con un modelo razonable.

CONCLUSIONES

Hemos delineado un método de ajuste del espectro de potencia de un campo gravimétrico, con el fin de ubicar probables masas causantes del mismo. A la luz de los valores obtenidos para los casos reales analizados, podríamos decir que los resultados son más cualitativa que cuantitativamente confiables. Es imprescindible en cada caso un análisis exhaustivo del ejemplo real para evitar interpretaciones físicas no consistentes.

Quizás la ventaja fundamental del método es su fácil automatización, que posibilita la interacción con programas de aplicaciones gravimétricas y permite visualizar en pantalla rápidamente los resultados.

REFERENCIAS

- [1] Pawlowski, R. S., *Green's equivalent-layer concept in gravity band-pass filter design*. Geophysics Vol. 59 N° 1, 1994, págs. 69-76.
- [2] Guspi, F. *Nociones de análisis espectral en Curso Internacional "Gravimetría. Sus aplicaciones tectónicas"* U.N.R. 1994, págs. 49-51.
- [3] Cohen, A. *Análisis Numérico*. Ed. Reverté, Barcelona. 1977
- [4] Sheffels, B. and Mc Nutt, M., *Role of Subsurface Loads and Regional Compensation in the Isostatic Balance of the Transverse Ranges, California: Evidence for Intracontinental Subduction*. Journal of Geophysical Research Vol 91 N° B6, 1986, págs. 6419-6431.
- [5] Kay, S. M. and Marple, S. L. *Spectrum Analysis-A Modern Perspective*. Proc. IEEE Vol. 69, 1981, págs. 1380-1419.
- [6] Guspi, F. *General 2-D gravity inversion with density contrast varying with depth*. Geoexploration 26, 1990, págs. 253-265.
- [7] Lines, L. R. and Treitel, S., *A review of least squares inversion and its application to geophysical problems*. Geophysical Prospecting 32, 1984, págs. 159-186.
- [8] Marquardt, D. W. *An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters*. J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 11 N° 2, 1963.
- [9] Ralston. A. *Introducción al Análisis Numérico*. Ed. Limusa-Wiley S.A., México, 1970.
- [10] Khan, A. A. and Agarwal. B. N. P. *The crustal structure of western Bangladesh from gravity data*. Geophysics 219, 1993, págs. 341-353.
- [11] Introcaso, B. e Introcaso, A. *Separación de anomalías de Bouguer sobre la cuenca del Salado*. En preparación.