Mecánica Computacional Volumen XV
Compilado por A. Larreteguy y M. Vénere
Bariloche, noviembre de 1995

METODO NUMERICO PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS ESTACIONARIOS DE DIFUSION DE CALOR

Domingo Prato y Pedro W. Lamberti
Facultad de Matemáticas, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria - 5000 - Córdoba

Resumen

En este trabajo presentamos algunas aplicaciones de un método numérico de solución de la ecuación de Laplace en determinadas situaciones con alguna simetría y condiciones de frontera dadas. En particular tratamos problemas estacionarios de difusión de calor. El método ha sido aplicado a problemas de contorno mixtos en electrostática [1] y a algunos problemas con interés en biología. A pesar de lo simple del método se logran resultados razonables con muy poco esfuerzo computacional.

Abstract

In this work we present some applications of a numerical method for solving the Laplace equation with adequated boundary conditions in problems with certain symmetries. In particular we apply it to some stationary problems of heat diffussion. The method has been applied to mixed boundary problems in electrostatics [1] and some problems with interest in biology. Although the simplicity of the method it allows us to get reasonable results with very low computational effort.

INTRODUCCION

Es común que en los cursos de electromagnetismo, de teoría de fluídos, de transferencia de calor y materia, etc., se ponga especial énfasis en encontrar expresiones exactas para las soluciones de las ecuaciones diferenciales involucradas. Desafortunadamente, existen muchos problemas importantes con interés científico o tecnológico, en los cuales esos métodos o no se aplican o son muy complicados de usar. Se hace por ello indispensable disponer de métodos numéricos de solución de los problemas matemáticos asociados con el área en estudio. Esto se ha visto potenciado en los últimos años debido al acceso casi generalizado de las facilidades de cálculo de las computadoras digitales.

En este trabajo describimos y aplicamos un método numérico de muy simple implementación y que ha mostrado proveer de soluciones razonables a ciertos problemas que involucran la ecuación de Laplace con distintas condiciones de contorno. En particular hemos estudiado su utilización en problemas con interés en electrostática [1] y ahora lo hacemos en problemas estacionarios de difusión de calor. En ambos casos se obtienen resultados altamente aceptables y con muy poco esfuerzo computacional.

EL METODO

La función temperatura (o potencial electrostático) pueden, en general, ser expresados como una combinación lineal de un cierto conjunto completo de funciones. La elección del conjunto completo (funciones base) depende de la simetría del problema a tratar. Los coeficientes de esta combinación lineal están determinados por las condiciones de frontera; en muchas situaciones estas fronteras son las superficies de los cuerpos sobre los cuales la temperatura o flujo de calor (el potencial electrostático o densidad de carga) son especificados.

El método que proponemos consiste en aproximar la serie o integral que representa a la temperatura por una suma finita de N términos dejando de este modo N coeficientes a ser determinados:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) \sim \sum_{n=0}^{N} c_n \phi_n(x) \tag{1}$$

La determinación de esos N coeficientes puede realizarse por una discretización de la frontera en donde las condiciones para la temperatura y/o flujo de calor son impuestas. Esta discretización debe tomarse de forma tal que, al imponer las condiciones de frontera sobre esos N puntos, se obtenga un sistema de N ecuaciones con N incógnitas. Una vez determinados los coeficientes, podemos reemplazarlos en el desarrollo 1 y de esta manera obtener una expresión aproximada para la temperatura en cualquier punto de interés del recinto.

La elección de la partición más adecuada de la frontera requerirá de un análisis del problema bajo consideración. No daremos aquí una estimación de la precisión con la cual los coeficientes de la suma que representa a la temperatura son calculados dentro de este esquema. Sin embargo, de acuerdo a nuestros experimentos numéricos, podemos concluir que una mejor aproximación se obtiene al incrementar el número N.

Un aspecto importante del método propuesto, es que éste requiere un esfuerzo computacional mucho menor que el de diferencias finitas para problemas similares.

Una generalización del método a problemas no estacionarios está siendo desarrollada.

A continuación presentamos los resultados obtenidos con la aplicación del método a algunos problemas de frontera simples.

ALGUNOS EJEMPLOS

En nuestro primer ejemplo se pone a prueba el método propuesto comparando la solución obtenida por la aplicación del mismo, con la solución exacta. El ejemplo considerado es el de un cilíndro circular de longitud infinita con temperatura especificada sobre la superficie. Una de las mitades está a temperatura Θ y la otra a $-\Theta$. La solución interior para este problema se puede escribir en la forma:

$$T(r,\phi) = \frac{4}{\pi}\sum_{j}^{\infty} a_j r^{2j+1} cos((2j+1)\phi) \tag{2}$$

con $a_j = \frac{(-1)^j\Theta}{2j+1}$. La figura 1 muestra la gráfica de la temperatura como función del ángulo ϕ para un valor del módulo del vector posición ligeramente menor al radio del cilíndro. La curva indicada con a) surge de la evaluación de cien términos de la serie 2, mientras que la curva b) corresponde a la solución obtenida con nuestro método para una partición uniforme de la frontera con $N = 20$. Se observa una coincidencia sumamente razonable entre ambas soluciones.

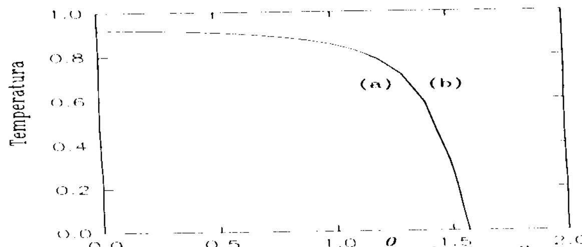

Fig 1: Comparacion entre la solucion "exacta" (a) y la solucion obtenida con el metodo propuesto (b)

Otro ejemplo de fácil tratamiento con nuestro método es el de un dominio elíptico cuya frontera tiene una de las mitades a una temperatura fija, T_0, y sobre la otra mitad se ha especificado un flujo de calor (entrante o saliente) determinado [1]. En este caso, es conveniente usar coordenadas elíticas (μ, θ)[3].

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{a}{2} cosh(\mu) sen(\theta) \\
y &= \frac{a}{2} sinh(\mu) cos(\theta)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

[1] El interés en estudiar este problema y el siguiente está relacionado con el análisis de algunas propiedades de las desigualdades isoperimétricas; ver por ejemplo referencia [2]

En estas coordenadas la solución interna con las simetría adecuada se escribe:

$$T(\mu,\theta) = \sum_{n\ par} A_n cosh(n\mu cos(n\theta) + \sum_{n\ impar} B_n senh(n\mu) cos(n\theta) \qquad (4)$$

En la figura 2 se muestran las gráficas de la función temperatura para tres valores distintos de la coordenada μ; ($\mu = 0.5$ corresponde a la superficie de la elipse). En este caso se tomó una partición con $N = 20$.

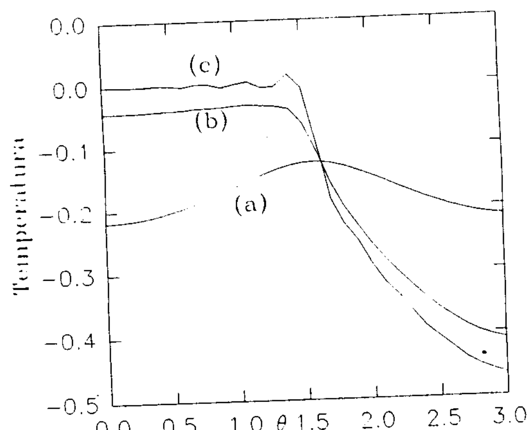

Fig. 2: Solucion del segundo ejemplo. La curva (a) corresponde a μ=0; la (b) a μ=0.4 y la (c) a μ=0.5.

El último ejemplo que analizamos con el método propuesto es el de un dominio elíptico cuya frontera ha sido dividida en cuatro sectores, sobre los cuales se ha especificado, alternadamente, los valores del flujo de calor y de la temperatura. A partir de la solución general en coordenadas elíticas, se puede demostrar que la solución interna que satisface las condiciones de contorno impuestas, se escribe:

$$T(\mu,\theta) = \sum_{n\ par} A_n cosh(n\mu)cos(n\theta) \tag{5}$$

En la figura 3 se presentan las gráficas de la temperatura, para distintos valores de μ, en función de θ.

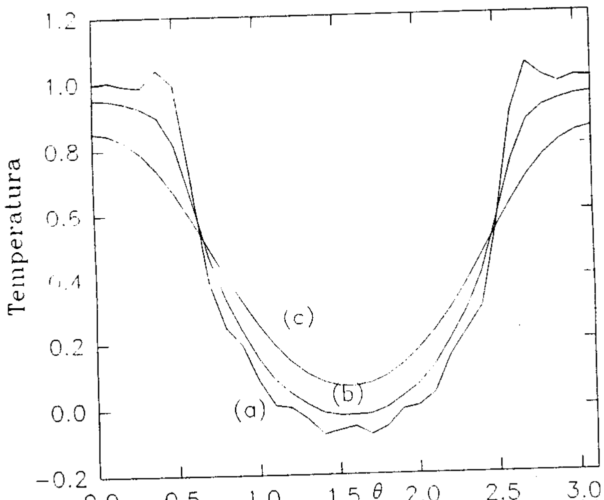

Fig. 3: Graficas correspondientes al tercer problema
a) corresponde a μ=0.5, b) μ=0.4 y c) μ=0

Para finalizar deseamos hacer un comentario sobre la implementación numérica del método. Desde este punto de vista, el método propuesto solo requiere la inversión de una matríz. En general, la matríz involucrada no presenta dificultades para su inversión. En algunos ejemplos estudiados observamos que puede resultar conveniente trabajar con autofunciones no normalizadas. Esto evita la aparición de elementos de matríz de gran valor absoluto o de valor muy pequeño.

REFERENCIAS

[1] Lamberti, P.W. y Prato D.P., Am. J. Phys. **59**(1), 1991.

[2] Berrone, L., "Subsistencia de Modelos Matemáticos que involucran a la ecuación de calor - difusión", Tesis Doctoral, UNR, 1993.

[3] Morse, P.M. y Feshbach, H.; "Methods of Theoretical Physics",Parte II, Mc Graw-Hill, New York (1953).