

DETERMINACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DE PÉNDULO INVERTIDO

Fabián M. Camusso y Alberto Cardona
Grupo de Tecnología Mecánica de INTEC
Universidad Nacional del Litoral - Conicet
Güemes 3450 - 3000 Santa Fe

RESUMEN

Se desarrollaron procedimientos generales para la determinación de las ecuaciones de movimiento y el análisis de la estabilidad de sistemas dinámicos usando un programa de cálculo simbólico. Los procedimientos desarrollados guardan generalidad suficiente como para ser aplicados a cualquier sistema mecánico, debiendo definirse únicamente la expresión del Lagrangiano del sistema en análisis.

ABSTRACT

General procedures were developed to determine motion equations and to analyze the stability of dynamics systems, using a symbolic calculation program. These procedures are able to be used in any mechanic system, only being necessary to define the Lagrangian expression of the considered system.

1. Introducción

En este trabajo se desarrollaron procedimientos para el cálculo y la generación semiautomática de las ecuaciones de movimiento utilizando el programa de álgebra simbólica *Maple V*[1]. Se realizó luego el análisis de estabilidad de un sistema dinámico utilizando el programa de simulación *Simulink*[2].

En particular, se estudió un sistema consistente en un péndulo invertido montado sobre un carro con desplazamiento horizontal. El control del accionamiento del carro, se basa en medidas del desplazamiento y del giro del péndulo, y busca seguir un desplazamiento de consigna guardando en todo momento la verticalidad del péndulo. El sistema de control resultante fue verificado por simulación usando un programa general de análisis de mecanismos.

En primer lugar, se analizan las ecuaciones de movimiento del sistema carro-péndulo de dos grados de libertad. Estas ecuaciones se desarrollan a partir del Lagrangiano del sistema en análisis, usando procedimientos generales escritos en el lenguaje propio de *Maple V* [3,4]. Por diferenciación automática de las ecuaciones de movimiento se construyen las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento. Posteriormente se estudia la estabilidad del sistema, siguiendo la teoría de estabilidad de *Krasovskii* y *Lyapunov* [5]. Por último se analiza el diseño del sistema de control y se presentan resultados de simulación.

2. Determinación de las ecuaciones de movimiento

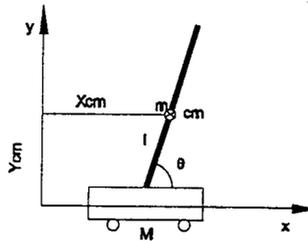


Figura 1.1: sistema carro-péndulo

El sistema en estudio consta de un carro que se desplaza horizontalmente sobre el cual se encuentra montado un péndulo invertido con desplazamiento angular (ver figura 1.1). Denotaremos por M la masa del carro, m la masa del péndulo (concentrada en el centro de masas cm), θ el desplazamiento angular del péndulo, l la distancia desde la articulación del péndulo al carro hasta su centro de masas, y x_{cm} e y_{cm} las coordenadas horizontal y vertical del centro de masas.

Las expresiones de la energía cinética \mathcal{K} y potencial \mathcal{V} del sistema son :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad (1)$$

$$\mathcal{V} = mgl \cos(\theta) \quad (2)$$

donde la posición y velocidad del centro de masas del péndulo resultan :

$$\begin{aligned} x_{cm} &= x + l \sin(\theta), & \dot{x}_{cm} &= \dot{x} + l \cos(\theta) \dot{\theta} \\ y_{cm} &= l \cos(\theta), & \dot{y}_{cm} &= -l \sin(\theta) \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

Utilizamos el programa *Maplev* para resolver las expresiones matemáticas que aparecen en el análisis de sistemas dinámicos. El procedimiento *procl.tex*, que se lista a continuación, se utiliza para introducir los datos necesarios para futuros cálculos relativos al sistema carro-péndulo. Esencialmente, este procedimiento define las expresiones de las energías cinética y potencial, y la expresión de la fuerza de control que actúa sobre el grado de libertad 1 (correspondiente al desplazamiento horizontal del carro).

```
dyn1 := proc()
#####
# datos del pendulo invertido
# q := vector de coordenadas generalizadas
# q[1]:= grado de libertad del carro
# q[2]:= grado de libertad del pendulo
# dq := vector de velocidades
# k := energia cinetica del sistema
# v := energia potencial del sistema
# la := expresiones de Lagrange
# Fnc := fuerza de control
# n := numero de grados de libertad
# k1. k2. k3. k4 := constantes
```

```
#####
k:=.5*m*(dq[1]**2+2*1*cos(q[2])*dq[1]*dq[2]+1**2*dq[2]**2)+.5*M*dq[1]**2;
v := m*g*1*cos(q[2]) ;
Fnc := array[1..2] ;
n := 2 ;
la := k-v ;
Fnc[1] := k1*q[2]+k2*dq[2]+k3*q[1]+k4*dq[1] ;
Fnc[2] := 0 ;
end;
```

2.1 Ecuaciones de Lagrange

Sea $q = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n)$ el conjunto de coordenadas del sistema. Su comportamiento dinámico se rige por las llamadas *ecuaciones de Lagrange*, que expresan que la solución satisface:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, \dots, n \quad (4)$$

donde Q_k es el vector de fuerzas generalizadas no conservativas y $\mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k) = \mathcal{K} - \mathcal{V}$ es el *Lagrangiano* del sistema.

El sistema carro-péndulo consta de dos grados de libertad ($x \ \theta$). Operando, obtenemos las expresiones siguientes :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \begin{pmatrix} ml \cos(\theta) \ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + (M+m)\ddot{x} \\ ml \ddot{x} \cos(\theta) - ml \sin(\theta) \dot{\theta} \dot{x} + ml^2 \ddot{\theta} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 \\ ml \sin(\theta) \dot{x} \dot{\theta} - mgl \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Estas expresiones se calculan automáticamente usando el procedimiento *proc2.tex*, quien opera a partir de los datos del procedimiento *proc1.tex*. El programa elabora primeramente los vectores de coordenadas generalizadas y de velocidades, para luego evaluar las ecuaciones de equilibrio dinámico.

```
dyn2 := proc();
#####
# calculo de las ecuaciones de movimiento
# entradas:= n :=numero de grados de libertad
#           q :=vector de coordenadas generalizadas (n*1)
#           dq :=vector de velocidades (n*1)
#           k,v:=expresiones de la energia cinetica y potencial
#           la := Lagrangeana
#
# salidas:= ecuaciones de Lagrange
#####
dql := array(1..n);
dvl := array(1..n);
ddvl := array(1..n);
eqn := array(1..n);
u := array(1..n);
for i to n do
```

```

    dvl[i] := diff(la,dq[i]);
    dql[i] := diff(la,q[i]);
  od;
  for i to n do
    q[i] := u[i](t);
    dq[i] := diff(q[i],t);
    dvl[i] := evalm(dvl[i]);
    dql[i] := evalm(dql[i]);
  od;
  for i to n do
    ddvl[i] := diff(evalm(dvl[i]),t);
    eqn[i] := expand(ddvl[i]-dql[i]=0);
  od;
end;

```

2.2 Obtención de las Matrices de Masa, Rigidez, y Amortiguamiento

Las ecuaciones de Lagrange constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo orden. Este sistema puede resolverse numéricamente utilizando algoritmos de integración temporal de tipo implícito (por ejemplo, los métodos de *Newmark* y de *Hilbert-Hughes-Taylor*).

A fin de formular este tipo de algoritmos, se hace necesario determinar las llamadas matrices de rigidez, amortiguamiento y masa del sistema. Estas pueden obtenerse por diferenciación de las fuerzas internas con respecto a los desplazamientos, velocidades y aceleraciones, respectivamente. El procedimiento *dyn3.tex* realiza este cálculo para un sistema genérico de n grados de libertad.

```

dyn3 := proc() ;
#####
: calculo de las matrices de masas,rigidez y amortiguamiento
: entradas := n:= numero de ecuaciones
:           q:= vector de coordenadas generalizadas de n dim.
:           dq:= vector de velocidad de n dim.
:           la:= expresion lagrangeana
: salidas := finer := vector de fuerzas de inercia
#          masa := matriz de masa[i,j]
#          kt := matriz de rigidez[i,j]
#          ct := matriz de amortiguamiento[i,j]
#####
: finer := array(1..n) ;
: qk := array(1..n) ;
: dk := array(1..n) ;
: dvk := array(1..n) ;
:      := array(1..n) ;
: masa := array(1..n,1..n) ;
:      := array(1..n,1..n) ;
:      := array(1..n,1..n) ;
: for i to n do
: k[i] := diff(la,dq[i]) ;
: k[i] := diff(la,q[i]) od;
: for i to n do
: d[i] := d[i](t) ;
: [i] := diff(q[i],t) ;

```

```

dvk[i] := evalm(dvk[i]) ;
dqk[i] := evalm(dqk[i]) ; od;
for i to n do
ddvk[i] := diff(evalm(dvk[i]),t) ;
finer[i] :=simplify(ddvk[i]-dqk[i]-Fnc[i]) od;
q := array(1..n) ;
dq := array(1..n) ;
ddq :=array(1..n) ;
for i to n do for j to n do
finer[i] :=
subs(diff(d[j] (t), t , t)=ddq[j],diff(d[j](t),t)= dq[j] ,d[j] (t) = q[j] ,
finert[i]) od; od;
for i to n do for j to n do
masa[i,j] := simplify(diff(finert[i],ddq[j]));
kt[i,j] := simplify(diff(finert[i],q[j]));
ct[i,j] := simplify(diff(finert[i],dq[j])) od; od;
end ;

```

Obtenemos así las matrices de rigidez, amortiguamiento y masa :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -k3 & -ml \cos(q_2) \ddot{q}_2^2 - ml \sin(q_2) \ddot{q}_2 - k1 \\ 0 & -ml \sin(q_2) \dot{q}_1 - mgl \cos(q_2) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -k4 & -2ml \sin(q_2) \dot{q}_2 - k2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m + M & ml \cos(q_2) \\ ml \cos(q_2) & ml^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

y el vector de fuerzas de inercia :

$$\mathbf{Finer} = \begin{pmatrix} m\ddot{q}_1 - ml \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + ml \cos(q_2) \ddot{q}_2 + M\ddot{q}_1 - k1q_2 - k2\dot{q}_2 - k3\dot{q}_1 - k4\dot{q}_1 \\ ml \cos(q_2) \dot{q}_1 + ml^2 \ddot{q}_2 - mgl \sin(q_2) \end{pmatrix} \quad (10)$$

En función de los datos obtenidos se calculan en el siguiente procedimiento (*proc4.tex*) las aceleraciones $\ddot{\theta}$ y \ddot{x} , correspondientes a los grados de libertad del sistema :

```

dyn4 :=
proc() ;
with(linalg);
#####
# calculo de las aceleraciones
# entradas := masa := matriz de masas
# salidas := vec3 := vector de aceleraciones
#####
vec1 := array(1..n) ;
vec2 := array(1..n) ;
vec3 := array(1..n) ;
mat1 := array(1..n,1..n) ;
mat1 := inverse(masa);
vec1 := multiply(masa,ddq);
vec2 := evalm (finer - vec1);
vec3 := multiply (mat1,vec2);
end;

```

3. Análisis de la Estabilidad del Sistema Carro-Péndulo

El estudio preliminar de estabilidad del sistema se basó en el teorema de estabilidad de *Krasovskii*, que enuncia lo siguiente :

Sea un sistema dinámico autónomo definido por $\dot{x} = f(x)$, con un punto de equilibrio alrededor del origen, y sea $A(x)$ la matriz Jacobiana del sistema ($A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$). Definimos $F = A + A^t$. Luego, si F es definida negativa en el entorno del origen, entonces el punto de equilibrio en el origen es asintóticamente estable.

Para el análisis de nuestro sistema, realizaremos la transcripción de las ecuaciones de movimiento a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Denotaremos por x al nuevo vector de coordenadas generalizadas :

$$x = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Luego, el sistema de ecuaciones diferenciales que rige el movimiento del sistema resulta :

$$\dot{x} = f(x) \quad (12)$$

donde

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{m(\sin(x_3)x_4^2 + k_1x_3 + k_2x_4 + k_3x_2 - \cos(x_3)mg \sin(x_3))}{-m - M + m \cos(x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{-\cos(x_3)m \sin(x_3)x_4^2 + \cos(x_3)(k_1x_3 + k_2x_4 + k_3x_2) - g \sin(x_3)(m+M)}{(-m - M + m \cos(x_3)^2)l} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Posteriormente se calcula la matriz Jacobiana $A(x)$ por diferenciación de las fuerzas $f(x)$ respecto de las nuevas coordenadas generalizadas :

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (14)$$

Para el caso particular que tratamos, la matriz Jacobiana tiene 4×4 elementos. Una vez armada ésta, se procede a calcular la parte simétrica $F = A + A^t$, y se analiza si resulta definida positiva o negativa.

Para que una matriz sea definida positiva es condición necesaria que los elementos de la diagonal principal sean estrictamente positivos. El teorema de *Silvester* asegura que una condición necesaria y suficiente para ello es que los determinantes menores sean estrictamente positivos o, su equivalencia, que los autovalores sean estrictamente positivos. Para este caso en estudio, resulta que el punto de equilibrio en el origen es asintóticamente estable (se logra determinar utilizando procedimientos de cálculos semejantes a los anteriores).

4. Diseño del Sistema de Control

El péndulo invertido se encuentra en una situación de equilibrio inestable, pudiendo caer en cualquier momento si no se le aplica una fuerza de control adecuada. La fuerza de control F_{nc} actúa sobre el carro, y es conjugada al desplazamiento horizontal del mismo. Fijaremos procedimientos para estimar valores de los coeficientes $k_i, i = 1, \dots, 4$ que regulan la intensidad de la fuerza de control.

Intuitivamente podemos aceptar que el sistema no lineal puede llegar a trabajar en forma similar a su aproximación linealizada, para una escala de movimientos pequeños. El método de linealización de *Lyapunov* [5,6], nos asegura que si el diseño es estable por control lineal, luego podemos garantizar la estabilidad local del sistema físico original.

Como se debe mantener la verticalidad del péndulo invertido, se supone que $\theta(t)$ $\dot{\theta}(t)$ son magnitudes pequeñas, para las cuales se cumple :

$$\sin(\theta) \approx \theta \quad \cos(\theta) \approx 1 \quad \theta\dot{\theta} \approx 0$$

Así, el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que fuera obtenido anteriormente puede linealizarse como sigue :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_L(\mathbf{x}) \quad (15)$$

donde

$$\mathbf{f}_L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \frac{mgx_3 + F_{nc}}{M} \\ \frac{x_4}{(M+m)g - F_{nc}} \\ \frac{Ml}{Ml} \end{pmatrix} \quad (16)$$

de donde se obtiene la función de transferencia de la planta:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{Mls^2 - (M+m)g} \quad (17)$$

Dando valores a la masa del carro, masa del péndulo y longitud del péndulo, se demuestra que la planta tendría un polo en el eje negativo real ($s \in \text{Re}\{-\}$), y otro en el eje positivo real ($s \in \text{Re}\{+\}$). Por lo tanto, según los criterios de estabilidad en sistemas lineales, la planta en lazo abierto es inestable.

El sistema linealizado tiene la siguiente representación matricial en el espacio de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (18)$$

donde $\mathbf{y} = (x_1 \ x_3)^T$ y las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} resultan :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-m}{M}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{Ml} \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

Se propone el diseño de un sistema de control por medio de la técnica de ubicación de polos. Por lo tanto es necesario determinar si el sistema es controlable o no. La matriz de controlabilidad del sistema (que se obtiene utilizando procedimientos de cálculo) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \mathbf{A}^3\mathbf{B}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{-mg}{M^2} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{-mg}{M^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{M} & 0 & \frac{(M^2+ml)g}{M^2} \\ -1 & 0 & (M^2+ml)g & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

cuyo determinante es no nulo y su rango es 4; por lo tanto, el sistema tiene estado completo controlable y observable.

Una vez verificada la controlabilidad del sistema se calcula la ecuación característica, que para este caso en estudio es la siguiente :

$$s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = s^4 + s^2 \frac{mg}{M} = 0 \quad (21)$$

obteniendo los siguientes valores para los coeficientes del polinomio característico : $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{mg}{M}$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$.

Los polos μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4 se eligen en forma tal que el sistema tenga un tiempo de restablecimiento razonablemente pequeño y un amortiguamiento aceptable.

La ecuación característica deseada es :

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) = 0 \quad (22)$$

de donde se obtienen los coeficientes α_i . Para determinar la matriz de ganancias k de retroalimentación del estado, se utiliza la ecuación :

$$k = (\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_1 - a_1) T^{-1} \quad (23)$$

donde la matriz T está dada por :

$$T = MW \quad (24)$$

siendo M la matriz de controlabilidad y W definida, como:

$$W = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

siendo a_i los coeficientes del polinomio característico (obtenidos en la ecuación (21)).

El cálculo de la matriz de ganancias k de retroalimentación del estado se obtiene utilizando procedimientos de cálculo semejantes a los anteriores.

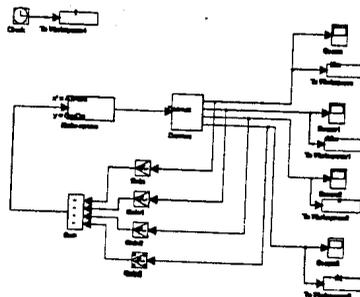


Figura 4.1: Esquema de control con retroalimentación

5. Simulación de la respuesta dinámica no lineal

Mediante el programa *Simulink*, se calcula la respuesta dinámica no lineal del sistema carro-péndulo a lazo cerrado. Se fijan valores nulos de ángulo y posición deseados $(\theta_d, x_d) = (0, 0)$. La figura 4.1 muestra el esquema de control con retroalimentación del estado.

A los efectos de modelizar el sistema y analizar las curvas de respuesta se proponen los siguientes valores numéricos:

$$M = 2\text{kg} \quad m = 0.1\text{kg} \quad l = 0.5\text{m}$$

Para el sistema a lazo abierto, se determina que uno de los polos se ubica sobre el eje negativo real ($s_1 = -4.539$) y el otro sobre el eje positivo real ($s_2 = 4.539$). En consecuencia, y como se analizó anteriormente, el sistema a lazo abierto es inestable.

Utilizando la técnica de ubicación de polos para estabilizar el sistema y lograr las características deseadas, se determinó la siguiente ecuación característica:

$$s^4 - 20.601s^2 = 0$$

con lo cual, los coeficientes del polinomio característico resultan : $a_1 = 0$; $a_2 = -20.601$; $a_3 = 0$; $a_4 = 0$.

Se requiere que el sistema tenga un tiempo de restablecimiento razonablemente corto y un amortiguamiento razonable ($\zeta = 0.5$ para un sistema de segundo orden); para ello se proponen los polos siguientes :

$$\mu_1 = -1 + j1.732; \quad \mu_2 = -1 - j1.732; \quad \mu_3 = -5; \quad \mu_4 = -5$$

Utilizando los procedimientos desarrollados en los puntos anteriores se determina la matriz de retroalimentación k , dando lugar a la fuerza de control :

$$F_{nc} = -kx = 74.698x_1 + 16.587x_2 + 10.194x_3 + 9.1743x_4$$

Se examina el desempeño del sistema a través del programa *Simulink*, permitiendo estudiar la respuesta dinámica del sistema para distintos valores de condición inicial.

Las figuras 5.1 y 5.2 presentan los resultados obtenidos de la simulación, imponiendo como condición inicial $x(0) = 0.2\text{m}$ y $\theta(0) = 0.1\text{rad}$.

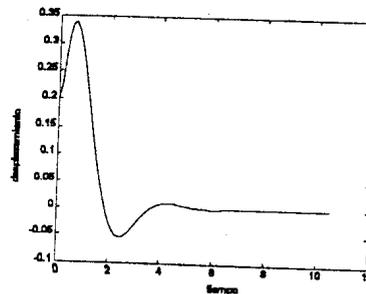


Figura 5.1: evolución de la posición del carro (x)

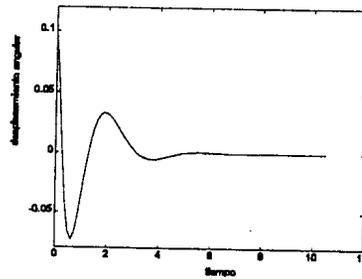


Figura 5.2: evolución de la posición angular (θ)

6. Conclusiones

El empleo de estos programas de manipulación simbólica algebraica y simulación de mecanismos (*Maple V* y *Simulink*), permiten el desarrollo de métodos para la generación semiautomática de las ecuaciones de movimiento y el análisis de sistemas dinámicos.

En particular el software usado se mostró de gran utilidad por su versatilidad y su potencial para resolver sistemas más elaborados, los cuales usando técnicas de control adaptivo o robusto, prevean la manera de controlar efectivamente sistemas reales.

Este trabajo será la base de otros, en donde se pretenderá introducir en el programa multipropósito de simulación de mecanismos *Mecano*, la capacidad de representar algoritmos y sistemas de control en forma modular (usando "elementos" apropiados, al estilo de los utilizados para representar el sistema mecánico).

7. Referencias

1. *Maple V* for Dos and Windows
2. *Simulink. A Program for Simulating Dynamic Systems*, The Math Works Inc. (1992).
3. C. Campbell, *Mathematical Productivity with Maple V.2: Understanding and Utilizing Maple Data Structures and Procedure Programing Concepts and Techniques*
4. J. Duysens y M. Geradin *Symbolic Computation, A first use of MAPLE in dynamics analysis*
5. Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*
6. K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*.