

SIMULACION NUMERICA DEL COMPORTAMIENTO DE VIGAS DE HORMIGON ARMADO CON SEMEJANZA GEOMETRICA

Juan C. Ramallo, Bibiana M. Luccioni, Sergio H. Oller, Rodolfo F. Danesi
*Laboratorio de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán, Av. Roca 1800, 4000 Tucumán, Argentina*

RESUMEN

En este trabajo se presentan resultados numéricos de la respuesta de 4 vigas de hormigón armado ($H^{\circ}A^{\circ}$) de sección rectangular con semejanza geométrica completa y una relación de tamaños 1:2:3:4 ensayadas a flexión en el Laboratorio de Estructuras de la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Para ello se utiliza un programa de elementos finitos (EF) planos no lineal. El comportamiento del hormigón se simula mediante el *Modelo de Daño Plástico Modificado (MDPM)* que tiene en cuenta las características mecánicas más salientes de los geomateriales y en particular del hormigón.

Luego de una breve presentación del *MDPM*, se describe el programa de EF utilizado y su aplicación a la serie de vigas de $H^{\circ}A^{\circ}$. Finalmente se analizan y comparan los resultados numéricos con los obtenidos experimentalmente mostrando que el modelo reproduce adecuadamente el comportamiento de los elementos ensayados, independientemente del tamaño de la pieza.

ABSTRACT

In this paper, the numerical results about the behavior of 4 reinforced concrete rectangular beams with complete geometric similarity and size ratio 1:2:3:4 tested in bending at the Laboratory of Structures of the National University of Tucumán (UNT) are presented. A plane non-linear finite element (FE) program is used. The behavior of the concrete is simulated using the *Plastic Damage Modified Model (MDPM)* that takes into account the most outstanding mechanics features of geomaterials, specially for concrete.

Following a brief description of the MDPM model, the FE program and its applications to the RC beams are described. Finally, the numerical results are analyzed and compared with those experimentally obtained showing that the model adequately reflects the behavior of the tested models in spite of their sizes.

INTRODUCCION

El análisis de la falla progresiva de estructuras de $H^{\circ}A^{\circ}$ y pretensado (P°) bajo cargas estáticas y dinámicas exige no sólo un adecuado conocimiento y evaluación de todas las sollicitaciones actuantes, sino también una adecuada elección del procedimiento de cálculo y del modelo para simular el comportamiento de los materiales.

Actualmente existen muchos programas de EF para análisis de estructuras de $H^{\circ}A^{\circ}$ y P° bajo diversos estados de carga cuya mayor limitación está generalmente en la utilización de modelos constitutivos inadecuados para simular el comportamiento de los materiales.

En este trabajo se presenta la aplicación del *MDPM* en un programa de EF planos para la simulación numérica del comportamiento de 4 vigas de $H^{\circ}A^{\circ}$ sin estribos ensayadas a flexión combinada con corte en el Laboratorio de Estructuras de la UNT [1].

MODELO DE DAÑO PLÁSTICO MODIFICADO

Descripción General del Modelo

El *MDPM* [2-5] es un modelo constitutivo elasto-plástico obtenido a partir del *Modelo de Daño Plástico* [2-5] que permite simular el comportamiento multiaxial del hormigón. Difiere de la versión original en la forma de definir la variable de endurecimiento plástico y la evolución de la cohesión del material.

El *MDPM* surge de la extensión y reinterpretación de las variables fundamentales de la teoría de plasticidad clásica, para poder formular el comportamiento de materiales friccionales. A continuación se presentan las ecuaciones fundamentales que gobiernan el problema.

1. Un criterio de fluencia plástica definido por una expresión del tipo:

$$F = F(\sigma, c) = f(\sigma) - c = 0 \quad (1)$$

donde σ es el tensor de tensión y c es la cohesión.

2. Una descomposición del vector de deformación total ε en una parte elástica ε^e y en una parte plástica ε^p :

$$\varepsilon = D_s^{-1} : \sigma + \varepsilon^p = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2)$$

donde D_s es el tensor de rigidez elástica secante.

3. Una regla de flujo plástica no asociada que proporciona la evolución de la deformación plástica mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \left[\frac{\partial G(\sigma, c)}{\partial \sigma} \right] \quad (3)$$

donde $\dot{\lambda}$ es un parámetro de consistencia plástica y $G(\sigma, c)$ es una función de potencial plástico.

4. Una función de evolución de la variable de daño plástico, que reemplaza a la variable de endurecimiento plástico isótropo de la teoría de plasticidad clásica:

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\lambda} \left[h_\kappa(\sigma, \kappa^p, c) : \frac{\partial G(\sigma, c)}{\partial \sigma} \right] = h_\kappa(\sigma, \kappa^p, c) : \dot{\varepsilon}^p \quad (4)$$

donde κ^p es la variable de daño plástico y $h_\kappa = (\sigma, \kappa^p, c)$ es el vector de estado.

5. Una ecuación de evolución de la cohesión, definida como:

$$\dot{c} = \dot{\lambda} \left[h_c(\sigma, \kappa^p, c) : \frac{\partial G(\sigma, c)}{\partial \sigma} \right] = h_c(\sigma, \kappa^p, c) : \dot{\varepsilon}^p \quad (5)$$

donde $h_c(\sigma, \kappa^p, c)$ es una función de estado escalar

Finalmente, de las 5 ecuaciones anteriores más la condición de consistencia plástica de Prager ($\dot{F} = 0$), se obtiene la relación constitutiva incremental tangente.

VARIABLES FUNDAMENTALES DEL MODELO DE DAÑO PLÁSTICO

Variable de Daño Plástico - Definición

Los materiales cohesivo-friccionales como el hormigón presentan deformaciones últimas muy distintas y disipan distinta energía según el proceso de carga a que son sometidos. Por ejemplo, el hormigón disipa de 100 a 150 veces más energía en un proceso de compresión uniaxial que en uno de tracción uniaxial. Lo expuesto, hace necesario formular una variable de endurecimiento plástico isotrópico objetiva, denominada *variable de daño plástico*, que esté relacionada con la energía disipada y con el tipo de carga.

En el *MDPM* se propone la siguiente definición de la variable de daño plástico para casos multiaxiales de tensión que constituye una normalización a la unidad de la energía disipada plásticamente:

$$\dot{\kappa}^p = \left\{ r(\sigma) \frac{1}{\hat{g}_T^p} + [1 - r(\sigma)] \frac{1}{\hat{g}_C^p} \right\} \sigma : \dot{\varepsilon}^p \quad (6)$$

donde \hat{g}_T^p y \hat{g}_C^p son las máximas energías específicas a tracción y compresión respectivamente, ponderadas de acuerdo con el estado tensional del punto como sigue:

$$\hat{g}_T^p = g_T^p \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{\sigma_T(\kappa^p)}; \quad \hat{g}_C^p = g_C^p \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{\sigma_C(\kappa^p)} \quad (7)$$

$$r(\sigma) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}; \quad \langle \pm x \rangle = 1/2[x \pm |x|]; \quad \text{función rampa}$$

siendo σ_C y σ_T las tensiones uniaxiales de tracción y compresión, respectivamente, y σ_i las tensiones principales.

La diferencia fundamental con la definición original [2-5] está en la forma de definir g_T^p y g_C^p .

Para lograr objetividad en la respuesta, se define la energía específica inelástica como:

$$g^p = G^p / L^p \quad (8)$$

donde G^p es la *máxima energía a disipar por unidad de área dañada* (considerada por hipótesis como una propiedad del material e igual a la energía de fractura G^t para un proceso de tracción simple y a la energía de aplastamiento G^c para un proceso de compresión simple). L^p puede considerarse un parámetro geométrico, la *longitud característica*, que debe ser una medida del ancho de la zona dañada o banda de localización de deformaciones.

Resulta así una variable objetiva respecto a los 2 procesos desarrollados ya que en ambos casos: $0 \leq \kappa^p \leq 1$ ($\kappa^p = 0$ cuando no hay daño y $\kappa^p = 1$ cuando el daño es total) aunque las energías disipadas sean distintas.

Cohesión

En este trabajo, se propone una forma de definir la cohesión consistente en una función explícita en κ^p , pero dependiente del estado termodinámico en cada instante (σ) de la siguiente manera:

$$c(\kappa^p, \sigma) = r(\sigma)c_T(\kappa^p) + [1 + r(\sigma)]c_C(\kappa^p) \quad (9)$$

$$c_c(\kappa^p) = \frac{l}{\chi} \sigma_c(\kappa^p) \quad c_T(\kappa^p) = \frac{R}{\chi} \sigma_c(\kappa^p) \quad (10)$$

donde $R^0 = \sigma_c^0 / \sigma_T^0$ es la relación inicial que hay entre la resistencia uniaxial a compresión y tracción, $c_c(\kappa^p)$ y $c_T(\kappa^p)$ representan la evolución de la cohesión durante un ensayo experimental uniaxial de compresión y tracción simple respectivamente, y χ es un factor de escala entre la cohesión y la resistencia uniaxial de compresión.

Criterio de Fluencia Plástico

La función de fluencia que se presenta a continuación [2-4] intenta reproducir el comportamiento del hormigón dentro del dominio de trabajo al que normalmente se somete al mismo y tiene la forma que se muestra en Figura 1 y puede representarse mediante la siguiente ecuación:

$$F = F(\sigma, c) = \frac{l}{(l - \alpha)} \left[\sqrt{3} J_2 + \alpha I_1 + \beta (\sigma_{\max}) - \gamma (-\sigma_{\max}) \right] - c = 0 \quad (11)$$

donde α , β y γ son constantes adimensionales que determinan la forma de la superficie de fluencia, J_2 es el 2do. invariante del tensor desviador de tensiones y I_1 es el 1er. invariante del tensor de tensiones.

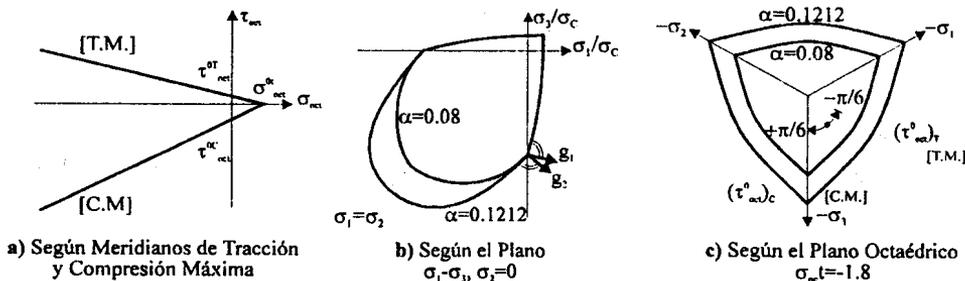


Figura 1: Representación gráfica del criterio de fluencia de ecuación (11)

El parámetro α es el encargado de regular la relación entre la resistencia a compresión uniaxial σ_c^0 y la resistencia equibiaxial σ_{cb}^0 (Figura 1 b). Según los resultados de estudios experimentales, para el hormigón, $\sigma_{cb}^0 / \sigma_c^0$ oscila entre 1.10 y 1.16, para lo cual se obtienen valores de comprendidos entre 0.08 y 0.1212.

El parámetro β es el encargado de regular la relación entre resistencias uniaxiales de compresión y de tracción cuando y resulta. Según resultados experimentales del comportamiento del hormigón R^0 vale en el orden de 10, que, junto con $\alpha = 0.1212$, conduce a valores de β del orden de 7.66.

El parámetro γ sólo aparece en compresión triaxial y es el encargado de regular la relación de radios octaédricos máximos a tracción y compresión (Figura 1 c). Según ensayos experimentales realizados en el hormigón r_{oct}^{max} es prácticamente constante e igual a 0.65, para lo cual se obtiene $\gamma = 3.5$.

Criterio de Potencial Plástico

La definición de la función de potencial plástico establece indirectamente la magnitud de la dilatación que se producirá en el sólido ideal que se modeliza. En el modelo de daño plástico se utiliza la superficie de fluencia de Mohr Coulomb modificada con un ángulo de fricción interna igual al de dilatación.

DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO PLÁSTICO EN UN PUNTO

Post-Proceso de Resultados

Si bien en el espacio de tensiones cada punto del sólido exhibe un comportamiento isotrópico, en el espacio de deformaciones plásticas puede interpretarse cierta direccionalidad del daño, relacionada con la deformación plástica.

Se considera que el daño en un punto del espacio discreto comienza cuando $k^p > 0$ y que su dirección local queda definida por la componente normal a la dirección principal mayor del tensor de deformación plástica.

PROGRAMA COMPUTACIONAL

El programa donde se implementó el *MDDPM* para la solución de problemas elasto-plásticos planos mediante el método de los EF está escrito en lenguaje FORTRAN. La versión para PC está compilada con el programa MS FORTRAN 5.1 [6] y puede correrse en una PC IBM o compatible con sistema operativo DOS y al menos 4Mb de RAM. La versión para workstation fue compilada con el programa SPARCompiler-Fortran 2.01 FCS [7] y opera en una SUN SPARC Station 1030 con sistema operativo SunOS™ 4.1.3 [8]. Esta versión no tiene limitaciones en cuanto a las dimensiones del problema a tratar.

Tipo de Problemas y de Elementos Finitos Disponibles

El programa puede tratar problemas de tensión y deformación plana, axil simetría, estructuras de barras de Timoshenko y estructuras formadas por barras articuladas o la combinación de elementos de cualquiera de los tipos mencionados. El programa utiliza EF cuadriláteros de 4, 8 y 9 nodos, uniaxiales de Timoshenko con 2 y 3 nodos, y uniaxiales de barras con 2 y 3 nodos. Para integrar la rigidez puede usarse cuadratura de Gauss, Lobato o Newton Cotes.

Control de la Respuesta [9]

Para la resolución del sistema no lineal el programa dispone del método de Newton-Raphson, el método de Newton-Raphson modificado utilizando rigidez inicial, o algoritmos combinados. Se pueden utilizar también métodos de control de respuesta del tipo arc-length con las siguientes variantes: plano normal, plano normal modificado, camino esférico, control indirecto de desplazamientos. La solución del sistema de ecuaciones lineales se realiza mediante la técnica frontal [10, 11].

Tipos de Carga

El programa permite aplicar cargas concentradas, distribuidas o de tipo gravitatorio. Además contempla la posibilidad de introducir deformaciones relativas iniciales para simular, por ejemplo, el efecto del pretensado.

Materiales

En líneas generales el modelo constitutivo del material de cada elemento puede ser: elástico lineal o elastoplástico. En caso de un material elastoplástico, el modelo constitutivo tiene la estructura del modelo de daño plástico, en cuanto a la forma en que evolucionan sus variables internas. Permite también variar las funciones de fluencia y potencial y otros parámetros para poder simular materiales con comportamientos marcadamente distintos, desde un acero hasta un hormigón.

En los materiales elastoplásticos se puede utilizar cualquiera de los siguientes criterios de fluencia: Tresca, Von Mises, Mohr Coulomb, Drucker Prager circunscripta, Mohr Coulomb modificado, Lubliner-Oller [2-4]. Cualquiera de estos criterios puede ser usado también como criterio de potencial.

Para integrar la ecuación constitutiva se puede usar cualquiera de los siguientes algoritmos [9]: integración explícita o avance directo [12], retorno mapeado, Euler-Backward. Este último algoritmo es especialmente adecuado para el tratamiento directo de los problemas de tensión plana.

EJEMPLO DE APLICACION

Descripción General de los Ensayos

Se presentan los resultados obtenidos con el *MDPM* y el programa descrito al simular el comportamiento de 4 vigas de H^oA^o sin estribos ensayadas a flexión combinada con corte en el Laboratorio de Estructuras de la UNT [1].

La serie de vigas ensayadas es similar a la serie de ensayos *D* realizada por Leonhardt y Walter en 1961 [13]. Se trata de una serie de 4 vigas de H^oA^o de sección rectangular cuyas dimensiones y características se indican en Figura 2 y Tabla I, respectivamente. Las vigas guardan semejanza geométrica completa con una relación de tamaños 1:2:3:4 y tienen la misma cuantía de armadura longitudinal.

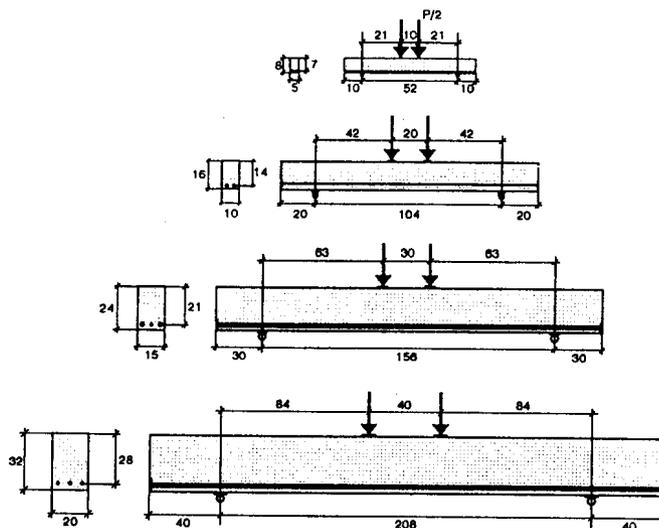


Figura 2: Dimensiones generales de las vigas

Las vigas estaban simplemente apoyadas cerca de sus extremos. Se dispuso estribos en los extremos de las vigas, más allá de los puntos de apoyo, para evitar la formación de fisuras no deseadas.

La carga se aplicó en 2 puntos situados simétricamente a ambos lados de la sección central y se utilizó para ello placas de acero fijadas con resina epoxi sobre la cara superior de la viga. Se realizaron de 5 a 7 etapas de carga incremental con mantenimiento durante el mapeo del cuadro de fisuración.

Tabla I: Características de las vigas ensayadas

Viga	L [mm]	a_v [mm]	h [mm]	b [mm]	F_e	μ [%]	f_c [MPa]	P_{fs} [KN]	P_u [KN]
1	520	210	70	50	2 ϕ 6	1.60	37.3	4.67	13.8
2	1040	420	140	100	2 ϕ 12	1.61	37.3	11.4	52.5
3	1560	630	210	150	2 ϕ 16 + 1 ϕ 20	1.63	37.3	22.9	93.1
4	2080	840	280	200	3 ϕ 20	1.68	37.3	38.0	147.5

Se instrumentaron las secciones de apoyo, bajo las cargas y central realizando la adquisición de datos en forma automática mediante dispositivos electrónicos.

ANALISIS NUMERICO

Descripción General

En Figura 3 se ha representado la malla de EF y las condiciones de apoyo utilizada en la viga 1 (las correspondientes a las restantes vigas eran semejantes). Se emplearon EF planos isoparámetros de 8 nodos y 3x3 puntos de integración para el hormigón, y elementos de barras articuladas para la armadura longitudinal.

En Tabla II se han resumido las propiedades mecánicas utilizadas para los materiales.

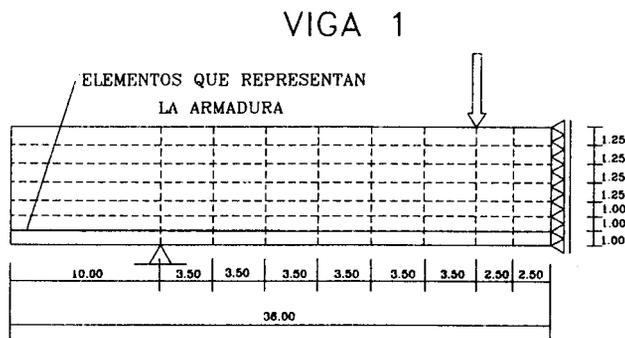


Figura 3: Malla de elementos finitos

En todos los casos se trabajó con control de desplazamientos en el punto de aplicación de la carga y se utilizó el método de Euler-Backward para integrar la ecuación constitutiva.

Tabla II: Características mecánicas de los materiales

Hormigón		Acero		
$E_0 = 20000 \text{ MPa}$	Criterio de fluencia de Lubliner-Oller	$E_0 = 220000 \text{ MPa}$	Criterio de fluencia de Von Mises	
$\nu_0 = 0.2$	Flujo asociado	$\nu_0 = 0.3$	Flujo asociado	
$\sigma_c^0 = 28 \text{ MPa}$	$G_f = 0.08 \text{ N/mm}$	Viga	$\sigma_c^0 = \sigma_r^0$	$\sigma_c^{\text{pico}} = \sigma_r^{\text{pico}}$
$\sigma_c^{\text{pico}} = 37 \text{ MPa}$	$G_c = 8.00 \text{ N/mm}$	1	400 MPa	720 MPa
$\sigma_T^0 = 2.8 \text{ MPa}$	$\kappa_p^{\text{pico}} = 0.38$	2	460 MPa	714 MPa
		3	484 MPa	705 MPa
		4	458 MPa	765 MPa

Análisis de los Resultados

En Figura 4 se han representado los diagramas *carga-flecha en la sección central* obtenidos para las vigas ensayadas. Puede verse que las curvas numéricas se aproximan bastante a las experimentales en el caso de las vigas 1 y 4. Para las vigas 2 y 3, los resultados experimentales muestran deformaciones mayores a las numéricas; esto puede atribuirse a efectos no planares detectados durante los ensayos (sobre todo en el caso de estas 2 vigas) que no pueden ser tenidos en cuenta en un análisis plano.

Debe notarse también que los resultados experimentales presentan escalones en los que la deformación crece sin aumento de carga. Los mismos corresponden a las detenciones de la carga para marcar el cuadro de fisuración. Al recomenzar la carga, las vigas se comportaron como si fueran más rígidas. Este tipo de efecto no es tenido en cuenta por el modelo constitutivo presentado ya que ha sido desarrollado para cargas instantáneas. A pesar de ello, la respuesta numérica tiende a coincidir con la envolvente experimental.

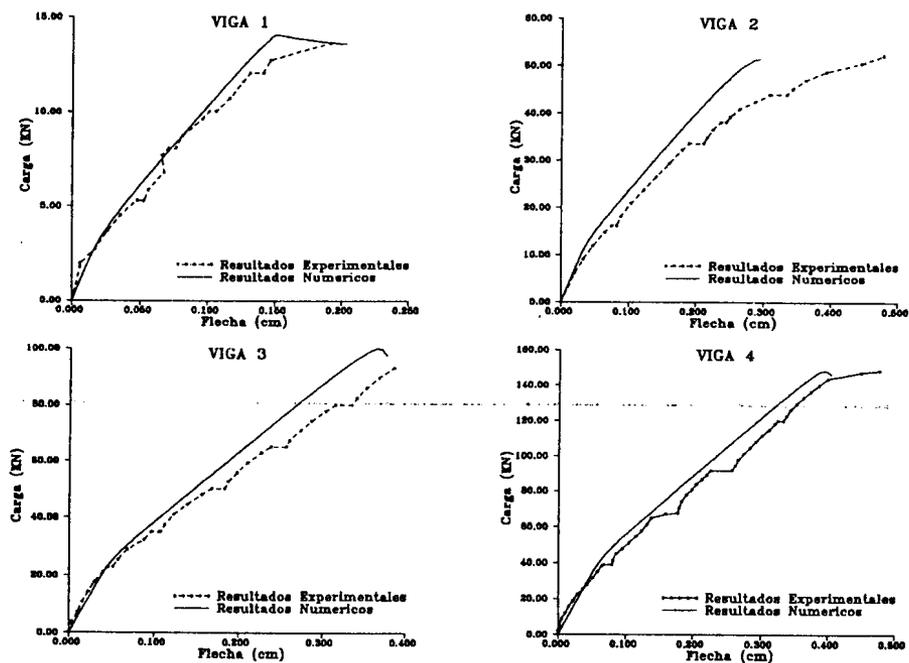


Figura 4: Diagramas carga-flecha en la sección central

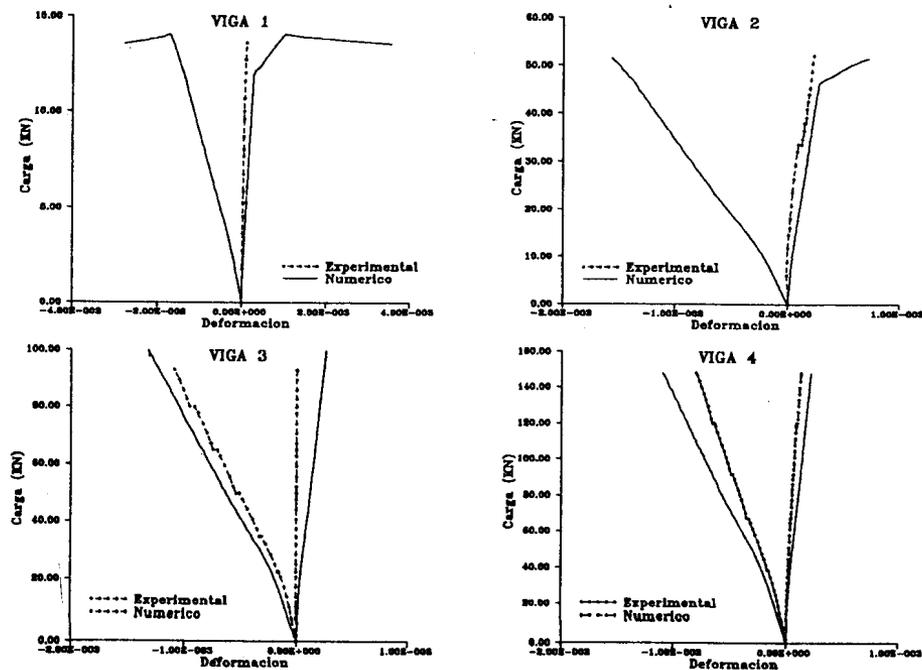


Figura 5: Diagramas carga-deformación específica del hormigón

En Figura 5 se han representado *deformaciones específicas en el hormigón vs. carga aplicada*. Los resultados experimentales corresponden a deformaciones medidas con extensómetros eléctricos adheridos a la cara superior de la viga, en la sección central, en las direcciones longitudinal y transversal. Los resultados numéricos corresponden al punto de Gauss más cercano. En todos los casos se observa que, si bien la tendencia es la misma, la diferencia entre los resultados experimentales y numéricos es mayor que en el caso de las flechas. Esto puede deberse a que, en primer lugar, los puntos de medición no son coincidentes; en segundo lugar, el método de EF es una aproximación y por tanto los resultados corresponden al promedio de una zona y no a lo que pasa exactamente en el punto; y en tercer lugar, los resultados experimentales pueden estar influenciados por las placas de acero utilizadas para la transmisión de las cargas ya que los puntos de medición se encontraban muy próximos a ellas.

En Figura 6 se han representado los cuadros de fisuración obtenidos para las 4 vigas. Puede verse que guardan cierta semejanza entre sí. Se distinguen las fisuras iniciales verticales ubicadas en la parte inferior de la sección central. Luego estas fisuras se extienden hacia los extremos y van formándose fisuras inclinadas. Recién en ese momento se nota la no linealidad en las curvas de respuesta de Figura 4 y 5. Finalmente se forman fisuras horizontales en la parte superior de la sección central debido a la fuerte compresión presente en esa zona.

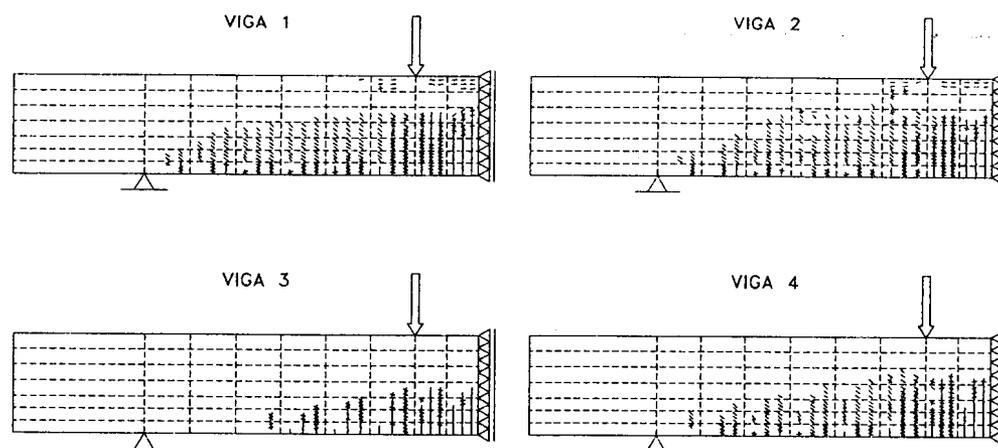


Figura 6: Cuadros de fisuración

En el caso de las vigas 2, 3 y 4, la rotura numérica es de tipo frágil debido a la rotura del hormigón. En el caso de la viga 1, los resultados numéricos muestran la entrada en fluencia de la armadura longitudinal con lo cual la viga se deforma sin incremento de carga mostrando un cierto ablandamiento. En todos los casos la carga máxima que puede alcanzarse numéricamente es muy cercana a la carga de rotura registrada experimentalmente (ver Tabla III).

Tabla III: Comparación de cargas últimas numéricas y experimentales

Viga	$P_u^{exp.}$ [KN]	$P_u^{num.}$ [KN]	$P_u^{exp.}/P_u^{num.}$
1	13.8	14.0	1.01
2	52.5	51.4	0.98
3	93.1	99.7	1.08
4	147.5	148.2	1.00

CONCLUSIONES

El modelo presentado contempla gran parte de los aspectos más importantes que caracterizan el comportamiento inelástico del hormigón, tales como la respuesta diferenciada para cada proceso de tensión-deformación multiaxial y la combinación de fenómenos de fisuración con aplastamiento a través de un tratamiento unificado. El uso de una formulación plástica localmente isotropa, combinada con el concepto de localización del daño, da lugar a un comportamiento globalmente anisótropo. Por otro lado, el modelo presenta objetividad de la respuesta respecto al tamaño de la zona de localización del daño.

El programa de EF planos puesto a punto permite simular adecuadamente el comportamiento de las vigas de $H^{\circ} A^{\circ}$ independientemente del tamaño de la pieza estudiada.

En conjunto, la respuesta numérica da una aproximación razonable al comportamiento experimental mediante tramos prácticamente rectos. La degradación de rigidez en el modelo del hormigón permitiría obtener una respuesta con cambios más suaves.

REFERENCIAS

1. Ramallo, J.C., Kotsovos, M.D. y Danesi, R.F., "Una Posible Explicación del Efecto del Tamaño en las Estructuras de Hormigón", Memorias XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Vol.3, Nov. 1993, pág. 383-394.
2. Oller, S., "Un Modelo de Daño Continuo para Materiales Friccionales", Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, España, 1988.
3. Oller, S., Oliver, J., Lubliner, J., Oñate, E., "Un Modelo Constitutivo de Daño Plástico para Materiales Friccionales. Parte I: Variables Fundamentales, Funciones de Fluencia y Potencial", Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol.4, 4, 1988, pág. 397-431.
4. Oller, S., Oliver, J., Lubliner, J., Oñate, E., "Un Modelo Constitutivo de Daño Plástico para Materiales Friccionales. Parte II: Generalización para Procesos con Degradación de Rigidez. Ejemplos", Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol.4, 4, 1988, pág. 433-461.
5. Oller, S., "Nuevos Materiales Estructurales Cerámicos en Ingeniería", Publicado por el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería", Barcelona, España, 1989.
6. Microsoft FORTRAN, version 5.1 (1991), Microsoft Corporation USA.
7. SPARCompiler-Fortran 2.01 FCS (1992), SunPro, A Sun Microsystems, Inc. Business.
8. SunOSTM 4.1.3 (1992), Sun Microsystems Computer Corporation.
9. Crisfield, M.A., "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", John Wiley & Sons Ltd., England, 1991.
10. Irons, B.M., "A Frontal Solution Program", Int. J. Num. Methods in Eng., Vol. 2, 1970, pág.5-32.
11. Hinton, E. y Owen, D.R.J., "Finite Element Programming", Academic Press Inc., Londres, 1977.
12. Hinton, E. y Owen, D.R.J., "Finite Elements in Plasticity. Theory and Practice", Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980.
13. Leonhardt, F. y Walter, R., "The Stuttgart Shear Tests, 1961", Translation No. 111, C&CA, Londres. Traducción de Beton-und-Stahlbetonbau, Vol. 65, No. 12, 1961; Vol. 57, Nos. 2, 3, 6, 7 y 8, 1962.