

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DE LOS MODELOS DE
CÁSCARA DE SIMO PARA ANÁLISIS LINEAL Y NO LINEAL
GEOMÉTRICO Y MATERIAL

Alfredo E. Huespe, Alberto Cardona
Instituto INGAR y Grupo de Tecnología Mecánica de INTEC
Güemes 3450 - 3000. Santa Fe, Argentina

RESUMEN

En una serie de trabajos, Simo y coautores [1-4] propusieron un modelo de cáscara, con aplicación para la resolución numérica de problemas elásticos y elasto-plásticos con grandes desplazamientos. En este trabajo analizamos algunas hipótesis, el grado de generalidad y límites de validez del modelo adoptado; ciertos problemas encontrados en la implementación numérica mediante el método de los elementos finitos, como también esquemas de interpolación alternativos más simples. Discutimos igualmente, aspectos relativos a la implementación dentro de un código de elementos finitos desarrollado en C++, siguiendo lineamientos de programación orientada a objetos. Finalmente presentamos una serie de ejemplos para validar nuestras conclusiones.

ABSTRACT

Simo et.al.[1-4] have presented a shell model, with application to numerical solution of elastic and elasto-plastic large displacement problems. We analyze some hypotheses, generality and validity limits of the adopted model; problems detected in the finite element numerical implementation and some simpler alternative implementation schemas. We remark aspects relative to the finite element code developed in C++ with OOP style. Finally, we present several numerical test to validate our conclusions.

1. INTRODUCCIÓN

En una serie de trabajos, Simo y coautores [1-4] proponen un modelo de cáscara con la particularidad de efectuar la aproximación numérica en base a una teoría de cáscara. De ese modo, los campos interpolados corresponden a fuerzas y deformaciones generalizadas, resultantes de una integración analítica en el espesor. El correcto tratamiento dado a los aspectos cinemáticos del problema, en particular deformaciones y rotaciones, condujo a esos autores a denominarlo "geométricamente exacto".

A continuación discutimos algunos aspectos teóricos y numéricos de ese modelo. Finalmente realizamos una serie de ejemplos de validación de las conclusiones que presentamos.

2. SOBRE LA TEORÍA DE CÁSCARA ADOPTADA

2.1 Relaciones cinemáticas, fuerzas y deformaciones generalizadas

El análisis que presentamos a seguir se basa en el trabajo de Libai y Simmonds [5]. El modelo de Simo et al [1-4] resulta un caso particular de éste. Resaltamos básicamente las hipótesis

cinemáticas y la definición de las fuerzas generalizadas y sus variables duales a través de la potencia interna.

En la descripción cinemática de la cáscara usamos tres configuraciones distintas (fig. 1). Un punto arbitrario P en la configuración de referencia S , resulta descripto por las coordenadas materiales $(\sigma^1, \sigma^2, \zeta)$. En la configuración inicial B_0 , el mismo punto es determinado por

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^s(\sigma^1, \sigma^2) + \zeta \mathbf{n}(\sigma^1, \sigma^2) \quad (1)$$

donde $\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3$ es la expresión de las coordenadas espaciales del punto P en la configuración inicial B_0 , \mathbf{X}^s es la posición de la superficie media con coordenadas materiales $(\sigma^1, \sigma^2, 0)$ en S y \mathbf{n} un vector unitario ortogonal a la superficie X^s . La cáscara en la configuración B_0 queda definida por $X = X^s + \zeta \mathbf{n}$; $h_-(\sigma^1, \sigma^2) \leq \zeta \leq h_+(\sigma^1, \sigma^2)$ con h_- y h_+ límites de la cáscara en la dirección \mathbf{n} y asumidos suficientemente pequeños (claramente, $h_+ - h_- = h$ es el espesor de la cáscara). Finalmente B_t es la configuración deformada al tiempo t , donde la posición del punto P es determinada por

$$\mathbf{x}(\sigma^1, \sigma^2, \zeta) = \mathbf{x}^s(\sigma^1, \sigma^2) + \eta(\sigma^1, \sigma^2, \zeta) \quad (2)$$

en donde asumimos implícitamente la dependencia funcional de \mathbf{x} con el tiempo. Como caso particular para describir la geometría en la configuración B_t , Simo et al [1] adoptan

$$\eta(\sigma^1, \sigma^2, \zeta) = \zeta \mathbf{t}(\sigma^1, \sigma^2) \quad ; \quad \|\mathbf{t}\| = 1, \quad h_- \leq \zeta \leq h_+ \quad (3)$$

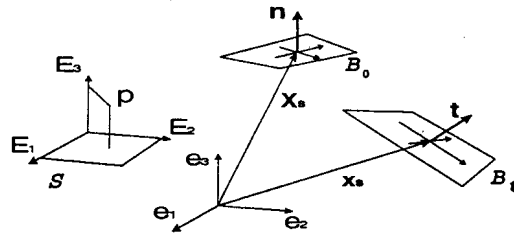


Figura 1: Descripción cinemática de la cáscara

Los vectores de la base convectiva en el punto P arbitrario de la configuración B_0 son determinados por $\{\mathbf{g}_\alpha^0 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma^\alpha} = \mathbf{X}_{,\alpha}; \mathbf{n}\}$ (con $\alpha = 1, 2$) y para los puntos de la superficie X^s por $\{\mathbf{a}_\alpha^0 = \mathbf{X}_{,\alpha}^s; \mathbf{n}\}$. De la misma forma, para la configuración B_t al instante t y con la suposición (3) $\{\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha}; \mathbf{t}\}$, $\{\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha}^s; \mathbf{t}\}$ respectivamente.

Sea \mathbf{P} el tensor no simétrico de tensiones de Piola-Kirchhoff referido a la configuración B_0 . Adoptamos como fuerzas reducidas las expresiones

$$\mathbf{n}^\alpha = \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{P} \mathbf{g}_0^\alpha \mu d\zeta \quad ; \quad \mathbf{m}^\alpha = \int_{h_-}^{h_+} \eta \wedge \mathbf{P} \mathbf{g}_0^\alpha \mu d\zeta \quad (4.a - b)$$

con $\{\mathbf{g}_1^0, \mathbf{g}_2^0, \mathbf{n}\}$ la base contravariante asociada a $\{\mathbf{g}_1^0, \mathbf{g}_2^0, \mathbf{n}\}$. Siendo dV_0 un elemento de volumen elemental en B_0 , $dV_0 = j_0 d\sigma^1 d\sigma^2 d\zeta = \mu d\Sigma d\zeta$, o sea j_0 es el jacobiano de la transformación $(\sigma^1, \sigma^2, \zeta) \rightarrow \mathbf{X}$ y $d\Sigma = \|\mathbf{a}_1^0 \wedge \mathbf{a}_2^0\| d\sigma^1 d\sigma^2$. Definimos también como magnitud generalizada, al *spin* medio de las partículas en B_t que yacen en la línea $\zeta \mathbf{n}$ en B_0 :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{I} \int_{h_-}^{h_+} \eta \wedge \rho \dot{\eta} \mu d\zeta \quad , \quad I = \int_{h_-}^{h_+} \zeta^2 \rho \mu d\zeta \quad (5)$$

donde ρ es la densidad del punto en consideración. Con las hipótesis (3), y observando que para verificar en cualquier instante que $\|\mathbf{t}\| = 1$, debe ser $\dot{\eta} = \zeta \dot{\mathbf{t}}$ con $\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{t}} = 0$; luego, el spin medio resulta:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{t}}; \quad (6)$$

de donde también $\dot{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{t}$.

Con estos elementos y por medio de un procedimiento estándar, es posible escribir las ecuaciones de balance en la configuración inicial \mathcal{B}_0 (que Libai et al. asumen como referencia). La posterior derivación de las ecuaciones de equilibrio en forma fuerte y débil *Principio de las Potencias Virtuales* es directa. De esta última, analizamos únicamente el término correspondiente a la potencia virtual interna que resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} &= \int_{\Sigma} (\mathbf{n}^\alpha \cdot (\dot{\mathbf{a}}_\alpha - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a}_\alpha) + \mathbf{m}^\alpha \cdot \boldsymbol{\omega}_{,\alpha}) d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma} (\mathbf{n}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{a}}_\alpha - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}_\alpha \wedge \mathbf{n}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha \cdot \mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{t}}_{,\alpha}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (7)$$

siendo Σ la superficie de referencia en \mathcal{B}_0 e interpretamos las derivadas en el tiempo como velocidades virtuales admisibles. La segunda igualdad se obtiene al asumir (3).

Expresando \mathbf{n}^α y \mathbf{m}^α en componentes de la base convectiva de la superficie ($\mathbf{n}^\alpha = n^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + q^\alpha \mathbf{t}$; $\mathbf{m}^\alpha = m^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + m^{\alpha 3} \mathbf{t}$) y proyectando sobre \mathbf{t} la ecuación vectorial del equilibrio de momentos, resulta la ecuación escalar

$$\epsilon_{\alpha\beta} (n^{\alpha\beta} - \gamma_\mu^\alpha \tilde{m}^{\beta\mu}) = 0, \quad \mu = 1, 2 \quad (8)$$

donde $\epsilon_{\alpha\beta}$ es el tensor de permutación, γ_μ^α son los símbolos de Christoffel asociados a la derivada de \mathbf{t} (con $\mathbf{t}_{,\alpha} = \gamma_\mu^\alpha \mathbf{a}_\mu + \gamma_\mu^3 \mathbf{t}$), y $\tilde{m}^{\beta\mu}$ las componentes de $\tilde{\mathbf{m}}^\beta = \int_{h_-}^{h_+} \zeta \mathbf{P}_{\mathcal{E}_0}^{\beta\mu} d\zeta$ (*momento director*). La ecuación (8) muestra la simetría del tensor $\tilde{\mathbf{n}}$ con componentes $\tilde{n}^{\alpha\beta} = (n^{\alpha\beta} - \gamma_\mu^\alpha \tilde{m}^{\beta\mu})$ que es posible adoptar como fuerza membranal generalizada.

Colocando la expresión vectorial de la potencia virtual interna en componentes de la misma base ($\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{t}\}$), y operando para explicitar $\tilde{\mathbf{n}}$, (7) resulta

$$\mathcal{D}_{int} = \int_{\Sigma} \tilde{n}^{\alpha\beta} (\mathbf{a}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{a}}_\beta) + \tilde{m}^{\alpha\beta} (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{t}_{,\beta}) + \bar{q}^\alpha (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{t}) d\Sigma \quad (9)$$

donde $\bar{q}^\alpha = q^\alpha + \gamma_\mu^3 \tilde{m}^{\alpha\mu}$, y $(\cdot)'$ expresa la derivada temporal del término entre paréntesis.

El tensor $\tilde{\mathbf{m}}$, de componentes $\tilde{m}^{\alpha\beta}$, es no simétrico. Por otro lado, la velocidad de deformación generalizada dual de $\tilde{\mathbf{m}}$ es $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ con componentes $\hat{\kappa}_{\alpha\beta} = (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{t}_{,\beta})'$. Al ser en general \mathbf{t} no coincidente con la normal unitaria a la superficie, resulta que $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ no necesariamente es simétrico. Se adopta entonces en [1-4], la hipótesis que la ecuación constitutiva sólo determina la parte simétrica de $\tilde{\mathbf{m}}$, siendo nula su parte antisimétrica. De este modo resulta nula la potencia producida por la parte antisimétrica de $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$.

2.2 Relaciones constitutivas: a) Modelo hiperelástico

Las relaciones tensión-deformación generalizadas pueden ser derivadas en forma consistente de la teoría 3-D. Green-Zerna [6] proponen un procedimiento de reducción siguiendo ese camino. Adoptan un material de Saint-Venant, con las hipótesis de Kirchhoff-Love, pequeñas deformaciones y tal que $\frac{h}{L} \ll 1$, con h el espesor de la cáscara y L una longitud característica de la superficie de referencia.

Las expresiones de esas relaciones utilizando las medidas de deformación y fuerzas generalizadas de la sección precedente resultan

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{D} \boldsymbol{\gamma} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{m}} = \frac{h^3}{12} \mathbf{D} \boldsymbol{\rho} \quad (10.a - b)$$

iendo \mathbf{D} el mismo tensor elástico de la teoría lineal isotrópica correspondiente a estado plano de tensiones. $\dot{\gamma}$ y $\dot{\rho}$ resultan las velocidades de deformación conjugadas a \tilde{n} y \tilde{m} respectivamente. En componentes de la base contravariante: $\gamma_{\mu\theta} = \frac{1}{2}(a_{\mu\theta} - a_{\mu\theta}^0)$ siendo $a_{\mu\theta}$, $a_{\mu\theta}^0$ las componentes del tensor métrico de la base covariante de \mathcal{B}_t y \mathcal{B}_0 respectivamente; $\rho_{\mu\theta} = (\kappa_{\mu\theta} - \kappa_{\mu\theta}^0)$. Resaltamos nuevamente el hecho de estar excluida la parte antisimétrica de \tilde{m} en la ecuación (10.b). Para modelar el efecto del esfuerzo cortante, se adicionan a (10) una relación lineal entre tensiones y deformaciones de corte generalizadas

$$\tilde{q} = cGh\mathbf{I}\delta \quad (11)$$

donde c es el factor de corrección del corte, G módulo de corte, \mathbf{I} es el tensor métrico de la base contravariante. Nuevamente δ es la variable conjugada a \tilde{q} . En componentes $\delta_\theta = (\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{t} - \mathbf{a}_\theta^0 \cdot \mathbf{n})$. Cuando están involucradas grandes deformaciones, un camino alternativo al presente es partir de un modelo hiperelástico incompresible 3-D tipo Mooney-Rivlin y efectuar la posterior reducción. Detalles de esta posibilidad están referenciados en el trabajo de Libai et al [5]. Mencionamos que el modelado de este tipo de materiales requiere la posibilidad de incluir el cambio en el espesor como desplazamiento admisible de la cáscara.

b) Modelo Elasto-plástico (independiente del tiempo)

La reducción del comportamiento 3-D a la superficie de la cáscara para relaciones constitutivas elasto-plásticas, no es directa.

Simo et al [4] utilizan un modelo en tensiones reducidas de plasticidad asociada debido a Shapiro, criterio que nosotros igualmente seguimos. En este caso, las restricciones de admisibilidad elástica de las tensiones resultan expresadas por un conjunto de dos desigualdades escalares. A cada una de ellas se las asocia con diferentes modos de fluencia y son definidas por

$$\Phi_i = \sigma^T A_i \sigma - R(p) \quad i = 1, 2$$

donde $\sigma = (\tilde{n}, \tilde{q}, \tilde{m}) \in \mathbb{R}^8$,

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_0^2} \mathbf{P} & 0 & \frac{\sigma_i}{2\sqrt{3n_0 m_0}} \mathbf{P} \\ 0 & \frac{1}{q_0^2} \mathbf{I} & 0 \\ \frac{\sigma_i}{2\sqrt{3n_0 m_0}} \mathbf{P} & 0 & \frac{1}{m_0^2} \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_1 = +1 ; \sigma_2 = -1$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $R(p) = \frac{(\rho' p + \rho_0)^2}{\rho_0^2}$ y ρ' , ρ_0 , n_0 , m_0 , q_0 constantes del material. Esto resulta en un modelo con endurecimiento isotrópico.

Las leyes de flujo plástico para este caso de múltiples modos de fluencia resultan

$$\dot{\epsilon}^p = \sum_{i=1}^2 \dot{\lambda}_i \nabla_\sigma \Phi_i \quad ; \quad (12)$$

$$\dot{\lambda}_i \geq 0 \quad \Phi_i \leq 0 \quad \dot{\lambda}_i \Phi_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (13.a - c)$$

donde $\dot{\lambda}_i$ multiplicadores plásticos indeterminados. En nuestra notación, $\dot{\epsilon}^p$ engloba las velocidades de deformación plástica membranar, de flexión y de corte respectivamente. En (13-c) no rige la convención de suma para índices repetidos.

El conjunto de ecuaciones (11-13), juntamente con las relaciones elásticas y la aditividad de las velocidades de deformación elástica y plástica ($\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$), determinan el comportamiento del material modelado.

En nuestro caso, la aditividad de las velocidades de deformación no está restringida al caso de deformaciones infinitesimales, ya que ambas –deformaciones elásticas y plásticas– están referidas a un mismo sistema de coordenadas convectivo. Tampoco existen restricciones sobre el tamaño de las deformaciones en relación a las ecuaciones de flujo plástico. No obstante, debido a la no modelización del cambio de espesor de la cáscara tanto en el modelo cinemático como en el constitutivo de plasticidad, y dado el carácter de isocoricidad de las deformaciones plásticas, esta formulación debe conducir a errores significativos para problemas con grandes deformaciones. Finalmente notamos que el comportamiento elástico en este modelo tampoco tiene en cuenta el efecto de disminución de espesor. De todos modos esta limitación no es tan restrictiva, ya que la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas superpuestas a grandes deformaciones plásticas es viable para una gran mayoría de problemas prácticos.

3. FORMULACIÓN VARIACIONAL

Se escogen, como campos cinemáticos independientes, el desplazamiento de los puntos de la superficie u y el “spin” θ del vector director t . El tratamiento de las rotaciones finitas producidas por el “spin” resulta geoméricamente consistente con la aplicación de la transformación exponencial del tensor antisimétrico asociado con θ . Un campo cinemáticamente admisible, puede ser expresado por $\{\delta u, \delta t = \delta\theta \wedge t\}$. Aplicando el *Principio de las Potencias Virtuales*, utilizando la expresión dada por (9), y asumiendo que $\dot{u} = \epsilon \delta u$, $\dot{t} = \epsilon(\delta\theta \wedge t) = \epsilon \delta t$; la expresión de la potencia virtual interna resulta

$$D_{int} = \int_{\Sigma} \bar{n}^{\alpha\beta} (a_{\alpha} \cdot \delta u_{,\beta}) + \bar{m}^{\alpha\beta} (a_{\alpha} \cdot \delta t_{,\beta} + \delta u_{,\alpha} \cdot t_{,\beta}) + \bar{q}^{\alpha} (\delta u_{,\alpha} \cdot t + a_{\alpha} \cdot \delta t) d\Sigma \quad (14)$$

que debe ser igual a la potencia virtual de las cargas externas. La expresión (14) es usada para la aproximación por elementos finitos.

4. ASPECTOS DE LA APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Siguiendo los trabajos [2-4], implementamos elementos cuadriláteros con variantes, según el tipo de problema resuelto. Estos elementos basicamente resultan de utilizar “deformaciones asumidas” para calcular la energía de deformación por corte (metodología similar a la utilizada por Bathe et al [7]). En este caso se interpolan deformaciones generalizadas de corte.

La aproximación a las energías membranal y de flexión, puede ser realizada de diferentes maneras. Nuestra implementación se basa en los elementos mixtos propuestos en [2]. También realizamos modelos en desplazamientos, ya sea para aproximar la energía de flexión, o la de flexión y membranal respectivamente.

Siguiendo las ideas expuestas y tomando un cuadrilátero isoparamétrico de 4 nodos, la geometría de la superficie media y el desplazamiento de esos puntos pueden interpolarse en la forma

$$x^s(\sigma^1, \sigma^2) = N^I(\sigma^1, \sigma^2) x_I^s; \quad (15)$$

$$u(\sigma^1, \sigma^2) = N^I(\sigma^1, \sigma^2) u_I; \quad (16)$$

donde N^I , $I = 1, \dots, 4$ son las funciones de forma bilineales estándar, x_I^s y u_I la posición y desplazamiento de cada nodo del cuadrilátero.

En la interpolación del vector director se presentan una cantidad de variantes. Se pueden proponer esquemas donde se mantenga la longitud unitaria del vector director en cualquier punto de la superficie, o bien relajar esta restricción. Asociado a ello, resultan respectivamente los esquemas de interpolación del vector \dot{t} , o bien del spin θ . Debemos aclarar que esquemas refinados en el sentido de mantener unitario a t en todo punto, son sumamente costosos en tiempo de computación.

Ante estos condicionamientos, vale la pena preguntarse cómo influyen los resultados con esquemas alternativos más simples de interpolación. Por ejemplo la actualización por la transformación exponencial de los vectores directores en cada nodo del elemento por iteración de Newton, evaluando con una interpolación bilineal

$$t^{k+1}(\sigma_G^1, \sigma_G^2) = N^I t_I^{k+1} \quad (17)$$

$$t_{,\alpha}^{k+1}(\sigma_G^1, \sigma_G^2) = N_{,\alpha}^I t_I^{k+1} \quad (18)$$

En las aplicaciones numéricas que presentamos a continuación intentamos obtener una respuesta a ese interrogante

4.1 Aproximación Numérica en Elasto-plasticidad

La cuestión esencial que debemos considerar para la solución de este tipo de problemas, es determinar el algoritmo numérico para resolver la relación constitutiva. Debe notarse que el algoritmo seleccionado puede imponer ciertas restricciones sobre el elemento finito viable a ser utilizado.

El esquema de discretización ("temporal") adoptado es uno totalmente implícito y conduce a un sistema discreto de ecuaciones. El algoritmo propuesto en [4] para resolverlo tiene la siguiente característica. Se determina en una etapa inicial al conjunto $J_{act}^{(0)}$ que contiene el índice de los modos de fluencia que se activan en un estado de "trial" convenientemente definido. La particularidad de ese algoritmo es que en cada iteración tiene la posibilidad de extraer índices del conjunto $J_{act}^{(k)}$, pero no permite introducir uno nuevo. Este criterio puede conducir en ciertos casos a que no se halle solución del sistema discreto; aunque el mismo esté correctamente planteado.

Para tratar de disminuir el costo computacional involucrado, en [4] se apela a dos estrategias (ver también Matthies[8], Hecke[9]) :

- Reducción algebraica del sistema discreto a i ecuaciones, con i el número de modos de la función de fluencia.
- Uso de la propiedad de colinealidad de algunos tensores que intervienen en ese sistema. Diagonalizando las matrices que los representan, se obtiene un sistema equivalente cuya evaluación implica una menor cantidad de operaciones aritméticas con relación al original.

De todos modos, la evaluación de la relación constitutiva con el algoritmo elasto-plástico de cáscaras (modelo de Shapiro) resulta caro computacionalmente. Obviamente, para una conclusión correcta, debe analizarse el costo relativo frente a formulaciones alternativas.

5. SOFTWARE UTILIZADO EN LA IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Un aspecto relevante de este trabajo consistió en la implementación de los elementos finitos desarrollados en el software *OOFELIE* (Cardona et.al.[10]), escrito en lenguaje C++ siguiendo lineamientos de programación orientada a objetos.

Este software posee un intérprete de comandos de alto nivel, que posibilita la creación y fácil acceso a los objetos diseñados. Es también suficientemente flexible como para permitir la implementación de esquemas iterativos como el de Newton o métodos de continuación más elaborados, para resolver el sistema de ecuaciones no-lineales que se plantea, sin necesidad de tener que modificar los programas fuentes del lenguaje C++.

Ejemplos típicos de clases diseñadas para el problema de cáscaras, fueron LocalCoor y Director. La primera maneja los objetos *coordenadas locales de cada nodo*, que rotan unidos al vector director del nodo. Posee distintas funciones miembros, entre ellas Update, que actualiza las coordenadas locales a partir del vector incremento de rotación, siguiendo la transformación

exponencial. La segunda clase mencionada maneja las operaciones correspondientes a la interpolación del vector director, estando cada instancia de la misma asociada a un elemento finito de cáscara en particular.

6. APLICACIONES NUMÉRICAS

Mostramos a continuación una serie de aplicaciones numéricas, ilustrando algunas de las apreciaciones hechas en el texto. En los trabajos [2-4] se presentan una gran cantidad de problemas resueltos. Nuestra intención aquí es complementarlos, ya sea repitiendo algunos de ellos usando otros elementos finitos y analizando la solución obtenida, o resolviendo nuevos problemas que resalten otras características del modelo.

Implementamos tres elementos finitos con ligeras variantes. Todos ellos son cuadriláteros de 4 nodos, con deformaciones asumidas para el cálculo de la energía de deformación por corte. En el elemento Q4DDb, los efectos membranal y de flexión son aproximados por un esquema en desplazamientos con integración completa, en tanto el vector director y su derivada se interpolan en el interior del elemento usando las ecuaciones (17-18). El elemento Q4Mdb es igual al anterior, con la salvedad que el efecto membranal es aproximado por el esquema mixto introducido en [2]. Finalmente, el Q4Mds es igual al Q4Mdb, sólo que se interpola bilinealmente el incremento del vector director Δt , en tanto se calculan t y $t_{,\alpha}$ en cada punto de Gauss, usando las ecuaciones (4.9-4.10) de la referencia [3]. Este último esquema intenta verificar con mayor exactitud la restricción de longitud unitaria de t en todo punto de la cáscara.

6.1. Fleje Circular Cargado Radialmente

Este ejemplo, presentado en Libai et al [5], modela el proceso de deformación de un fleje circular sometido a dos cargas radiales, iguales y opuestas (figura 2-a).

La respuesta estructural a la carga externa es presentada en la figura 2-b, donde la solución exacta fue determinada en [5] para una relación $h/R = 0.05$ y material del tipo Mooney-Rivlin. En la misma figura damos la solución que obtuvimos discretizando una cuarta parte del fleje con 10 elementos finitos (malla no uniforme), del tipo Q4Mds. Indicamos además con a, la solución correspondiente a una membrana inextensional.

En la respuesta exacta observamos tres etapas diferentes al aumentar monótonamente la carga. En la primera etapa, ocurre una deformación inextensional en membrana. Cuando el fleje se hace aproximadamente plano, comienza un proceso de estiramiento membranal. Como es de esperar, un comportamiento lineal del material aproxima la respuesta exacta en los instantes iniciales de la deformación membranal. Sigue una tercera etapa con grandes deformaciones membranales. Observamos que el modelo constitutivo que utilizamos no consigue captar la solución en esta última etapa.

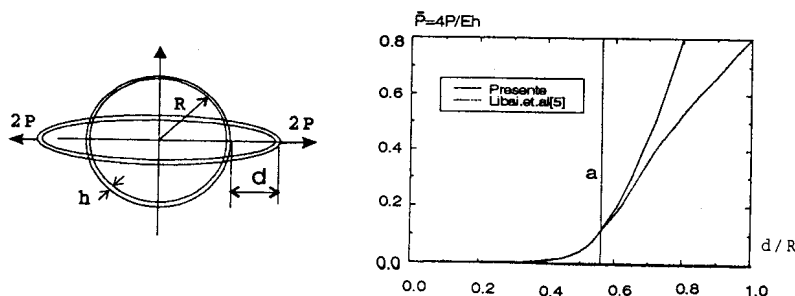


Figura 2: Fleje sometido a 2 cargas radiales, a: dimensiones geométricas, b: respuesta carga-deflexión

2. Cáscara Cilíndrica sometida a Deformaciones Plásticas debido a una Carga Distribuida

En este problema, modelamos una cáscara semicilíndrica (figura 3-a) con la dimensión longitudinal mucho mayor que la radial, simplemente apoyada en el plano $z = 0$ (todos los desplazamientos restringidos y libres para girar), sometida a una carga distribuida en una línea de valor $4P$ por unidad de longitud. Asumimos pequeñas deformaciones y desplazamientos.

Tomamos $n_o = 10$, $m_o = 1$, $q_o = 1000$. Debido a la simetría del problema, modelamos sólo la mitad de una tira de longitud unitaria en la dirección x , con 15 elementos finitos del tipo QDDb. En la figura 3-b mostramos la curva carga vs. desplazamiento del punto donde se aplica la carga, para dos valores diferentes de constante de endurecimiento isotrópico ρ' . Los primeros puntos en alcanzar el límite elástico, corresponden a los puntos de aplicación de la carga. Con el aumento de la carga externa, la zona plastificada se mantiene limitada a una zona pequeña, concentrándose de ese modo las deformaciones plásticas. Cercano al punto B de la respuesta carga-desplazamiento, se inicia la plastificación en otra zona no adyacente a la primera, la cual conduciría al colapso de la estructura si el material fuera perfectamente plástico.

Para la solución del sistema no-lineal, utilizamos un método de Newton puro, sin búsqueda lineal. De este modo, para obtener convergencia, los incrementos de carga debieron ser pequeños. En este caso se evidenció una notable falta de robustez del algoritmo para resolver la ecuación constitutiva.

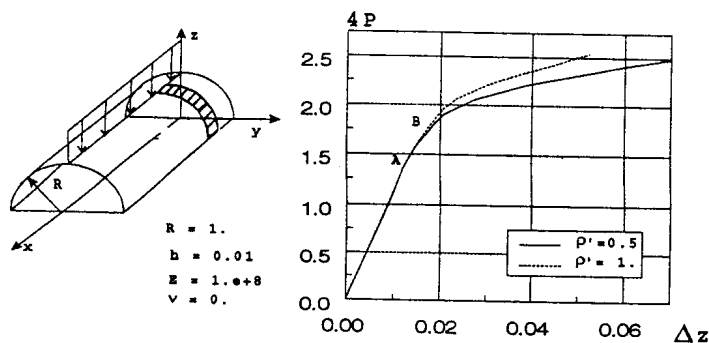


Figura 3: Cáscara semicilíndrica simplemente apoyada, a: dimensiones geométricas, b: carga vs. desplazamiento para dos constantes de endurecimiento

3. Aplicaciones con Grandes Rotaciones y Material Hiperelástico

3.1. Cáscara Cilíndrica Rebajada

El problema de la cáscara cilíndrica rebajada simplemente apoyada en dos bordes a-b y c-d (figura 4-a), y sujeta a una carga concentrada en su punto medio, se caracteriza por presentar un punto límite. Si el espesor es muy pequeño en relación a las otras dimensiones, surge además el efecto de "snap-back" en la repuesta carga-desplazamiento del punto de aplicación de la carga. Nos interesa presentar este ejemplo, para mostrar la facilidad con la cual se implementan todos del tipo continuación en el programa OOFELIE.

Los datos geométricos y de material resultan, $E = 3102.75 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $R = 2540. \text{ mm}$, $r = 2504. \text{ mm}$, $h = 6.35 \text{ mm}$. ángulo que subtende el lado a-d: 0.1 rad .

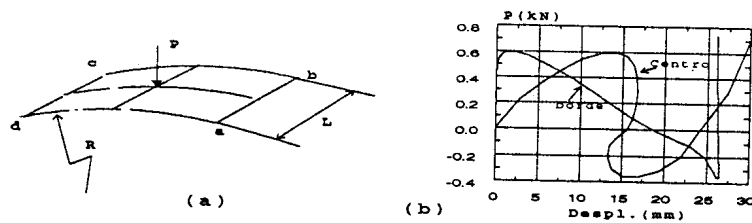


Figura 4: Cáscara cilíndrica rebajada, a: modelo geométrico, b: carga vs. desplazamiento para el centro y punto medio del borde a-d de la cáscara

Modelamos un cuarto de la cáscara con 16 elementos del tipo Q4DDb. Los resultados, presentados en la figura 4-b, prácticamente no difieren de los presentados en [3]. Conseguimos recorrer la curva de equilibrio en 23 incrementos con el algoritmo de Crisfield.

6.3.2. Cáscara Semiesférica Cargada Radialmente

En este ejemplo, una cáscara semiesférica con un agujero en la parte superior y cuatro cargas radiales opuestas y ortogonales (figura 5-a), queremos resaltar el comportamiento de los tres elementos implementados. Para ello modelamos $1/4$ de cáscara con 64 elementos. Las constantes de material y datos geométricos resultan: $E = 6.825 \times 10^7$, $\nu = 0.3$, $h = 0.04$, $R = 10$. La figura 5-b muestra las curvas de carga vs. desplazamiento para los tres elementos. Observamos que los diferentes esquemas de interpolación del vector director, prácticamente no influyen en los resultados obtenidos (elementos Q4MDS y Q4MDB). En cambio, el esquema de interpolación del efecto membranar, produce modificaciones apreciables. Para grandes desplazamientos el de tipo mixto se aproxima más al resultado correcto.

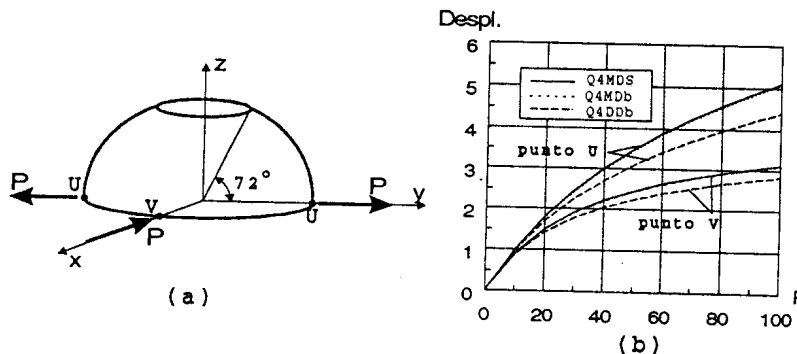


Figura 5: Cáscara semiesférica agujereada, a: geometría, b: desplazamiento vs. factor de carga

CONCLUSIONES

Efectuamos un análisis crítico de un modelo para la simulación del comportamiento no lineal físico y geométrico de cáscaras. Implementamos varios tipos de elementos finitos siguiendo la teoría desarrollada, realizando comparación de resultados para distintos ejemplos de aplicación.

Luego del estudio realizado, podemos enumerar las siguientes conclusiones :

- El modelo cinemático propuesto por Simo et al [1-4] se mostró apropiado para representar cáscaras con grandes desplazamientos.
- No se observó una diferencia notable en el comportamiento de los elementos finitos cuadriláteros al realizar la interpolación bilineal del vector director, resultando en una mayor simplicidad y economía de cálculo. Claro está que, a medida que aumente la curvatura de la superficie en el proceso de deformación, es de esperar un deterioro de la aproximación obtenida con este esquema.
- Los resultados muestran que se produce un apartamiento respecto de la solución exacta para grandes deformaciones, tanto en casos de hiperelasticidad como en plasticidad. De admitirse cambios de espesor, se podría extender la validez del modelo. Pero en el caso de considerar plasticidad material, es de prever dificultades por efecto de la localización de deformaciones.
- Se evidenció una cierta falta de robustez al tratar de resolver problemas elasto-plásticos. Dos aspectos parecen estar al origen del problema:
 - a. En problemas en los que se producen rótulas plásticas por flexión sin deformaciones membranales significativas, se observaron tensiones membranales irrealmente altas, indicando algún tipo de problema en el modelo de elementos finitos en sí.
 - b. Por otra parte, el algoritmo implementado de integración de las relaciones constitutivas presentó problemas y necesita ser mejorado.

Agradecimientos Agradecemos el apoyo económico recibido de *Conicet* (proyecto PID-BID 238) y de *Fundación Antorchas* (proyecto 13015/1-16).

REFERENCIAS

- [1] J.C.Simo, D.D.Fox, *On stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **72** (1989), 267-304.
- [2] J.C.Simo, D.D.Fox, M.Rifai, *On stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; computational aspects* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **73** (1989), 53-92.
- [3] J.C.Simo, D.D.Fox, M.Rifai *On stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **79** (1990), 21-70.
- [4] J.C.Simo, J.G.Kennedy *On stress resultant geometrically exact shell model. Part V: Non-linear plasticity: formulation and integration algorithms* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **96** (1992), 133-171.
- [5] A.Libai, J.G.Simmonds *Nonlinear elastic shell theory* Adv. Appl. Mech., Ed. by Hutchinson and Wu, Academic-Press **23** (1983),.
- [6] A.E.Green, W.Zerna *Theoretical elasticity*, Oxford Univ.-Press, 1960.
- [7] K.J.Bathe, E.N.Dvorkin *A four-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation* Int. Jour. Num. Meth. Eng. **21** (1995) 367-383.
- [8] H.G.Matthies *A decomposition method for the integration of the elastic-plastic rate problem* Int. Jour. Num. Meth. Eng. **28** (1989) 1-11.
- [9] M.B.Hecke *Potenciais generalizados e otimização na análise elasto-plástica*, Tesis de Doctorado, Depto. Eng. Mec. PUC, Rio de Janeiro, 1991.
- [10] A.Cardona, I.Klapka, M.Géradin *OOFELIE: An object oriented finite elements program led by interactive execution*, Presentado a: "Computational Structures Technology" 1994, Atenas, Grecia.